

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

П.А.ЧЕБЫШЕВ

ИЗБРАННЫЕ
ТРУДЫ



АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~



П. Л. ЧЕБЫШЕВ ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ



ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР АКАДЕМИК
И. М. ВИНОГРАДОВ
РЕДАКТОР-СОСТАВИТЕЛЬ ЧЛ.-КОРР. АН СССР
А. О. ГЕЛЬФОНД

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$
$$a < \frac{\pi(x) \ln x}{x} < b,$$
$$P \left[\left| \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \right| > \varepsilon \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА • 1955

СЕРИЯ „КЛАССИКИ НАУКИ“

Основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия: академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *К. М. Быков*, академик *Б. А. Казанский*, академик *О. Ю. Шмидт*, академик *Н. Н. Андреев*, академик *Д. И. Шербаков*, академик *П. Ф. Юдин*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштойяни*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, профессор *Д. М. Лебедев*, профессор *Н. А. Фигуровский*, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов* (зам. председателя)

Статьи и комментарии

Н. И. Ахиезера, академика *И. И. Артоболевского*, *Н. И. Левитского*





П. Л. ЧЕБЫШЕВ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ



ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Во втором томе „Теории чисел“ Лежандр предлагает формулу для приближенного определения числа простых чисел, меньших данного числа. Свою формулу Лежандр проверяет таблицею простых чисел от 10 000 до 1 000 000 и потом прилагает ее к решению некоторых вопросов теории чисел. Несмотря на видимое согласие формулы Лежандра с таблицею простых чисел, мы не можем не изъявить сомнения насчет строгости ее и вследствие того не можем признать верными выводы, на ней основанные. К такому заключению приводит нас одна теорема относительно свойств функции, определяющей число простых чисел, меньших данного числа, теорема, из которой могут быть выведены многие любопытные предложения.

Мы займемся теперь изложением этой теоремы, а потом покажем некоторые из ее предложений.

Теорема, которая будет предметом наших исследований, заключается в следующем:

Теорема I. Если $\phi(x)$ означает число простых чисел, меньших x , n — какое-либо целое число, ρ — количество > 0 , то в сумме

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\phi(x+1) - \phi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

мы будем иметь такую функцию, которая с приближением ρ к 0 приближается к конечному пределу.

Доказательство. Мы докажем сначала, что такое свойство принадлежит функциям, получаемым через дифференцирование несколько

раз выражений

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right),$$

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}$$

по ρ , предполагая здесь и везде впоследствии суммирование по m распространенным на все числа от $m=2$ до $m=\infty$, суммирование же по μ распространенным на одни простые числа от $\mu=2$ до $\mu=\infty$.

Начнем с первого. Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^x - 1} x^{\rho} dx = \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1+\rho} dx = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx,$$

а потому

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx}{\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx}.$$

Из этого равенства видно, что производная n -го порядка от $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ по ρ будет выражаться дробью, у которой знаменателем будет $\left(\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx \right)^{n+1}$, а числителем — целая функция от интегралов

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx, \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log x dx,$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log x dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx.$$

Но такая дробь, будет ли $n=0$ или >0 , приближается к конечному пределу с приближением ρ к 0, ибо предел интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx$ при $\rho=0$ есть 1; интегралы же

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx, \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log x dx,$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log x dx, \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx$$

при $\rho=0$, очевидно, сохраняют конечную величину.

Итак, с приближением ρ к 0 все производные от $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, так же как и сама $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, будут иметь пределами величины конечные.

Обращаемся теперь к функции

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right).$$

Известно, что

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}} \right) \left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} \right) \left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}} \right) \dots \right]^{-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \dots,$$

откуда выходит

$$-\log \left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}} \right) - \log \left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} \right) - \log \left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}} \right) - \dots =$$

$$= \log \left(1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \dots \right),$$

что по нашему знакоположению напишется так:

$$-\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) = \log \left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \right),$$

следовательно,

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) = \log \left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \right) \rho,$$

а потому

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) = \log \left[1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho \right].$$

Из этого равенства видно, что производные

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right)$$

по ρ выразятся конечным числом дробей, у которых знаменателями будут целые положительные степени

$$1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho,$$

а числителями будут целые функции количества ρ , выражения $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ и производных его по ρ . Но такие дроби с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам, ибо выражение $1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho$, составляющее знаменателей этих дробей, с приближением ρ к 0 приближается к 1 (потому что $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, как доказано, при этом остается конечною величиною); функция же $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ и производные ее, входящие в состав числителей этих дробей, по доказанному нами, с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам.

Нам остается теперь доказать это же относительно производных

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}.$$

Для этого мы замечаем, что первая производная этой функции есть

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}}.$$

По виду же этой функции нетрудно заметить, что ее высшие производные выразятся конечным числом членов вида

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log^p \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}} \cdot \frac{1}{s \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right)^r},$$

где p, ρ, r, s не ≤ 0 . Но каждый из таких членов для $\rho = 0$ и $\rho > 0$ имеет конечную величину; ибо для $\rho = 0$ и $\rho > 0$ функция, стоящая под знаком $\sum$, относительно $\frac{1}{\mu}$ будет бесконечно малой порядка не ниже второго.

Убедившись таким образом, что производные от выражений

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right),$$

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}},$$

с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам, мы заключаем то же и о выражении

$$\frac{d^n \left[\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right]}{d\rho^n} + \frac{d^n \left[\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) \right]}{d\rho^n} +$$

$$+ \frac{d^{n-1} \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right)}{d\rho^{n-1}},$$

которое по выполнении дифференцирования и сокращения приводится к следующему:

$$\pm \left(\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}} - \sum \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}} \right),$$

в чем и заключается предложенная нами теорема, ибо, как нетрудно заметить, по нашему знакоположению выражение

$$\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}} - \sum \frac{\log^{n-1}}{m^{1+\rho}}$$

тождественно выражению

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}.$$

В самом деле, последнее выражение есть разность двух

$$\sum_{x=2}^{\infty} [\varphi(x+1) - \varphi(x)] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}, \quad \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\log^{n-1} x}{x^{1+\rho}},$$

из которых первое приводится к $\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}}$ (сумме значений $\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$, соответствующих простым числам), ибо $\varphi(x+1)$ и $\varphi(x)$, означая число простых чисел, меньших $x+1$ и x , в разности $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ дают 1, когда x число простое, и 0, если x число составное; второе же переменною x на m обращается в $\sum \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}}$.

Так убеждаемся в справедливости предложенной нами теоремы.

Из доказанной нами теоремы можно вывести многие любопытные свойства функции, определяющей число простых чисел, меньших дан-

ного предела. Для этого мы замечаем, что разность $\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}$ при x большом есть бесконечно малое относительно $\frac{1}{x}$ порядка первого; а потому выражение

$$\left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right) \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при x большом будет относительно $\frac{1}{x}$ порядка $2+\rho$, и, следовательно,

при ρ не < 0 сумма

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right) \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет иметь конечное значение. Складывая же эту сумму с выражением

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

о котором сейчас доказали теорему I, на основании ее заключаем, что значение

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}} dx$$

с приближением ρ к 0 приближается к конечному пределу. А отсюда нетрудно вывести следующую теорему:

Теорема II. *От $x=2$ до $x=\infty$ функция $\varphi(x)$, означающая число простых чисел, меньших x , удовлетворяет бесконечное число*

раз и неравенству $\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$ и неравенству $\varphi(x) <$

$\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$, как бы α , оставаясь количеством положитель-

ным, ни было мало, а n ни было велико.

Доказательство. Мы ограничимся здесь доказательством второго неравенства, первое докажется подобным образом. Для доказательства того, что неравенству

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x} \quad (1)$$

удовлетворяет бесконечное множество чисел, допустим противное и посмотрим, к чему приведет нас это допущение. Допустив, что неравенству (1) удовлетворяет конечное число чисел, положим, что α есть

целое число, превосходящее и количество e^n и наибольшее число, удовлетворяющее неравенству (1). В этом предположении для $x > a$ будет

$$\varphi(x) \geq \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \log x > n,$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \geq \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \frac{n}{\log x} < 1. \quad (2)$$

Но в этом случае, как сейчас увидим, в противность доказанному нами, значение выражения

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет приближаться к $+\infty$ с приближением ρ к 0. В самом деле, это выражение мы можем рассматривать как предел

$$\sum_{x=2}^s \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при $s = \infty$. Предполагая же $s > a$, это выражение мы можем рассматривать как сумму

$$C + \sum_{x=a+1}^s \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}, \quad (3)$$

называя через C сумму

$$\sum_{x=2}^a \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

которая, очевидно сохраняет конечное значение при $\rho = 0$ и $\rho > 0$.

Далее, по формуле

$$\sum_{a+1}^s u_x (v_{x+1} - v_x) = u_s v_{s+1} - u_a v_{a+1} - \sum_{a+1}^s v_x (u_x - u_{x-1}),$$

полагая

$$v_x = \varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}, \quad u_x = \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

выражение (3) преобразуем в такое:

$$\begin{aligned} C - \left[\varphi(a+1) - \int_2^{a+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n a}{a^{1+\rho}} + \left[\varphi(s+1) - \int_2^{s+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n s}{s^{1+\rho}} \\ - \sum_{x=a+1}^s \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right] \left[\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}} - \frac{\log^n (x-1)}{(x-1)^{1+\rho}} \right], \end{aligned}$$

а это, называя через θ количество > 0 и $< 1^*$, можем написать так:

$$\begin{aligned} C - \left[\varphi(a+1) - \int_2^{a+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n a}{a^{1+\rho}} + \left[\varphi(s+1) - \int_2^{s+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n s}{s^{1+\rho}} + \\ + \sum_{x=a+1}^s \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right] \left[1 + \rho - \frac{n}{\log(x-\theta)} \right] \frac{\log^n (x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}. \end{aligned}$$

Полагая же два первых члена этого выражения равными F и замечая по (2), что третий член > 0 , мы убеждаемся, что все это выражение более

$$F + \sum_{x=a+1}^s \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right] \left[1 + \rho - \frac{n}{\log(x-\theta)} \right] \frac{\log^n (x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

Из тех же неравенств (2) видно, что здесь под знаком суммы в пределах суммирования функция сохраняет знак $+$. Притом в пределах

* Меняющееся вместе с x .

суммирования будет, во-первых, $1 + \rho - \frac{n}{\log(x-\theta)}$ более $1 - \frac{n}{\log a}$, ибо $\rho > 0$, x не $< a + 1$; $\theta < 1$; во-вторых, $\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$ более $\frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)}$, ибо $\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$ не меньше $\frac{\alpha x}{\log^n x}$ по первому из неравенств (2), а по второму производная $\frac{\alpha x}{\log^n x}$, которая есть $\frac{\alpha}{\log^n x} \left(1 - \frac{n}{\log x}\right)$, более 0, вследствие чего $\frac{\alpha x}{\log^n x} > \frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)}$.

А потому предыдущее выражение более

$$F + \sum_{x=a+1}^s \frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)} \left(1 - \frac{n}{\log a}\right) \frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

Но это, по сокращении, приводится к следующему:

$$F + \alpha \left(1 - \frac{n}{\log a}\right) \sum_{x=a+1}^s \frac{1}{(x-\theta)^{1+\rho}},$$

что, очевидно, более

$$F + \alpha \left(1 - \frac{n}{\log a}\right) \sum_{x=a+1}^s \frac{1}{x^{1+\rho}},$$

а это для $s = \infty$ будет

$$F + \alpha \left(1 - \frac{n}{\log a}\right) \sum_{x=a+1}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\rho}}$$

и с помощью определенных интегралов напишется так:

$$F + \alpha \left(1 - \frac{n}{\log a}\right) \frac{\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{e^x - 1} x^{\rho} dx}{\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx}.$$

Но это выражение, очевидно, с уменьшением ρ приближается к $+\infty$,

ибо $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{e^x - 1} dx = +\infty$, $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, а α , по положению, и $1 - \frac{n}{\log a}$

вследствие (2) суть количества положительные.

Убедившись таким образом, что в сделанном нами предположении не только сумма

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_2^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1-\rho}},$$

но и количество меньшее ее с приближением ρ к 0 приближается к $+\infty$, мы заключаем о несправедливости этого предположения, что и следовало доказать.

На основании предыдущей теоремы легко доказать следующую:

Теорема III. *Выражение $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ при $x \rightarrow \infty$ не может иметь пределом количество, отличное от -1 .*

Доказательство. Пусть L будет предел значения $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ при $x \rightarrow \infty$. В этом предположении мы всегда найдем число N столь большое, что при $x > N$ значение $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ не будет выходить из пределов $L - \varepsilon$ и $L + \varepsilon$, как бы ε ни было мало. Следовательно, для таких величин x , при $\varepsilon > 0$, будет

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x > L - \varepsilon, \quad \frac{x}{\varphi(x)} - \log x < L + \varepsilon. \quad (4)$$

Но, по предыдущей теореме, неравенства

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

удовлетворяются при бесконечном множестве величин x и, следовательно, при некоторых числах $x > N$, для которых имеют место неравенства (4). Но эти неравенства в соединении с последними дают

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x > L - \varepsilon, \quad \frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x < L + \varepsilon,$$

откуда выходит

$$L + 1 < \frac{x - (\log x - 1) \left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x} \right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}} + \varepsilon,$$

$$L + 1 > \frac{x - (\log x - 1) \left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x} \right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \varepsilon.$$

Из этих неравенств видно, что численная величина $L + 1$ не превосходит численной величины одного из выражений

$$\frac{x - (\log x - 1) \left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x} \right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}} \pm \varepsilon.$$

Но количество ε может быть сделано, как заметили, по произволу мало, если предположить N чрезвычайно большим; то же случается при увеличении x с выражениями

$$\frac{x - (\log x - 1) \left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x} \right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}},$$

ибо в пределе этих выражений для $x \rightarrow \infty$ по известным приемам дифференциального исчисления мы открываем 0.

Убедясь таким образом, что выражение

$$\frac{x - (\log x - 1) \left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{x}{\log^n x} \right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{x}{\log^n x}} \pm \varepsilon,$$

определяющее высший предел численной величины $L \mp 1$, может быть сделано по произволу малым, мы по способу пределов заключаем, что $L \mp 1 = 0$, а потому $L = \mp 1$, что и следовало доказать.

Доказанное нами относительно предела значений $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ при $x \rightarrow \infty$ противоречит формуле, предложенной Лежандром для приближенного определения числа простых чисел, меньших данного.

По его мнению, при x большом значение $\varphi(x)$ может быть определено с достаточною точностью уравнением

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366}.$$

Но отсюда для предела $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ при $x = \infty$ находим $-1,08366$, вместо -1 .

На основании теоремы II можно показать высший предел точности, с которою функция $\varphi(x)$, определяющая число простых чисел меньших x , может быть представлена какою-либо данною функциею $f(x)$. При этом разность $f(x) - \varphi(x)$ мы будем сравнивать с выражениями

$$\frac{x}{\log x}, \frac{x}{\log^2 x}, \frac{x}{\log^3 x}, \dots$$

и для сокращения будем называть A количеством порядка $\frac{x}{\log^n x}$, если отношение A к $\frac{x}{\log^m x}$ при $x \rightarrow \infty$ будет ∞ для $m > n$ и 0 для $m < n$.

Условившись в этом, мы докажем следующую теорему:

Теорема IV. Если выражение

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$$

при $x \rightarrow \infty$ имеет пределом количество конечное* или бесконечность, то $f(x)$ не может представить $\varphi(x)$ верно до количества порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно.

Доказательство. Пусть L будет предел, к которому значение

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$$

приближается с приближением x к ∞ . Количество L , не будучи 0 по положению, может быть или количеством положительным, или отрицательным. Мы его предположим количеством положительным, но суждения наши без затруднения приложатся и к случаю $L < 0$.

Если значение

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$$

с приближением x к ∞ имеет пределом L большее 0, то мы найдем число N столь большое, что для $x > N$ значение $\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$ останется постоянно более некоторого положительного количества l .

Следовательно, предполагая $x > N$, мы будем иметь

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right) > l. \quad (5)$$

Но, по теореме II, как бы $\alpha = \frac{l}{2}$ ни было мало, для бесконечного множества чисел будет иметь место такое неравенство:

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad (6)$$

* Отличное от нуля.— *Ред*

которое дает

$$f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} < f(x) - \varphi(x) + \frac{x}{\log^n x},$$

что, по умножении на $\frac{\log^n x}{x}$ и по положению $\alpha = \frac{l}{2}$, будет

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right) < \frac{\log^n x}{x} (f(x) - \varphi(x)) + \frac{l}{2},$$

а отсюда, вследствие неравенства (5), выходит

$$\frac{\log^n x}{x} (f(x) - \varphi(x)) > \frac{l}{2}.$$

Но это неравенство, существуя вместе с неравенствами (5) и (6) для бесконечного множества чисел, по причине $\frac{l}{2} > 0$ обнаруживает, что предел

$$\frac{\log^n x}{x} (f(x) - \varphi(x))$$

при $x \rightarrow \infty$ не есть нуль. Если же этот предел отличен от 0, то разность $f(x) - \varphi(x)$ по сделанному нами определению есть количество порядка $\frac{x}{\log^n x}$ или низшего, и, следовательно $f(x)$ разнится с $\varphi(x)$ или количеством порядка $\frac{x}{\log^n x}$, или порядка низшего, что и следовало доказать.

На основании этой теоремы мы узнаем, что формула Лежандра $\frac{x}{\log x - 1,08366}$, для которой

$$\frac{\log^2 x}{x} \left(\frac{x}{\log x - 1,08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$$

при $x \rightarrow \infty$ имеет пределом величину 0,08366, не может выражать $\varphi(x)$. Число простых чисел меньших x верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно.

Также нетрудно показать на основании этой теоремы величины постоянных A и B , при которых функция $\frac{x}{A \log x + B}$ могла бы выражать $\varphi(x)$ верно до количества порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно.

По предыдущей теореме, такие величины A и B должны удовлетворять уравнению

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log^2 x}{x} \left(\frac{x}{A \log x + B} - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right) \right] = 0.$$

Но разложением $\frac{x}{A \log x + B}$ в ряд находим

$$\frac{x}{A \log x + B} = \frac{1}{A} \cdot \frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2} \cdot \frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3} \cdot \frac{x}{\log^3 x} - \dots$$

Интегрируя же $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ по частям, имеем

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2 \int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} + C.$$

Вследствие чего предыдущее уравнение изменяется в следующее:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log^2 x}{x} \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2} \cdot \frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3} \cdot \frac{x}{\log^3 x} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - 2 \int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

что приводится к такому уравнению:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{A} - 1 \right) \log x - \left(\frac{B}{A^2} + 1 \right) + \frac{B^2}{A^3} \frac{1}{\log x} - \dots \right. \\ \left. \dots - 2 \frac{\log^2 x}{x} \int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C \frac{\log^2 x}{x} \right] = 0. \end{aligned}$$

Замечая же, что здесь все члены, начиная с третьего, приближаются к 0 с увеличением x , мы убеждаемся, что это уравнение может

быть удовлетворено только предположением $\frac{1}{A} - 1 = 0$, $\frac{B}{A^2} + 1 = 0$, откуда $A = 1$, $B = -1$.

Итак, из функций вида $\frac{x}{A \log x + B}$ одна функция $\frac{x}{\log x - 1}$ могла бы выразить $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно.

Что же касается до выбора функции, наиболее выражающей $\varphi(x)$, число простых чисел меньших данного числа, то относительно ее можно доказать такую теорему:

Теорема V. Если функция $\varphi(x)$, определяющая число простых чисел меньших x , может быть выражена верно до количества порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно алгебраически от x , $\log x$, e^x , то такое выражение ее есть

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) x}{\log^n x}.$$

Доказательство. Пусть будет $f(x)$ та функция, которая, включая алгебраически x , $\log x$, e^x , выражает $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно; выражение

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} - \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} - \dots - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) x}{\log^n x} \right)$$

с увеличением x должно приближаться к какому-либо пределу, конечному или бесконечно великому; ибо в противном случае первая производная этого выражения с увеличением x до ∞ меняла бы свой знак бесконечное число раз; а это, как легко заметить, не может случиться с функцией алгебраической от x , $\log x$, e^x .*

* Что алгебраическая функция от x , $\log x$, e^x перестает менять свой знак при x , превосходящем некоторый предел, в этом нетрудно убедиться. Для функции целой это ясно; знак такой функции при довольно большом x будет зависеть от одного члена вида $kx^{m'} \cdot \log^{m''} x \cdot e^{m'''x}$, который не меняет знака при $x > 1$. Для всякой же другой алгебраической функции x , $\log x$, e^x , которая пусть будет y , это докажется таким образом. Функция y вообще будет корнем уравнения $u_0 y^m + u_1 y^{m-1} + \dots + u_{m-1} y + u_m = 0$, и если v будет функция, получаемая через исключение y из предыдущего уравнения и первой производной его по y , то функции u_0, u_m, v как

Итак, для $f(x)$ необходимо будет

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} - \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} - \dots \right. \right. \quad (7)$$

$$\left. \left. \dots - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) x}{\log^n x} \right) \right] = L.$$

Но, с другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log^n x}{x} \left(\frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} + \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1) x}{\log^n x} - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right) \right] = 0,$$

а это уравнение, сложенное с предыдущим, дает

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right) \right] = L.$$

Но, по положению, $f(x)$ выражает $\varphi(x)$ верно до количества порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно, а, по предыдущей теореме, это не может иметь место, если предел значения

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$$

при $x \rightarrow \infty$ не есть 0. Следовательно, $L = 0$, и уравнение (7) дает

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} - \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} - \dots - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) x}{\log^n x} \right) \right] = 0,$$

целые перестанут менять свой знак и обращаться в 0 при x , превосходящем некоторый предел, а при этом и y будет сохранять свой знак, ибо при величинах x , не обращающих y в нуль, уравнение не может иметь равных корней, а при неравенстве корней знак одного из них может перемениться только с переменою знака u_0 или u_m . Это свойство может быть также доказано и для многих других функций, и на все эти функции будет распространяться теорема V и заключения, из нее вытекающие.

а это показывает, что функция

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2x}{\log^3 x} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)x}{\log^n x}$$

не разнится с $f(x)$ количествами порядка $\frac{x}{\log^n x}$ и низшими и, следовательно, что она, подобно $f(x)$, может выражать $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно, что и требовалось доказать.

На основании доказанной нами теоремы мы заключаем, что если $\varphi(x)$ функция, определяющая число простых чисел меньших x , может быть выражена алгебраически в x , $\log x$, e^x верно до количеств порядков $\frac{x}{\log x}$, $\frac{x}{\log^2 x}$, $\frac{x}{\log^3 x}$, $\dots$ включительно, то такие выражения ее суть

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x}, \dots,$$

а так как эти функции суть не что иное, как значение интеграла $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$,

верное до количеств порядка $\frac{x}{\log x}$, $\frac{x}{\log^2 x}$, $\frac{x}{\log^3 x}$, $\dots$, то во всех этих

предположениях интеграл $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ будет выражать $\varphi(x)$ верно до количеств

такого порядка, до какого она способна выразиться алгебраически

в x , $\log x$, e^x . Что интеграл $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ при x большом выражает довольно

близко число простых чисел меньших x , в этом мы легко убеждаемся при помощи таблиц простых чисел. Но эти таблицы, доселе составленные,

слишком малы, чтобы видеть из них превосходство формулы $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$

перед формулою Лежандра $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ или подобными ей. В пределах

этих таблиц функции $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ мало разнятся; но разность

их $\frac{x}{\log x - 1,08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$, имея minimum при $x = e^{\frac{(1,08366)^2}{0,08366}} = 1\,247\,646$,

после него постоянно возрастает до ∞ и при $x > 10\,000\,000$ получает уже довольно большую величину. При этих-то величинах x можно

будет обнаружить преимущество формулы $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ перед $\frac{x}{\log x - 1,08366}$.

Но для этого потребна таблица простых чисел гораздо обширнее тех, которые мы до сих пор имеем.

Принявши для приближенного определения $\varphi(x)$ интеграл $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, мы должны будем изменить все формулы Лежандра, выведенные им в предположении $\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366}$, и формулы наши будут не сложнее его. Вследствие же доказанных нами теорем они должны быть ближе к истине.

Для примера мы найдем здесь приближенные формулы для определения значений

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{X},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{X}\right)$$

при X большом.

Для определения первого мы замечаем, что по нашему знакоположению будет

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{x=X} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x},$$

ибо $\varphi(x)$, означая число простых чисел меньших x в разности $\varphi(x+1) - \varphi(x)$, дает 0, когда x число составное, и 1, когда оно простое.

Предполагая X числом большим, назовем λ какое-нибудь число менее X , но еще довольно значительное, дабы в пределах $x = \lambda$ и $x = X$

мы могли с достаточною точностью заменить $\varphi(x)$ интегралом $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$.

В этом предположении предыдущее уравнение напишется так:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} + \sum_{x=\lambda}^X \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x}.$$

Заменяя же здесь во второй сумме $\varphi(x)$ интегралом $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, найдем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} + \sum_{x=\lambda}^X \frac{\int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}}{x}.$$

Но, верно до количества порядка $\frac{1}{x}$, интеграл $\int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}$ может быть заме-

нен выражением $\frac{1}{x \log x}$, и с такою же точностью сумма $\sum_{x=\lambda}^X \frac{1}{x \log x}$ может

быть заменена интегралом $\int_{\lambda}^X \frac{dx}{x \log x}$.

Но такую переменую предыдущее уравнение приводится к следующему:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} + \int_{\lambda}^X \frac{dx}{x \log x},$$

что, до выполнения интегрирования дает

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} - \log \log \lambda + \log \log X,$$

или

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} = C + \log \log X, \quad (8)$$

полагая C равным количеству $\sum_{x=2}^{\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} - \log \log \lambda$, не зависящему от X .

Вот уравнение, которое по определении постоянного C может нам служить для приближенного вычисления суммы

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{X},$$

когда X велико.

Наше выражение этой суммы проще выражения ее у Лежандра, которое такого вида:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{X} = \log(\log X - 0,08366) + C.$$

Теперь переходим к определению произведения

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{X}\right).$$

Полагая это произведение равным P и взяв логарифмы от обеих частей уравнения

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{X}\right) = P,$$

находим

$$\log P = \log \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \log \left(1 - \frac{1}{X}\right),$$

что иначе напишется так:

$$\begin{aligned} \log P = & - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{X} \right) + \frac{1}{2} + \log \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{3} + \log \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{X} + \log \left(1 - \frac{1}{X}\right). \end{aligned}$$

А здесь, верно до количеств порядка $\frac{1}{X}$, можем заменить конечный ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \log \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \\ + \frac{1}{X} + \log \left(1 - \frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

рядом бесконечным

$$\frac{1}{2} + \log \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \cdots,$$

ибо разность этих рядов меньше численного значения

$$\frac{1}{X+1} + \log \left(1 - \frac{1}{X+1} \right) + \frac{1}{X+2} + \log \left(1 - \frac{1}{X+2} \right) + \dots,$$

а это меньше интеграла $\int_X^\infty \left[-\frac{1}{x} - \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] dx$, который равен $1 + (X-1) \log \left(1 - \frac{1}{X} \right)$ и при X большом есть малая величина первого порядка относительно $\frac{1}{X}$.

Итак, до количества порядка $\frac{1}{X}$, в предыдущем выражении $\log P$ мы можем заменить конечную сумму

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \log \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} + \log \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} + \log \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \dots + \\ + \frac{1}{X} + \log \left(1 - \frac{1}{X} \right) \end{aligned}$$

бесконечным рядом

$$\frac{1}{2} + \log \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} + \log \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} + \log \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \dots$$

и, называя для сокращения величину последнего через C' , мы предыдущее выражение $\log P$ представим так:

$$\log P = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X} \right) + C'.$$

Внеся сюда значение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{X},$$

из (8) найдем

$$\log P = -C - \log \log X + C',$$

откуда выходит

$$P = \frac{e^{C'-C}}{\log X};$$

полагая же для сокращения $e^{c'-c} = C_0$ и заменяя P его величиною

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{X}\right),$$

имеем

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{C_0}{\log X}.$$

Вместо этой формулы, Лежандр нашел такую:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{C_0}{\log X - 0,08366}.$$

О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. Все вопросы, зависящие от закона распределения простых чисел в ряду

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots,$$

представляют вообще большие трудности. Те заключения, которые можно сделать с очень большою вероятностью на основании таблиц простых чисел, чаще всего остаются без строгого доказательства. Например, таблицы простых чисел приводят к мысли, что, начиная от $a > 3$, существует всегда простое число большее, чем a , и меньшее $2a - 2$ (что составляет известный *postulatum* Бертрана*), но до настоящего времени не было доказательства этого предложения для значений a , которые превышают пределы наших таблиц. Трудность еще увеличивается, когда задаются более тесными пределами или когда желают назначить такой предел для a , чтобы для значений a , превышающих этот предел, ряд

$$a + 1, a + 2, \dots, 2a - 2$$

содержал по крайней мере два, три, четыре и т. д. простых числа.

Существует еще другой род очень трудных вопросов, которые также зависят от закона распределения простых чисел в ряду

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$$

и разрешение которых крайне необходимо. Таковы именно все вопросы о числовых величинах рядов, члены которых суть функции простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

* Journal de l'école polytechnique, cahier XXX.

Эйлер доказал, что ряд

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{7^a} + \frac{1}{11^a} + \frac{1}{13^a} + \dots$$

делается расходящимся для тех же значений a , при которых делается расходящимся ряд

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a} + \dots,$$

а именно для $a \leq 1$. Но для некоторых форм общего члена u_n сходимость ряда

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + \dots$$

не представляет необходимого условия для того, чтобы ряд

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + u_{13} + \dots$$

имел конечное значение. Таков, например, случай $u_n = \frac{1}{n \log n}$. Действительно, значение ряда

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \dots,$$

как мы докажем дальше, не превышает 1,73, между тем как ряд

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{6 \log 6} + \dots$$

расходящийся. Какой же критерий сходимости рядов, которые составлены из членов с простыми индексами 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.? А в случае сходимости как установить степень приближения, с которою вычисляются их величины по первым членам? Решение этих вопросов по отношению к рядам вида

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + u_{13} + \dots$$

весьма интересно, ибо эти ряды встречаются в некоторых изысканиях о числах.

Этот мемуар содержит решение поименованных вопросов. Я достиг такового, изучая функцию, которая обозначает сумму логарифмов простых чисел, не превышающих данного предела. На основании уравнения,

которому удовлетворяет эта функция, можно указать два предела, между которыми лежит значение этой суммы. Между различными заключениями, которые мы отсюда выводим, нам удастся указать пределы, между которыми находится всегда по крайней мере одно простое число, что нас приводит очень просто к доказательству упомянутого постулата Бертрана. Что касается вычисления рядов формы

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + \dots,$$

то мы находим критерий для суждения, сходятся они или расходятся, и в первом случае мы даем метод для вычисления, с известною степенью приближения, разности между величинами этих рядов и суммами их первых членов. Мы даем также формулу для вычисления по приближению числа простых чисел, не превышающих данного предела, и указываем предел погрешности этой формулы, чего до сих пор еще не было сделано. В мемуаре, который я имел честь представить С.-Петербургской Академии Наук в 1848 г.*, я доказал, что если в выражении числа простых чисел, не превосходящих x , отбросить все члены, которые исчезают по сравнению с

$$\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{x}{\log^3 x} + \dots$$

при $x \rightarrow \infty$, то это выражение приводится к $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$; но для конечных зна-

чений x величина отброшенных членов остается неизвестною. Что же касается формулы Лежандра, то ее степень приближения известна только в пределах таблиц простых чисел, которыми пользуются для ее проверки.

§ 2. Условимся обозначать вообще через $\theta(z)$ сумму логарифмов (гиперболических) всех простых чисел, которые не превышают z . Эта функция делается равной нулю в том случае, когда z меньше наименьшего из простых чисел, именно 2. Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет следующему уравнению**:

* „Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины“ (см. стр. 9). — *Ред.*

** Для краткости мы пишем $\theta\left(\frac{x}{n}\right)^m$ вместо $\theta\left[\left(\frac{x}{n}\right)^m\right]$.

$$\begin{aligned}
& \theta(x) + \theta(x)^{1/2} + \theta(x)^{1/3} + \theta(x)^{1/4} + \dots \\
& + \theta\left(\frac{x}{2}\right) + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{1/4} + \dots \\
& + \theta\left(\frac{x}{3}\right) + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{1/2} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{1/3} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{1/4} + \dots \\
& + \theta\left(\frac{x}{4}\right) + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{1/2} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{1/3} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{1/4} + \dots \\
& \dots \dots \dots = \\
& = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots [x]),
\end{aligned}$$

где мы употребляем $[x]$ для обозначения наибольшего целого числа, содержащегося в величине x . Ряды, которые содержит это уравнение, продолжены до членов, обращающихся в нуль.

Чтобы проверить это уравнение, мы замечаем, что обе части его составлены из членов вида $K \log a$, где a — число простое и K — некоторое целое число. В первой части K будет равно числу членов в рядах

$$\begin{aligned}
& x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \dots \\
& (x)^{1/2}, \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}, \left(\frac{x}{3}\right)^{1/2}, \left(\frac{x}{4}\right)^{1/2}, \dots \\
& (x)^{1/3}, \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \left(\frac{x}{3}\right)^{1/3}, \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}, \dots \\
& (x)^{1/4}, \left(\frac{x}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{x}{3}\right)^{1/4}, \left(\frac{x}{4}\right)^{1/4}, \dots \\
& \dots \dots \dots,
\end{aligned} \tag{1}$$

которые не меньше, чем a , ибо вообще $\theta(z)$ содержит $\log a$ только в случае $z \geq a$. Что же касается коэффициента при $\log a$ во второй части, то он равен показателю наивысшей степени a , делящей $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots [x]$. Но оказывается, что этот показатель равен также числу тех членов в рядах (1), которые не меньше a , ибо число членов ряда

$$x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \dots$$

которые не меньше a , равно числу тех членов ряда

$$1, 2, 3, \dots, [x],$$

которые делятся на a .

То же соотношение существует между числом членов этого ряда, делящихся на a^2, a^3, a^4 и т. д., и числом тех членов рядов

$$\begin{aligned} & (x)^{1/2}, \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}, \left(\frac{x}{3}\right)^{1/2}, \left(\frac{x}{4}\right)^{1/2}, \dots \\ & (x)^{1/3}, \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \left(\frac{x}{3}\right)^{1/3}, \left(\frac{x}{4}\right)^{1/3}, \dots \\ & (x)^{1/4}, \left(\frac{x}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{x}{3}\right)^{1/4}, \left(\frac{x}{4}\right)^{1/4}, \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

которые не меньше a .

Следовательно, обе части нашего уравнения состоят из одинаковых членов, что и доказывает его тождественность.

Уравнение, которое мы доказали, может быть представлено в следующей форме:

$$\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots = T(x), \quad (2)$$

где для сокращения положено

$$\left. \begin{aligned} \theta(z) + \theta(z)^{1/2} + \theta(z)^{1/3} + \theta(z)^{1/4} + \dots &= \psi(z), \\ \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots [x]) &= T(x). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Переходя к приложению этих формул, заметим, что в силу сказанного относительно значения $\theta(z)$, функция $\psi(z)$ обращается в нуль, когда $z < 2$ и, следовательно, уравнение (2) будет справедливо даже в пределах $x=0, x=2$, если будем считать значение $T(x)$ равным нулю, когда x меньше 2.

§ 3. На основании этого уравнения нетрудно найти несколько неравенств, которым удовлетворяет функция $\psi(z)$. В этом мемуаре мы будем пользоваться следующими двумя:

$$\begin{aligned} \psi(x) &> T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right), \\ \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) &< T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right). \end{aligned}$$

Для доказательства этих неравенств мы ищем при помощи (2) величину

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right),$$

что приводит нас к такому уравнению:

$$\begin{aligned} & \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \\ & + \psi\left(\frac{x}{30}\right) + \psi\left(\frac{x}{2 \cdot 30}\right) + \psi\left(\frac{x}{3 \cdot 30}\right) + \psi\left(\frac{x}{4 \cdot 30}\right) + \dots \\ & - \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2 \cdot 2}\right) - \psi\left(\frac{x}{3 \cdot 2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4 \cdot 2}\right) - \dots \\ & - \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{2 \cdot 3}\right) - \psi\left(\frac{x}{3 \cdot 3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4 \cdot 3}\right) - \dots \\ & - \psi\left(\frac{x}{5}\right) - \psi\left(\frac{x}{2 \cdot 5}\right) - \psi\left(\frac{x}{3 \cdot 5}\right) - \psi\left(\frac{x}{4 \cdot 5}\right) - \dots = \\ & = T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

первая часть которого приводится к виду

$$A_1\psi(x) + A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right) + A_4\psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots + A_n\psi\left(\frac{x}{n}\right) + \dots,$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ и т. д. — числовые коэффициенты. Но, рассматривая значения этих коэффициентов, нетрудно убедиться, что вообще

$$\begin{aligned} A_n &= 1, & \text{если } n &= 30m + 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \\ A_n &= 0, & \text{если } n &= 30m + 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 21, 22, 25, 26, 27, 28, \\ A_n &= -1, & \text{если } n &= 30m + 6, 10, 12, 15, 18, 20, 24, \\ A_n &= -1, & \text{если } n &= 30m + 30. \end{aligned}$$

Действительно, в первом случае n не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, а потому член $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ находится только в первой строке уравнения (4). Во втором случае n делится на одно из чисел 2, 3, 5; следовательно, кроме члена $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ в первой строке, в одной из трех последних

строк будет член $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, и после приведения коэффициент при $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ будет 0. В третьем случае n делится на два из чисел 2, 3, 5. Следовательно, три последние строки уравнения (4) содержат два члена, равных $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, и так как первая строка содержит $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ со знаком $+$, то в результате получаем $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$. К такому же заключению придем и в последнем случае, когда n делится на 30, ибо тогда член $\pm\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ встречается во всех пяти строках: два раза со знаком $+$ и три раза со знаком $-$.

Следовательно, для

$$n = 30m + 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \\ 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$$

находим

$$A_n = 1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 0, 1, - \\ -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1,$$

вследствие чего уравнение (4) приводится к такому:

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \dots = \\ = T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right),$$

где все члены первой части имеют коэффициентами 1, взятую попеременно со знаками $+$ и $-$. Сверх того, так как, по свойству функции $\psi(x)$, ряд

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \dots$$

убывающий, то его величина будет заключена между пределами $\psi(x)$ и $\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Следовательно, на основании предыдущего уравнения

необходимо будет

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right), \\ \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) &\leq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right).\end{aligned}$$

§ 4. Рассмотрим теперь функцию $T(x)$, которая входит в эти формулы. На основании (3), обозначая через a наибольшее целое число, содержащееся в величине x , которую мы предполагаем не меньше 1, имеем

$$T(x) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a),$$

или, что то же,

$$T(x) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a(a+1)) - \log(a+1).$$

Но известно, что

$$\begin{aligned}\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a) &< \log \sqrt{2\pi} + a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a}, \\ \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a(a+1)) &> \log \sqrt{2\pi} + (a+1) \log(a+1) - (a+1) + \\ &+ \frac{1}{2} \log(a+1);\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}T(x) &< \log \sqrt{2\pi} + a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a}, \\ T(x) &> \log \sqrt{2\pi} + (a+1) \log(a+1) - (a+1) - \frac{1}{2} \log(a+1),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}T(x) &< \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12}, \\ T(x) &> \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x - \frac{1}{2} \log x,\end{aligned}$$

ибо

$$a \leq x < a+1, \quad a \geq 1,$$

откуда, очевидно, вытекают условия

$$\begin{aligned}x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} &\geq a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a}, \\ x \log x - x - \frac{1}{2} \log x &\leq (a+1) \log(a+1) - (a+1) - \frac{1}{2} \log(a+1).\end{aligned}$$

Неравенства, которые мы доказали относительно $T(x)$, дают нам

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) < 2 \log \sqrt{2\pi} + \frac{2}{12} + \frac{31}{30} x \log x - x \log 30^{1/30} - \frac{31}{30} x + \\ + \log x - \frac{1}{2} \log 30,$$

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) > 2 \log \sqrt{2\pi} + \frac{31}{30} x \log x - x \log 30^{1/30} - \frac{31}{30} x - \\ - \log x + \frac{1}{2} \log 30,$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) + T\left(\frac{x}{3}\right) + T\left(\frac{x}{5}\right) < 3 \log \sqrt{2\pi} + \frac{3}{12} + \frac{31}{30} x \log x - \\ - x \log 2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5} - \frac{31}{30} x + \frac{3}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 30,$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) + T\left(\frac{x}{3}\right) + T\left(\frac{x}{5}\right) > 3 \log \sqrt{2\pi} + \frac{31}{30} x \log x - x \log 2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5} - \\ - \frac{31}{30} x - \frac{3}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 30.$$

Сочетая эти неравенства при помощи вычитания, а именно первое с последним и второе с третьим, мы найдем

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) < x \log \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} + \\ + \frac{5}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 1800\pi + \frac{2}{12},$$

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) > x \log \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} - \\ - \frac{5}{2} \log x + \frac{1}{2} \log \frac{450}{\pi} - \frac{3}{12},$$

что мы напомним в виде:

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) < Ax + \frac{5}{2} \log x - \\ - \frac{1}{2} \log 1800\pi + \frac{2}{12},$$

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) > Ax - \frac{5}{2} \log x + \\ + \frac{1}{2} \log \frac{450}{\pi} - \frac{3}{12},$$

полагая для краткости

$$A = \log \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0,92129202 \dots \quad (5)$$

Анализ, который мы применяли для доказательства этих неравенств, предполагает $x \geq 30$, потому что при определении $T(x)$ мы предполагали $x \geq 1$, а потом мы заменяли x через

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{5}, \quad \frac{x}{30}.$$

Но нетрудно убедиться, что мы будем иметь формулы, применимые для всех значений x , больших, чем 1, если заменим предшествующие неравенства следующими более простыми:

$$\begin{aligned} T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) &< Ax + \frac{5}{2} \log x, \\ T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) &> Ax - \frac{5}{2} \log x - 1, \end{aligned}$$

ибо, проверяя эти неравенства для значений x , лежащих в пределах 1 и 30, очень легко удостовериться, что они не представят никаких исключений.

§ 5. Сочетая эти неравенства с теми, которые были выведены выше по отношению $\psi(x)$ (§ 3), мы придем к таким двум формулам:

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2} \log x - 1, \quad \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2} \log x,$$

из которых первая дает низший предел для $\psi(x)$.

Вторая же формула послужит нам для нахождения другого предела для $\psi(x)$. Чтобы этого достигнуть, мы замечаем, что функция

$$f(x) = \frac{6}{5} Ax + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x$$

удовлетворяет уравнению

$$f(x) - f\left(\frac{x}{6}\right) = Ax + \frac{5}{2} \log x.$$

Но, вычитая это уравнение из неравенства

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2} \log x,$$

получаем

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f(x) + f\left(\frac{x}{6}\right) < 0,$$

или, что все равно,

$$\psi(x) - f(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f\left(\frac{x}{6}\right).$$

Переменяя последовательно в этой формуле x на $\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \dots, \frac{x}{6^m}$, мы найдем

$$\psi(x) - f(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f\left(\frac{x}{6}\right) < \psi\left(\frac{x}{6^2}\right) - f\left(\frac{x}{6^2}\right) < \dots < \psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) - f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right).$$

Если предположим теперь, что m — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $\frac{x}{6^m} \geq 1$, то количество $\frac{x}{6^{m+1}}$ будет лежать между 1 и $\frac{1}{6}$; исследуя же значения, которые получает $\psi(z) - f(z)$ в пределах $z = 1, z = \frac{1}{6}$, находим, что $\psi(z) = 0$ и $-f(z)$ остается меньше 1. Следовательно, $\psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) - f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) < 1$, и в силу предыдущих неравенств

$$\psi(x) - f(x) < 1.$$

Наконец, подставляя вместо $f(x)$ ее значение, мы будем иметь

$$\psi(x) < \frac{6}{5} Ax + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1.$$

На основании найденных нами формул нетрудно указать два предела, между которыми лежит величина θ , т. е. сумма логарифмов всех простых чисел, не превосходящих x .

Действительно, по формулам (3) находим

$$\psi(x) - \psi(x)^{1/2} = \theta(x) + \theta(x)^{1/3} + \theta(x)^{1/5} + \dots,$$

$\psi(x) - 2\psi(x)^{1/2} = \theta(x) - (\theta(x)^{1/2} - \theta(x)^{1/3}) - (\theta(x)^{1/4} - \theta(x)^{1/5}) - \dots$,
откуда следует, что

$$\theta(x) \leq \psi(x) - \psi(x)^{1/2}, \quad \theta(x) \geq \psi(x) - 2\psi(x)^{1/2}, \quad (6)$$

ибо члены

$$\theta(x)^{1/3}, \theta(x)^{1/5}, \dots, \theta(x)^{1/2} - \theta(x)^{1/3}, \theta(x)^{1/4} - \theta(x)^{1/5}, \dots,$$

очевидно, положительны или равны нулю.

Но мы нашли

$$\psi(x) < \frac{6}{5} Ax + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1,$$

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2} \log x - 1,$$

что дает

$$\psi(x)^{1/2} < \frac{6}{5} Ax^{1/2} + \frac{5}{16 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{8} \log x + 1,$$

$$\psi(x)^{1/2} > Ax^{1/2} - \frac{5}{4} \log x - 1,$$

и, следовательно,

$$\psi(x) - \psi(x)^{1/2} < \frac{6}{5} Ax - Ax^{1/2} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2,$$

$$\psi(x) - 2\psi(x)^{1/2} > Ax - \frac{12}{5} Ax^{1/2} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3.$$

А потому на основании (6)

$$\theta(x) < \frac{6}{5} Ax - Ax^{1/2} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2,$$

$$\theta(x) > Ax - \frac{12}{5} Ax^{1/2} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3. \quad (7)$$

Итак, мы пришли к заключению, что сумма логарифмов всех простых чисел, не превышающих x , содержится в пределах

$$\frac{6}{5} Ax - Ax^{1/2} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2,$$

$$Ax - \frac{12}{5} Ax^{1/2} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3.$$

§ 6. Посмотрим теперь, что можно извлечь из этих формул относительно числа простых чисел, лежащих между данными пределами. Пусть

L и l будут два упомянутых предела и предположим, что число простых чисел, больших, чем l , и не превышающих L , равно m ; сумма логарифмов этих чисел будет заключена между пределами $m \log l$ и $m \log L$. Следовательно, согласно нашим обозначениям, имеем

$$\Theta(L) - \Theta(l) > m \log l,$$

$$\Theta(L) - \Theta(l) < m \log L$$

и потому

$$m < \frac{\Theta(L) - \Theta(l)}{\log l}, \quad m > \frac{\Theta(L) - \Theta(l)}{\log L}.$$

На основании (7) мы находим, что значение $\Theta(L) - \Theta(l)$ меньше

$$A\left(\frac{6}{5}L - l\right) - A\left(L^{1/2} - \frac{12}{5}l^{1/2}\right) + \frac{5}{8 \log 6}(2 \log^2 L + \log^2 l) + \\ + \frac{5}{4}(2 \log L + 3 \log l) + 5$$

и больше

$$A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - A\left(\frac{12}{5}L^{1/2} - l^{1/2}\right) - \frac{5}{8 \log 6}(\log^2 L + 2 \log^2 l) - \\ - \frac{5}{4}(3 \log L + 2 \log l) - 5;$$

следовательно,

$$m < \frac{A\left(\frac{6}{5}L - l\right) - A\left(L^{1/2} - \frac{12}{5}l^{1/2}\right) + \frac{5}{8 \log 6}(2 \log^2 L + \log^2 l) + \frac{5}{4}(2 \log L + 3 \log l) + 5}{\log l}, \\ m > \frac{A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - A\left(\frac{12}{5}L^{1/2} - l^{1/2}\right) - \frac{5}{8 \log 6}(\log^2 L + 2 \log^2 l) - \frac{5}{4}(3 \log L + 2 \log l) - 5}{\log L}.$$

Таким образом мы нашли два предела, между которыми лежит число m , обозначающее число простых чисел, больших l и не превосходящих L .

Последняя из этих формул показывает нам, что в пределах l и L находится более чем k простых чисел, если k , L и l удовлетворяют условию

$$k < \frac{A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - A\left(\frac{12}{5}L^{1/2} - l^{1/2}\right) - \frac{5}{8 \log 6}(\log^2 L + 2 \log^2 l) - \frac{5}{4}(3 \log L + 2 \log l) - 5}{\log L},$$

и так как $l < L$, то этому условию удовлетворим, положив

$$k = \frac{A \left(L - \frac{6}{5} l \right) - \frac{12}{5} AL^{1/2} - \frac{5}{8 \log 6} (\log^2 L + 2 \log^2 L) - \frac{5}{4} (3 \log L + 2 \log L) - 5}{\log L}$$

и, следовательно, взяв

$$l = \frac{5}{6} L - 2L^{1/2} - \frac{25 \log^2 L}{16A \log 6} - \frac{5}{6A} \left(\frac{25}{4} + k \right) \log L - \frac{25}{6A}.$$

Итак, если возьмем для l это значение, то в пределах l и L найдется наверно более чем k простых чисел. К этому следует присоединить еще условие, что l и L не меньше 1, как мы предполагали выше относительно x .

В частном случае $k=0$ мы заключаем, что в пределах l и L существует по крайней мере одно простое число, если возьмем

$$l = \frac{5}{6} L - 2L^{1/2} - \frac{25 \log^2 L}{16A \log 6} - \frac{125 \log L}{24A} - \frac{25}{6A}.$$

Это приводит нас очень просто к строгому доказательству упомянутого постулата Бертрана. Нетрудно убедиться, что между пределами a и $2a-2$, в случае $a > 160$, заключаются следующие два предела:

$$l = \frac{5}{6} L - 2L^{1/2} - \frac{25 \log^2 L}{16A \log 6} - \frac{125 \log L}{24A} - \frac{25}{6A}, \quad L,$$

где L — прилично выбранное число. Действительно, для того чтобы оба эти предела лежали между a и $2a-2$, нужно удовлетворить таким условиям:

$$\begin{aligned} 2a - 2 &> L, \\ a &< \frac{5}{6} L - 2L^{1/2} - \frac{25 \log^2 L}{16A \log 6} - \frac{125 \log L}{24A} - \frac{25}{6A}. \end{aligned}$$

Но очевидно, что первое из них удовлетворяется при $L = 2a - 3$. Что же касается второго, то для $L = 2a - 3$ оно приводится к следующему:

$$a < \frac{5}{6} (2a - 3) - 2 \sqrt{2a - 3} - \frac{25 \log^2 (2a - 3)}{16A \log 6} - \frac{125 \log (2a - 3)}{24A} - \frac{25}{6A},$$

которое справедливо для всех значений a , превышающих наибольший корень уравнения

$$x = \frac{5}{6}(2x - 3) - 2\sqrt{2x - 3} - \frac{25 \log^2(2x - 3)}{16A \log 6} - \frac{125 \log(2x - 3)}{24A} - \frac{25}{6A},$$

а этот корень, как мы нашли, лежит между 159 и 160.

Следовательно, если только a превышает 160, можно включить между a и $2a - 2$ два новых предела

$$l = \frac{5}{6}L - 2L^{1/2} - \frac{25 \log^2 L}{16A \log 6} - \frac{125 \log L}{24A} - \frac{25}{6A}, \quad L,$$

и так как между этими последними содержится по крайней мере одно простое число, то можем с уверенностью отыскать такое простое число, которое превосходит a и остается меньшим $2a - 2$, что и доказывает постулат Бертрана для всех значений a , превышающих 160. Для значений же a , не превышающих 160, постулат проверяется непосредственно при помощи таблиц простых чисел.

§ 7. При помощи функции $\Theta(x)$, которая у нас обозначает сумму логарифмов всех простых чисел, не превышающих x , можно легко выразить сумму

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots + F(\rho) = U,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$ — простые числа, лежащие в данных пределах. Действительно, если $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$ заключаются в пределах l и L , то эта сумма может быть представлена таким образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta(l) - \Theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\Theta(l+1) - \Theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1) + \\ & + \frac{\Theta(l+2) - \Theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+2) + \dots + \frac{\Theta(L) - \Theta(L-1)}{\log L} F(L), \end{aligned}$$

ибо вообще функция $\frac{\Theta(x) - \Theta(x-1)}{\log x}$ для целого x приводится к 0, если x число сложное, и к 1, если x число простое. Следовательно,

$$\begin{aligned} U = & \frac{\Theta(l) - \Theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\Theta(l+1) - \Theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1) + \\ & + \frac{\Theta(l+2) - \Theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+2) + \dots + \frac{\Theta(L) - \Theta(L-1)}{\log L} F(L), \end{aligned}$$

или, что то же,

$$U = -\theta(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)} \right] \theta(l) + \\ + \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)} \right] \theta(l+1) + \dots + \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)} \right] \theta(L) + \\ + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)} \theta(L).$$

Но если предположим, что функция $\frac{F(x)}{\log x}$ остается постоянно положительною и убывающею в пределах $x=l-1$ и $x=L+1$, то знак при $\theta(l-1)$ в выражении U будет $-$, а знак при каждой из функций

$$\theta(l), \quad \theta(l+1), \quad \dots, \quad \theta(L)$$

будет $+$. Следовательно, полагая для сокращения

$$\theta_I(x) = \frac{6}{5} Ax - Ax^{1/2} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2, \quad (8)$$

$$\theta_{II}(x) = Ax - \frac{12}{5} Ax^{1/2} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3,$$

мы, на основании (7), будем иметь величину, меньшую U , если в выражении для U заменим

$$\theta(l-1) \text{ через } \theta_I(l-1),$$

и

$$\theta(l), \quad \theta(l+1), \quad \dots, \quad \theta(L) \text{ через } \theta_{II}(l), \quad \theta_{II}(l+1), \quad \dots, \quad \theta_{II}(L).$$

Напротив, заменяя $\theta(l-1)$ через $\theta_{II}(l-1)$, а $\theta(l), \theta(l+1), \dots, \theta(L)$ через $\theta_I(l), \theta_I(l+1), \dots, \theta_I(L)$, мы найдем величину, бо́льшую, чем U . Поэтому

$$U > -\theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)} \right] \theta_{II}(l) + \\ + \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)} \right] \theta_{II}(l+1) + \dots + \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)} \right] \theta_{II}(L) + \\ + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)} \theta_{II}(L),$$

$$U < -\theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)} \right] \theta_I(l) + \\ + \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)} \right] \theta_I(l+1) + \dots + \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)} \right] \theta_I(L) + \\ + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)} \theta_I(L),$$

и так как вторые части тождественны с суммами

$$\theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\theta_{II}(x) - \theta_{II}(x-1)}{\log x}, \\ \theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\theta_I(x) - \theta_I(x-1)}{\log x},$$

то мы заключим, что

$$U > \theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\theta_{II}(x) - \theta_{II}(x-1)}{\log x}, \\ U < \theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\theta_I(x) - \theta_I(x-1)}{\log x}. \quad (9)$$

На основании только что найденных нами формул нетрудно доказать такую теорему:

Теорема. Если функция $F(x)$ остается положительною по переходе x за некоторый предел, то сходимость ряда

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \dots$$

будет необходимым и достаточным условием для того, чтобы ряд

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + F(13) + \dots$$

был также сходящимся.

Доказательство. Пусть l будет предел для x , за которым $F(x)$ сохраняет знак $+$; пусть, далее, $\frac{F(x)}{\log x}$ представляет функцию убывающую, а $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$ — простые числа, заключенные между пределами

l и L . Полагая

$$S = F(2) + F(3) + F(5) + \dots + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots + F(\rho) = \\ = S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots + F(\rho),$$

мы заключим, на основании (9), что

$$S > S_0 + \Theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \Theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\Theta_{II}(x) - \Theta_{II}(x-1)}{\log x}, \\ S < S_0 + \Theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \Theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\Theta_I(x) - \Theta_I(x-1)}{\log x}.$$

Эти неравенства показывают, что в том случае, когда выражения

$$\sum_{x=l}^L F(x) \frac{\Theta_{II}(x) - \Theta_{II}(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\Theta_I(x) - \Theta_I(x-1)}{\log x}$$

для $L \rightarrow \infty$ остаются конечными, ряд

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \dots$$

будет сходящимся; напротив, если при $L \rightarrow \infty$ эти выражения бесконечно велики, то ряд

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \dots$$

расходящийся.

Подстановка, вместо $\Theta_I(x)$, $\Theta_{II}(x)$, их значений (8) обращает предыдущие выражения в такие:

$$\sum_{x=l}^L \left[A - \frac{12}{5} A (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) - \right. \\ \left. - \frac{5}{8 \log 6} (\log^2 x - \log^2 (x-1)) - \frac{15}{4} (\log x - \log (x-1)) \right] \frac{F(x)}{\log x}, \\ \sum_{x=l}^L \left[\frac{6}{5} A - A (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) + \right. \\ \left. + \frac{5}{4 \log 6} (\log^2 x - \log^2 (x-1)) + \frac{5}{2} (\log x - \log (x-1)) \right] \frac{F(x)}{\log x},$$

и так как функции

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1}, \quad \log^2 x - \log^2(x-1), \quad \log x - \log(x-1)$$

для очень больших значений x становятся бесконечно малыми, то мы заключаем, что в случае, когда

$$\sum_{x=l}^{\infty} \frac{F(x)}{\log x}$$

имеет конечную величину, выражения

$$\sum_{x=l}^L F(x) \frac{\Theta_I(x) - \Theta_I(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^L F(x) \frac{\Theta_{II}(x) - \Theta_{II}(x-1)}{\log x}$$

при $L \rightarrow \infty$ будут также конечные; напротив, они будут бесконечно велики для $L \rightarrow \infty$, если

$$\sum_{x=l}^L \frac{F(x)}{\log x}$$

с возрастанием L будет стремиться к бесконечности.

Но первый случай имеет всегда место, если ряд

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \dots$$

сходящийся; второй же случай предполагает расхожимость этого ряда, что и доказывает выше изложенную теорему.

Так, например, мы заключаем, что ряды

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \frac{1}{11 \log 11} + \dots,$$

$$\frac{1}{2 \log^2(\log 2)} + \frac{1}{3 \log^2(\log 3)} + \frac{1}{5 \log^2(\log 5)} + \frac{1}{7 \log^2(\log 7)} + \frac{1}{11 \log^2(\log 11)} + \dots$$

сходящиеся, между тем как ряды

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$$

$$\frac{1}{2 \log(\log 2)} + \frac{1}{3 \log(\log 3)} + \frac{1}{5 \log(\log 5)} + \frac{1}{7 \log(\log 7)} + \frac{1}{11 \log(\log 11)} + \dots$$

расходящиеся.

§ 8. Когда ряд

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \dots$$

сходящийся, то мы найдем его сумму с каким угодно приближением, вычисляя сумму его первых членов. Обозначая через S_0 сумму всех членов, предшествующих $F(\alpha)$, где α — наименьшее простое число, содержащееся в ряду

$$l, l+1, l+2, \dots,$$

а l — такое целое число, что для всех превосходящих его значений x функция $\frac{F(x)}{\log x}$ положительна и убывает, мы представим ряд

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \dots = S$$

в таком виде:

$$S = S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots = S_0 + U.$$

Поищем теперь пределы, между которыми лежит U , полагая в формулах (9) $L \rightarrow \infty$. Мы найдем таким образом

$$\begin{aligned} U &> \theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{\infty} \frac{\theta_{II}(x) - \theta_{II}(x-1)}{\log x} F(x), \\ U &< \theta_I(l-1) \frac{F(l)}{\log l} - \theta_{II}(l-1) \frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{\infty} \frac{\theta_I(x) - \theta_I(x-1)}{\log x} F(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Полусумма этих выражений даст приближенное значение для U , полуразность же их будет пределом погрешности этого значения. Последний предел будет тем меньше, чем значительнее число l , а следовательно, и число членов суммы S_0 .

Чтобы дать пример подобного вычисления, найдем приближенную величину ряда

$$S = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \frac{1}{11 \log 11} + \dots$$

Полагая

$$l = 100,$$

$$S_0 = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \frac{1}{11 \log 11} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{97 \log 97},$$

$$S = S_0 + U,$$

где U определено рядом

$$U = \frac{1}{101 \log 101} + \frac{1}{103 \log 103} + \frac{1}{107 \log 107} + \dots,$$

найдем по таблицам простых чисел

$$S_0 = 1,42,$$

а неравенства (10) для $F(x) = \frac{1}{x \log x}$, $l = 100$ дадут

$$U > \frac{\Theta_{II}(99)}{100 \cdot \log^2 100} - \frac{\Theta_I(99)}{100 \log^2 100} + \sum_{x=100}^{\infty} \frac{\Theta_{II}(x) - \Theta_{II}(x-1)}{x \log^2 x} > 0,14,$$

$$U < \frac{\Theta_I(99)}{100 \log^2 100} - \frac{\Theta_{II}(99)}{100 \log^2 100} + \sum_{x=100}^{\infty} \frac{\Theta_I(x) - \Theta_I(x-1)}{x \log^2 x} < 0,28.$$

Из этих неравенств мы заключаем, что величина U отличается от $\frac{0,28 + 0,14}{2} = 0,21$ на количество меньшее, чем $\frac{0,28 - 0,14}{2} = 0,07$.

Следовательно,

$$1,42 + 0,21 = 1,63$$

будет величина ряда

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \frac{1}{11 \log 11} + \dots$$

с точностью до 0,1.

§ 9. Число простых чисел, заключающихся в данных пределах, выводится как частный случай из величины ряда

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots + F(\rho),$$

которым мы занимались в предыдущих параграфах. Действительно, если положим

$$F(x) = 1,$$

то сумма

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots + F(\rho)$$

будет содержать столько единиц, сколько находится членов в ряду простых чисел

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho.$$

Следовательно, формулы (9), в случае $F(x) = 1$, определяют пределы, между которыми лежит число простых чисел, заключающихся между l и L . Эти пределы теснее тех, которые мы нашли в § 6 при посредстве неравенств, которым удовлетворяет функция $\Theta(x)$. В частном случае $l = 2$ мы находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{II}(1)}{\log 2} - \frac{\Theta_I(1)}{\log 2} + \sum_{x=2}^L \frac{\Theta_{II}(x) - \Theta_{II}(x-1)}{\log x}, \\ \frac{\Theta_I(1)}{\log 2} - \frac{\Theta_{II}(1)}{\log 2} + \sum_{x=2}^L \frac{\Theta_I(x) - \Theta_I(x-1)}{\log x} \end{aligned} \quad (11)$$

будут пределами для числа простых чисел, лежащих между 2 и L , или, что то же, для числа простых чисел, не превосходящих L . Вычисляя полусумму этих пределов (11), мы найдем приближенное значение для числа простых чисел, не превосходящих L . Погрешность же этого значения не может превосходить полуразности выражений (11). При помощи очень простых вычислений можно убедиться, что отношение полуразности выражений (11) к их полусумме при $L \rightarrow \infty$ равно $\frac{1}{11}$. Поэтому при очень больших значениях L это отношение будет ниже $\frac{1}{10}$, а следовательно, если вычислить по нашим формулам число простых чисел, не превосходящих очень большого данного предела, то погрешность будет меньше $\frac{1}{10}$ искомого числа.

ОБ ОДНОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ВОПРОСЕ

§ I

По данной степени приближения разности $y - ax$ к нулю наименьшие числа x , y , при которых такое приближение имеет место, легко определяются разложением количества a в непрерывную дробь. Вопрос более сложный, когда числа x , y пишутся из условия, чтобы разность $y - ax$ до желаемой степени приближения привелась бы к данной величине b , отличной от нуля, тоже может быть решен при помощи непрерывных дробей. Решением этого вопроса мы теперь и займемся.

Мы будем различать два видоизменения этого вопроса, смотря по тому, пишутся ли числа x , y так, чтобы разность $y - ax$ давала приближенную величину b больше настоящей или меньше настоящей. В первом случае разность $y - ax$ должна превосходить b , и если предположим, что степень приближения, которая имеется в виду, не допускает погрешности на одну целую, эта разность должна превосходить величину b менее чем на единицу. Следовательно, в этом случае количество

$$y - ax - b = y - (ax + b)$$

должно содержаться между 0 и 1, а для этого неизвестное число y должно равняться наибольшему из двух чисел, между которыми содержится величина $ax + b$. Изображая же вообще знаком EA целое число, меньшее A и ближайшее к A , мы замечаем, что количество $ax + b$ будет содержаться между такими двумя числами:

$$E(ax + b), \quad E(ax + b) + 1,$$

и, следовательно, в рассматриваемом нами случае неизвестное y будет

иметь такую величину:

$$y = E(ax + b) + 1.$$

При этой же величине y мы находим, что

$$y - (ax + b) = E(ax + b) + 1 - (ax + b).$$

Так определяется степень приближения разности $y - ax$ к b в том случае, когда эта разность дает величину больше b .

Рассматривая подобным образом случай, когда $y - ax$ дает приближенную величину b меньше настоящей, мы находим, что в этом случае y должен равняться меньшему из целых чисел

$$E(ax + b), \quad E(ax + b) + 1,$$

между которыми содержится количество $ax + b$, а потому

$$y = E(ax + b)$$

и

$$\begin{aligned} y - ax - b &= E(ax + b) - (ax + b) = \\ &= -[ax + b - E(ax + b)]. \end{aligned}$$

На основании выведенных нами выражений, определяющих степень приближения разности $y - ax$ к b в предположениях, что эта разность дает приближенную величину b больше или меньше настоящей, видно, что вопрос наш приводится к определению наименьшего значения целого числа x , при котором выражение

$$E(ax + b) + 1 - (ax + b)$$

или выражение

$$ax + b - E(ax + b)$$

имеет величину, не превосходящую данного предела, определяющего степень приближения разности $y - ax$ к количеству b .

§ II

Приступая к решению этого вопроса, полагаем для сокращения

$$\begin{aligned} E(ax + b) + 1 - (ax + b) &= \varphi(x), \\ ax + b - E(ax + b) &= \psi(x); \end{aligned} \tag{1}$$

выписываем значения

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots, \\ \psi(0), \psi(1), \psi(2), \psi(3), \dots$$

и в каждом из этих рядов выкидываем все члены, которые имеют себе равные или меньшие между членами предшествующими.

Если через

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_s), \varphi(N_{s+1}), \dots, \\ \psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_r), \psi(M_{r+1}), \dots$$

обозначим члены, оставшиеся после такого сокращения рядов, нетрудно заметить, что вообще член

$$\varphi(N_s)$$

будет давать самую малую величину, какую только может иметь выражение $\varphi(x)$ при $x < N_{s+1}$. В самом деле, по сказанному нами относительно сокращения членов в ряду

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots,$$

видно, что член $\varphi(N_s)$ может остаться только в том случае, когда

$$\begin{aligned} \varphi(0) &> \varphi(N_s), \\ \varphi(1) &> \varphi(N_s), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi(N_s - 1) &> \varphi(N_s). \end{aligned}$$

С другой стороны, чтобы ни один из членов

$$\varphi(N_s + 1), \varphi(N_s + 2), \dots, \varphi(N_{s+1} - 1)$$

при таком сокращении не мог остаться в этом ряду, наименьший из них не должен быть меньше $\varphi(N_s)$, наименьшего из членов

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N_s),$$

ибо иначе такой член был бы меньше всех ему предшествующих и, следовательно, не был бы исключен из ряда

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots$$

То же находим относительно членов ряда

$$\psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_\rho), \psi(M_{\rho+1}), \dots,$$

где вообще член

$$\psi(M_\rho)$$

будет давать самую малую величину, какую может иметь выражение $\psi(x)$ от $x=0$ до $x=M_{\rho+1}-1$.

Из этого видно, что ряды

$$\begin{aligned} \varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_\sigma), \varphi(N_{\sigma+1}), \dots, \\ \psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_\rho), \psi(M_{\rho+1}), \dots, \end{aligned}$$

выведенные, по выше сказанному, сокращением рядов

$$\begin{aligned} \varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots, \\ \psi(0), \psi(1), \psi(2), \psi(3), \dots, \end{aligned}$$

будут показывать, какой степени малости достигают выражения $\varphi(x)$, $\psi(x)$ при различных величинах x , и через это они будут служить для решения нашей задачи. Так, если в ряду

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_{\sigma-1}), \varphi(N_\sigma), \dots$$

первый член, не превосходящий какого-либо предела ε , есть $\varphi(N_\sigma)$, то наименьшее число x , при котором разность $y - ax$, оставаясь больше b , дает величину b верно до ε , будет $x = N_\sigma$.

То же, в предположении $y - ax$ меньше b , получится при помощи ряда

$$\psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_\rho), \psi(M_{\rho+1}), \dots$$

Таким образом, решение нашей задачи сводится на составление рядов

$$\begin{aligned} \varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_\sigma), \varphi(N_{\sigma+1}), \dots, \\ \psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_\rho), \psi(M_{\rho+1}), \dots \end{aligned}$$

Члены этих рядов, как мы увидим, легко вычисляются по числам x , y , с которыми разность $y - ax$ наиболее подходит к нулю и которые, как известно, при помощи непрерывных дробей определяются таким образом:

Разлагая a в непрерывную дробь

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}},$$

находят подходящие дроби

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$$

и промежуточные дроби

$$\begin{aligned} & \frac{P'_1}{Q'_1}, \frac{P''_1}{Q''_1}, \dots, \frac{P_1^{(q_1-1)}}{Q_1^{(q_1-1)}}, \\ & \frac{P'_2}{Q'_2}, \frac{P''_2}{Q''_2}, \dots, \frac{P_2^{(q_2-1)}}{Q_2^{(q_2-1)}}, \\ & \dots \end{aligned}$$

где

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1},$$

и, вообще,

$$\frac{P_{e+1}}{Q_{e+1}} = \frac{P_e q_e + P_{e-1}}{Q_e q_e + Q_{e-1}}, \quad \frac{P_e^{(f)}}{Q_e^{(f)}} = \frac{P_e f + P_{e-1}}{Q_e f + Q_{e-1}}.$$

Числа x , y , при которых разность $y - ax$, оставаясь положительною, наиболее подходит к нулю, суть

$$\begin{aligned} x &= Q'_1, Q''_1, \dots, Q_1^{(q_1-1)}, Q_2, Q'_3, Q''_3, \dots, \\ y &= P'_1, P''_1, \dots, P_1^{(q_1-1)}, P_2, P'_3, P''_3, \dots \end{aligned}$$

Числа x , y , при которых разность $y - ax$, оставаясь отрицательною, наиболее подходит к нулю, суть

$$\begin{aligned} x &= Q_1, Q'_2, Q''_2, \dots, Q_2^{(q_2-1)}, Q_3, Q'_4, \dots, \\ y &= P_1, P'_2, P''_2, \dots, P_2^{(q_2-1)}, P_3, P'_4, \dots \end{aligned}$$

Эти системы значений x , y , как известно, имеют то свойство, что каждая из них доводит числовую величину разности $y - ax$ до той степени малости, какой можно достигнуть в предположении $y - ax > 0$ или $y - ax < 0$, оставляя x ту же величину или принимая за x меньшее

число. Так, например, при $x = Q'_1$, $y = P'_1$, разность $y - ax$ получает наименьшую величину, возможную при $x \leq Q'_1$ и $y - ax > 0$, и т. д.

На основании этого, изображая через

$$\varphi_0(1), \varphi_0(2), \varphi_0(3), \dots$$

наименьшие величины, которые имеет разность $y - ax$ при $x = 1, 2, 3, \dots$ и $y - ax > 0$, мы заключаем, что в ряду

$$\varphi_0(1), \varphi_0(2), \varphi_0(3), \dots$$

каждый из членов

$$\varphi_0(Q'_1), \varphi_0(Q''_1), \dots, \varphi_0(Q_1^{(q_1-1)}), \varphi_0(Q_2), \varphi_0(Q'_3), \dots$$

будет меньше всех членов, ему предшествующих. Точно так же, изображая через

$$-\psi_0(1), -\psi_0(2), -\psi_0(3), \dots$$

значения разности $y - ax$, наиболее подходящие к 0 при

$$x = 1, 2, 3, \dots$$

и

$$y - ax < 0,$$

мы замечаем, что каждый из членов

$$\psi_0(Q_1), \psi_0(Q'_2), \psi_0(Q''_2), \dots, \psi_0(Q_2^{(q_2-1)}), \psi_0(Q_3), \dots$$

в ряду

$$\psi_0(1), \psi_0(2), \psi_0(3), \dots$$

будет меньше всех членов, ему предшествующих.

Из этого видно, что ряды

$$\begin{aligned} &\varphi_0(Q'_1), \varphi_0(Q''_1), \dots, \varphi_0(Q_1^{(q_1-1)}), \varphi_0(Q_2), \varphi_0(Q'_3), \dots, \\ &\psi_0(Q_1), \psi_0(Q'_2), \psi_0(Q''_2), \dots, \psi_0(Q_2^{(q_2-1)}), \psi_0(Q_3), \dots \end{aligned}$$

по отношению к рядам

$$\begin{aligned} &\varphi_0(1), \varphi_0(2), \varphi_0(3), \dots, \\ &\psi_0(1), \psi_0(2), \psi_0(3), \dots \end{aligned}$$

играют ту же роль, как выше показанные ряды

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_\sigma), \varphi(N_{\sigma+1}), \dots, \\ \psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_\rho), \psi(M_{\rho+1}), \dots$$

относительно рядов

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \\ \psi(0), \psi(1), \psi(2), \dots$$

Для сокращения мы будем изображать числа

$$Q'_1, Q''_1, \dots, Q_1^{(q_1-1)}, Q_2, Q'_3, \dots, \\ Q_1, Q'_1, Q''_2, \dots, Q_2^{(q_2-1)}, Q_3, \dots$$

через

$$n_0, n_1, n_2, \dots, \\ m_0, m_1, m_2, \dots,$$

вследствие чего ряды

$$\varphi_0(Q'_1), \varphi_0(Q''_1), \dots, \varphi_0(Q_1^{(q_1-1)}), \varphi_0(Q_2), \varphi_0(Q'_3), \dots, \\ \psi_0(Q_1), \psi_0(Q'_2), \psi_0(Q''_2), \dots, \psi_0(Q_2^{(q_2-1)}), \psi_0(Q_3), \dots$$

представляются так:

$$\varphi_0(n_0), \varphi_0(n_1), \varphi_0(n_2), \dots, \\ \psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots$$

Что касается выражений

$$\varphi_0(x), \psi_0(x),$$

то, как нетрудно убедиться, они получаются из выражений

$$\varphi(x) = E(ax + b) + 1 - (ax + b), \\ \psi(x) = ax + b - E(ax + b),$$

когда количество b полагается равным нулю. В самом деле, для того чтобы разность $y - ax$ наиболее подходила к нулю при данном x , неизвестное число y должно наиболее подходить к количеству ax и, следовательно, должно равняться одному из целых чисел, между которыми содержится количество ax . А так как эти числа суть

$$E(ax) + 1, \quad E(ax),$$

то значения $y - ax$, наиболее подходящие к нулю, представятся следующим образом:

$$E(ax) + 1 - ax, \quad E(ax) - ax.$$

Замечая же, что первое из них есть величина положительная, второе — отрицательная, мы заключаем, что по нашему знакоположению первое представится через $\varphi_0(x)$, второе через $\psi_0(x)$, и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= E(ax) + 1 - ax, \\ \psi_0(x) &= ax - E(ax). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

§ III

Приступая к определению членов

$$\begin{aligned} &\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_s), \varphi(N_{s+1}), \dots, \\ &\psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots, \psi(M_r), \psi(M_{r+1}), \dots, \end{aligned}$$

мы, по (1), ищем выражение разности

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L),$$

где L — какое-нибудь положительное число; при этом мы находим

$$\begin{aligned} \varphi(N_s) - \varphi(N_s + L) &= E(aN_s + b) + 1 - (aN_s + b) \\ &\quad - E(aN_s + aL + b) - 1 + aN_s + aL + b, \end{aligned}$$

что, по приведении, нам дает

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L) = aL - [E(aN_s + aL + b) - E(aN_s + b)].$$

Но, как нетрудно заметить, разность

$$EA - EB$$

при $A > B$ приводится или к

$$E(A - B),$$

или к

$$E(A - B) + 1,$$

что, очевидно, можем представить одним равенством

$$EA - EB = E(A - B) + \frac{1 \pm 1}{2},$$

предполагая, что в выражении

$$\frac{1 \pm 1}{2}$$

выбирается один из двух знаков $\pm$ надлежащим образом.

Вследствие этого выше найденное выражение разности

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L)$$

представляется так:

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L) = aL - E(aL) - \frac{1 \pm 1}{2};$$

замечая же, по (2), что

$$aL - E(aL) = \psi_0(L),$$

мы из этого равенства выводим, что

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L) = \psi_0(L) - \frac{1 \pm 1}{2},$$

причем в выражении $\frac{1 \pm 1}{2}$ должен быть взят один из двух знаков $\pm$.

В частном случае, когда

$$L = N_{s+1} - N_s,$$

это равенство нам дает

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_{s+1}) = \psi_0(N_{s+1} - N_s) - \frac{1 \pm 1}{2}.$$

Чтобы решить, какой из двух знаков $\pm$ должен быть оставлен в этой формуле, мы замечаем, что первая часть ее представляет величину положительную, так как в ряду

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_s), \varphi(N_{s+1}), \dots$$

члены идут уменьшаясь; во второй же части первый член $\psi_0(N_{s+1} - N_s)$, по (2), меньше единицы, а потому эта формула может иметь место только при

$$\frac{1 \pm 1}{2} < 1,$$

для чего, очевидно, в выражении $\frac{1 \pm 1}{2}$ должно взять нижний знак.

Принимая же этот знак, мы по выше показанной формуле находим

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_{s+1}) = \psi_0(N_{s+1} - N_s), \quad (3)$$

откуда видно, что

$$\psi_0(N_{s+1} - N_s) \leq \varphi(N_s). \quad (4)$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что при

$$L < N_{s+1} - N_s$$

всегда будет иметь место такое неравенство:

$$\psi_0(L) > \varphi(N_s).$$

Чтобы доказать это, мы положим, что L есть число, для которого такое неравенство не имеет места, и покажем, что для такого числа неравенство

$$L < N_{s+1} - N_s$$

невозможно.

В самом деле, если

$$\psi_0(L) \text{ не } > \varphi(N_s),$$

выше найденная формула

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L) = \psi_0(L) - \frac{1 \pm 1}{2}$$

может удовлетворяться только при

$$\varphi(N_s + L) \geq \frac{1 \pm 1}{2}.$$

А так как выражение $\varphi(N_s + L)$, по § II, меньше единицы, то это может иметь место только при нижнем знаке $\pm$. С этим же знаком выше приведенная формула дает

$$\varphi(N_s) - \varphi(N_s + L) = \psi_0(L),$$

что предполагает

$$\varphi(N_s + L) < \varphi(N_s).$$

Но в предыдущем параграфе мы видели, что ни одна из величин

$$\varphi(N_{\sigma} + 1), \varphi(N_{\sigma} + 2), \dots, \varphi(N_{\sigma+1} - 1)$$

не может быть меньше $\varphi(N_{\sigma})$, а потому это неравенство невозможно, если сумма $N_{\sigma} + L$ приводится к одному из чисел

$$N_{\sigma} + 1, N_{\sigma} + 2, \dots, N_{\sigma+1} - 1,$$

или, что одно и то же, если

$$L < N_{\sigma+1} - N_{\sigma}.$$

Следовательно, при всех величинах L , меньших разности $N_{\sigma+1} - N_{\sigma}$, будем иметь

$$\psi_0(L) > \varphi(N_{\sigma}),$$

а это, по (4), предполагает

$$\psi_0(L) > \psi_0(N_{\sigma+1} - N_{\sigma}). \quad (5)$$

Из этого видно, что в ряду

$$\psi_0(1), \psi_0(2), \psi_0(3), \dots, \psi_0(N_{\sigma+1} - N_{\sigma}), \dots$$

член

$$\psi_0(N_{\sigma+1} - N_{\sigma})$$

будет меньше всех, ему предшествующих, и, следовательно, по выше сказанному (§ II) о составе ряда

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots$$

он будет заключаться в этом последнем.

Изображая через

$$\psi_0(m_{\nu\sigma})$$

тот из членов ряда

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots,$$

который равняется

$$\psi_0(N_{\sigma+1} - N_{\sigma}),$$

мы находим, что

$$N_{\sigma+1} - N_{\sigma} = m_{\mu\sigma},$$

и, по (3),

$$\varphi(N_\sigma) - \varphi(N_{\sigma+1}) = \psi_0(m_{\mu_\sigma}),$$

откуда для определения $N_{\sigma+1}$ и $\varphi(N_{\sigma+1})$ по N_σ и $\varphi(N_\sigma)$ получаются такие формулы:

$$\begin{aligned} N_{\sigma+1} &= N_\sigma + m_{\mu_\sigma}, \\ \varphi(N_{\sigma+1}) &= \varphi(N_\sigma) - \psi_0(m_{\mu_\sigma}). \end{aligned} \quad (6)$$

Что касается выбора в ряду

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots$$

члена

$$\psi_0(m_{\mu_\sigma}),$$

служашего, по (6), для определения величин $N_{\sigma+1}$ и $\varphi(N_{\sigma+1})$ по N_σ и $\varphi(N_\sigma)$, то это легко сделать. Так как, по (4), член

$$\psi_0(N_{\sigma+1} - N_\sigma) = \psi_0(m_{\mu_\sigma})$$

не превосходит величины

$$\varphi(N_\sigma),$$

все же члены ряда

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots,$$

ему предшествующие, по (5), будут больше $\varphi(N_\sigma)$, то ясно, что в этом ряду член

$$\psi_0(m_{\mu_\sigma})$$

будет первый и, следовательно, наибольший из членов, не превосходящих величины $\varphi(N_\sigma)$.

Рассматривая таким же образом разность

$$\psi(M_\rho) - \psi(M_\rho + L)$$

при $L = M_{\rho+1} - M_\rho$ и при $L < M_{\rho+1} - M_\rho$, мы находим, что

$$\begin{aligned} M_{\rho+1} &= M_\rho + n_{\nu_\rho}, \\ \psi(M_{\rho+1}) &= \psi(M_\rho) - \varphi_0(n_{\nu_\rho}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varphi_0(n_{\nu})$ есть наибольший из членов

$$\varphi_0(n_0), \varphi_0(n_1), \varphi_0(n_2), \dots,$$

не превосходящих величины $\psi(M_{\rho})$.

§ IV

На основании показанного в предыдущем параграфе все члены рядов

$$\begin{aligned} \varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \\ \psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots \end{aligned}$$

легко получаются по первым $\varphi(N_0)$, $\psi(M_0)$. Так, делая в формулах (6)

$$\sigma = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1,$$

мы находим

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 + m_{\mu_0}, & \varphi(N_1) &= \varphi(N_0) - \psi_0(m_{\mu_0}), \\ N_2 &= N_1 + m_{\mu_1}, & \varphi(N_2) &= \varphi(N_1) - \psi_0(m_{\mu_1}), \\ &\dots & & \dots \\ N_{\lambda} &= N_{\lambda-1} + m_{\mu_{\lambda-1}}, & \varphi(N_{\lambda}) &= \varphi(N_{\lambda-1}) - \psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}), \end{aligned}$$

что, по исключении $N_1, N_2, \dots, N_{\lambda-1}$, $\varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots, \varphi(N_{\lambda-1})$, нам дает

$$\begin{aligned} N_{\lambda} &= N_0 + m_{\mu_0} + m_{\mu_1} + \dots + m_{\mu_{\lambda-1}}, \\ \varphi(N_{\lambda}) &= \varphi(N_0) - \psi_0(m_{\mu_0}) - \psi_0(m_{\mu_1}) - \dots - \psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}), \end{aligned} \quad (8)$$

откуда получаем

$$\varphi(N_0) = \psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \dots + \psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}) + \varphi(N_{\lambda}). \quad (9)$$

По сказанному в § III, член $\psi_0(m_{\mu_0})$ будет наибольший из членов $\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots$, не превосходящий $\varphi(N_0)$, член $\psi_0(m_{\mu_1})$ будет наибольший из этих членов, не превосходящий $\varphi(N_1) = \varphi(N_0) - \psi_0(m_{\mu_0})$, член $\psi_0(m_{\mu_2})$ будет наибольший из этих членов, не превосходящий $\varphi(N_2) = \varphi(N_1) - \psi_0(m_{\mu_1}) = \varphi(N_0) - \psi_0(m_{\mu_0}) - \psi_0(m_{\mu_1})$, и т. д. Из этого видно, что ряд

$$\psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \dots + \psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

который, по (9), дает величину $\varphi(N_0)$ верно до $\varphi(N_\lambda)$, получается, когда при разложении количества $\varphi(N_0)$ на сумму членов вида

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots$$

постепенно отделяют от величины $\varphi(N_0)$ по возможности большие из количеств

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots,$$

или, что одно и то же, когда при разложении $\varphi(N_0)$ в ряд

$$\psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \dots + \psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}) + \varphi(N_\lambda)$$

имеется в виду, чтобы он, остановленный на каком-либо члене, давал величину меньше $\varphi(N_0)$ и по возможности близкую к $\varphi(N_0)$.

Полагая, что такое разложение количества $\varphi(N_0)$, будучи продолжено беспрестанно, представляет ряд

$$\psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \psi_0(m_{\mu_2}) + \dots,$$

мы, на основании выше сказанного, заключаем, что этот ряд, более или менее продолженный, будет, по (8), служить для определения различных членов ряда

$$\varphi(N_1), \varphi(N_2), \varphi(N_3), \dots$$

и чисел

$$N_1, N_2, N_3, \dots,$$

соответствующих этим членам. Так как, по (9), погрешность в величине $\varphi(N_0)$, получаемой из ряда

$$\psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \psi_0(m_{\mu_2}) + \dots,$$

остановленного на члене

$$\psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

равняется значению $\varphi(N_\lambda)$, то для определения первого члена в ряду

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \varphi(N_3), \dots,$$

не превосходящего данного предела ε (как это требуется при решении нашей задачи), ряд

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \psi_0(m_{p_2}) + \dots$$

должен быть продолжен до тех пор, пока он не даст величину $\varphi(N_0)$ верно до ε , и если для этого окажется нужным удержать в нем λ членов

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \dots + \psi_0(m_{p_{\lambda-1}}),$$

первый член в ряду

$$\varphi(N_1), \varphi(N_2), \varphi(N_3) \dots,$$

не превосходящий предела ε , по (8), представится так:

$$\varphi(N) = \varphi(N_0) - \psi_0(m_{p_0}) - \psi_0(m_{p_1}) - \dots - \psi_0(m_{p_{\lambda-1}}),$$

и число N , ему соответствующее, будет иметь такую величину:

$$N = N_0 + m_{p_0} + m_{p_1} + \dots + m_{p_{\lambda-1}}.$$

В этих выражениях величины $\varphi(N)$ и числа N могут быть равные члены; чтобы найти, к чему приведут эти выражения по соединении в них членов равных, мы замечаем, что в ряду

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \psi_0(m_{p_2}) + \dots,$$

по выше сказанному об его составе, каждый член будет не менее следующего за ним, и он вообще приведет к

$$k_0\psi_0(m_0) + k_1\psi_0(m_1) + k_2\psi_0(m_2) + \dots + k_i\psi_0(m_i) + \dots,$$

если мы в нем соединим равные члены, изображая через

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$$

число членов, равных

$$\psi_0(m_0), \psi_0(m_1), \psi_0(m_2), \dots, \psi_0(m_i), \dots$$

Сравнивая же ряд

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \psi_0(m_{p_2}) + \dots,$$

продолженный беспрестанно, с рядом

$$\phi_0(m_{\mu_0}) + \phi_0(m_{\mu_1}) + \dots + \phi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

остановленным на члене $\phi_0(m_{\mu_{\lambda-1}})$, мы замечаем, что здесь и там все члены

$$\phi_0(m_0), \phi_0(m_1), \phi_0(m_2), \dots$$

до членов, равных

$$\phi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

будут содержаться поровну. Членов же, равных

$$\phi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

в ряду

$$\phi_0(m_{\mu_0}) + \phi_0(m_{\mu_1}) + \phi_0(m_{\mu_2}) + \dots,$$

продолженном беспрестанно, будет вообще больше на число l , если через l означим, сколько в ряду

$$m_{\mu_0}, m_{\mu_1}, m_{\mu_2}, \dots$$

находится членов, следующих за членом $m_{\mu_{\lambda-1}}$ и имеющих одну с ним величину.

Вследствие этого ряд

$$\phi_0(m_{\mu_0}) + \phi_0(m_{\mu_1}) + \phi_0(m_{\mu_2}) + \dots,$$

остановленный на члене

$$\phi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

приведется к сумме

$$k_0\phi_0(m_0) + k_1\phi_0(m_1) + \dots + (k_{\mu_{\lambda-1}} - l)\phi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}),$$

и, соответственно с этим, сумма чисел

$$m_{\mu_0} + m_{\mu_1} + \dots + m_{\mu_{\lambda-1}},$$

по соединении в ней членов равных, представится так:

$$k_0m_0 + k_1m_1 + \dots + (k_{\mu_{\lambda-1}} - l)m_{\mu_{\lambda-1}}.$$

Внося же эти величины сумм

$$\begin{aligned} & \psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \dots + \psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}), \\ & m_{\mu_0} + m_{\mu_1} + \dots + m_{\mu_{\lambda-1}} \end{aligned}$$

в выше найденные выражения величины $\varphi(N)$ и числа N , мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi(N) &= \varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) - k_1\psi_0(m_1) - \dots - (k_{\mu_{\lambda-1}} - l)\psi_0(m_{\mu_{\lambda-1}}), \\ N &= N_0 + k_0m_0 + k_1m_1 + \dots + (k_{\mu_{\lambda-1}} - l)m_{\mu_{\lambda-1}}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Здесь l , как видно по значению этого числа, будет иметь одну из таких величин:

$$0, 1, 2, \dots, k_{\mu_{\lambda-1}} - 1;$$

числа же

$$k_0, k_1, k_2, \dots,$$

как нетрудно показать, получатся в частном при делении $\varphi(N_0)$ на $\psi_0(m_0)$, первого остатка на $\psi_0(m_1)$, второго остатка на $\psi_0(m_2)$ и т. д. В самом деле, по выше сказанному относительно рядов

$$\begin{aligned} & \psi_0(m_{\mu_0}) + \psi_0(m_{\mu_1}) + \psi_0(m_{\mu_2}) + \dots, \\ & k_0\psi_0(m_0) + k_1\psi_0(m_1) + k_2\psi_0(m_2) + \dots \end{aligned}$$

видно, что здесь после k_0 членов, равных $\psi_0(m_0)$, k_1 членов, равных $\psi_0(m_1)$, $\dots$, k_i членов, равных $\psi_0(m_i)$, не будет больше членов, равных $\psi_0(m_i)$, только в том случае, когда

$$\varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) - k_1\psi_0(m_1) - \dots - k_i\psi_0(m_i) < \psi_0(m_i);$$

а так как эти ряды, остановленные на каком-либо члене, дают величину меньше $\varphi(N_0)$, то

$$\varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) - k_1\psi_0(m_1) - \dots - k_i\psi_0(m_i) > 0.$$

Эти же неравенства при

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

нам дают

$$\begin{aligned} & \varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) < \psi_0(m_0) \text{ и } > 0, \\ & \varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) - k_1\psi_0(m_1) < \psi_0(m_1) \text{ и } > 0, \\ & \varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) - k_1\psi_0(m_1) - k_2\psi_0(m_2) < \psi_0(m_2) \text{ и } > 0 \end{aligned}$$

и т. д. Откуда ясно, что k_0 есть частное от деления $\varphi(N_0)$ на $\psi_0(m_0)$, и при этом делении остаток равен $\varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0)$, что k_1 есть частное от деления этого остатка на $\psi_0(m_1)$ и $\varphi(N_0) - k_0\psi_0(m_0) - k_1\psi_0(m_1)$ есть остаток этого деления, что k_2 есть частное от деления этого остатка на $\psi_0(m_2)$ и т. д.

Что касается выбора члена

$$\psi_0(m_{p_{\lambda-1}})$$

и числа l , при которых формулы (10) дают первый член ряда

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots,$$

не превосходящий данного предела ε , то его легко сделать. Мы видели, что выражение

$$k_0\psi_0(m_0) + k_1\psi_0(m_1) + \dots + (k_{p_{\lambda-1}} - l)\psi_0(m_{p_{\lambda-1}})$$

получается из суммы

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \dots + \psi_0(m_{p_{\lambda-1}})$$

через соединение в ней членов равных; сумма же эта представляет ряд

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \psi_0(m_{p_2}) + \dots,$$

остановленный на первом члене, с которым он дает величину $\varphi(N_0)$ верно до ε . Откуда ясно, что член

$$\psi_0(m_{p_{\lambda-1}})$$

в ряду

$$\psi_0(m_{p_0}) + \psi_0(m_{p_1}) + \psi_0(m_{p_2}) + \dots,$$

и, следовательно, член

$$k_{p_{\lambda-1}}\psi_0(m_{p_{\lambda-1}})$$

в ряду

$$k_0\psi_0(m_0) + k_1\psi_0(m_1) + k_2\psi_0(m_2) + \dots$$

представляют первые члены, с которыми эти ряды дают величину $\varphi(N_0)$

верно до ε , и что l есть наибольшее из чисел

$$0, 1, 2, \dots, k_{\nu_{\lambda}-1} - 1,$$

с которым выражение

$$k_0 \psi_0(m_0) + k_1 \psi_0(m_1) + \dots + (k_{\nu_{\lambda}-1} - l) \psi_0(m_{\nu_{\lambda}-1})$$

дает величину $\varphi(N_0)$ верно до ε .

Рассматривая подобным образом определение членов

$$\psi(M_1), \psi(M_2), \psi(M_3), \dots,$$

мы находим, что они определяются разложением величины $\psi(M_0)$ в ряд

$$k_0 \varphi_0(n_0) + k_1 \varphi_0(n_1) + k_2 \varphi_0(n_2) + \dots,$$

где $k_0, k_1, k_2, \dots$ получаются в частном при делении $\psi(M_0)$ на $\varphi_0(n_0)$, первого остатка на $\varphi_0(n_1)$, второго остатка на $\varphi_0(n_2)$ и т. д.

Если этот ряд для выражения величины $\psi(M_0)$ верно до ε должен быть остановлен на члене

$$k_{\nu_{\rho}-1} \varphi_0(n_{\nu_{\rho}-1})$$

и l есть наибольшее из чисел

$$0, 1, 2, \dots, k_{\nu_{\rho}-1} - l,$$

с которым сумма

$$k_0 \varphi_0(n_0) + k_1 \varphi_0(n_1) + \dots + (k_{\nu_{\rho}-1} - l) \varphi_0(n_{\nu_{\rho}-1})$$

дает $\psi(M_0)$ верно до ε , то для определения первого члена в ряду

$$\psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots,$$

не превосходящего предела ε , и числа M , ему соответствующего, получаются такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \psi(M) &= \psi(M_0) - k_0 \varphi_0(n_0) - k_1 \varphi_0(n_1) - \dots - (k_{\nu_{\rho}-1} - l) \varphi_0(n_{\nu_{\rho}-1}), \\ M &= M_0 + k_0 n_0 + k_1 n_1 + \dots + (k_{\nu_{\rho}-1} - l) n_{\nu_{\rho}-1}. \end{aligned} \right\} (11)$$

Этим вопрос наш вполне решается; остается только показать вычисления различных величин, входящих в формулы (10) и (11).

§ V

По § II ряд

$$n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$$

будет состоять из чисел

$$Q'_1, Q''_1, \dots, Q_1^{(q_1-1)}, Q_2, Q'_3, \dots,$$

знаменателей тех подходящих и промежуточных дробей количества α , которых величина больше α ; ряд же

$$\varphi_0(n_0), \varphi_0(n_1), \varphi_0(n_2), \dots$$

будет состоять из значения разности $y - \alpha x$ при x, y , равных членам этих дробей, а именно при

$$\begin{aligned} x &= Q'_1, Q''_1, \dots, Q_1^{(q_1-1)}, Q_2, Q'_3, \dots, \\ y &= P_1, P'_1, \dots, P_1^{(q_1-1)}, P_2, P'_3, \dots \end{aligned}$$

Полагая для сокращения

$$\begin{aligned} P_e - \alpha Q_e &= (-1)^e D_e, \\ P_e^{(\eta)} - \alpha Q_e^{(\eta)} &= -(-1)^e D_e^{(\eta)} \end{aligned} \quad (12)$$

(количества D_e и $D_e^{(\eta)}$, по свойству дробей, подходящих и промежуточных, будут всегда положительные), мы, по выше сказанному, заключаем, что ряд

$$\varphi_0(n_0), \varphi_0(n_1), \varphi_0(n_2), \dots$$

состоит из таких членов:

$$D'_1, D''_1, \dots, D_1^{(q_1-1)}, D_2, D'_3, \dots,$$

где вообще

$$D_e^{(\eta)}$$

представляет значение выражения

$$\varphi_0(Q_e^{(\eta)}),$$

или, что одно и то же, величину разности $y - ax$ при

$$x = Q_e^{(\eta)}, \quad y = P_e^{(\eta)}.$$

По равенствам

$$\begin{aligned} P_{e+1} &= P_e q_e + P_{e-1}, & P_e^{(\eta)} &= P_e f + P_{e-1}, \\ Q_{e+1} &= Q_e q_e + Q_{e-1}, & Q_e^{(\eta)} &= Q_e f + Q_{e-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

связывающим между собою члены подходящих и промежуточных дробей, мы находим, что между величинами

$$D_0, D_1, D'_1, D''_1, \dots, D_1^{(q_1-1)}, D_2, \dots$$

существует такая связь:

$$\begin{aligned} D_{e+1} &= D_{e-1} - q_e D_e, \\ D_e^{(\eta)} &= D_{e-1} - f D_e. \end{aligned} \quad (14)$$

Делая в первом из этих равенств $e=1$ и замечая, что

$$D_0 = P_0 - a Q_0 = 1 - a \cdot 0 = 1,$$

мы находим

$$D_2 = 1 - q_1 D_1,$$

откуда получаем

$$D_2 + q_1 D_1 = 1. \quad (15)$$

Равенства же (14), по исключении из них D_{e-1} , нам дают

$$D_e^{(\eta)} = D_{e+1} + (q_e - f) D_e. \quad (16)$$

Приступая к вычислению ряда

$$k_0 \varphi_0(n_0) + k_1 \varphi_0(n_1) + k_2 \varphi_0(n_2) + \dots,$$

мы замечаем, что он, по вставке в него выше указанных значений

$$\varphi_0(n_0), \varphi_0(n_1), \varphi_0(n_2), \dots$$

принимает такой вид:

$$k_0 D'_1 + k_1 D''_1 + \dots + k_{q_1-2} D_1^{(q_1-1)} + k_{q_1-1} D_2 + k_{q_1} D'_3 + k_{q_1+1} D''_3 + \dots,$$

где, по § IV, коэффициенты

$$k_0, k_1, k_2, \dots$$

получатся в частном при делении $\phi(M_0)$ на $\varphi_0(n_0) = D'_1$, первого остатка на $\varphi_0(n_1) = D''_1$, второго остатка на $\varphi_0(n_2) = D'''_1$ и т. д. Замечая же, что, по § II, делимое $\phi(M_0)$ меньше единицы, что первый остаток меньше первого делителя D'_2 и т. д., мы заключаем, что

$$k_0 < \frac{1}{D'_1}, \quad k_1 < \frac{D'_1}{D''_1}, \quad \dots, \quad k_{q_1-2} < \frac{D^{(q_1-2)}_1}{D^{(q_1-1)}_1},$$

и, следовательно,

$$k_0 - 2 < \frac{1 - 2D'_1}{D'_1}, \quad k_1 - 2 < \frac{D'_1 - 2D''_1}{D'_1}, \quad \dots, \quad k_{q_1-2} - 2 < \frac{D^{(q_1-2)}_1 - 2D^{(q_1-1)}_1}{D^{(q_1-1)}_1}.$$

Внося сюда, по (15), сумму $D_2 + q_1 D_1$ на место 1 и подставляя выражения величин

$$D'_1, D''_1, \dots, D^{(q_1-1)}_1,$$

по (16), мы, после приведения, имеем

$$\begin{aligned} k_0 - 2 &< -\frac{D_2 + (q_1 - 2) D_1}{D_2 + (q_1 - 1) D_1}, \\ k_1 - 2 &< -\frac{D_2 + (q_1 - 3) D_1}{D_2 + (q_1 - 2) D_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ k_{q_1-2} - 2 &< -\frac{D_2}{D_2 + D_1}. \end{aligned}$$

Откуда видно, что все коэффициенты

$$k_0 k_1, \dots, k_{q_1-2}$$

меньше 2; а так как эти коэффициенты (§ IV) суть числа целые положительные, то они могут иметь только одно из двух значений: 0 или 1.

Изображая через k_g первый из коэффициентов

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_{q_1-2},$$

не равный нулю, и замечая, что в этом предположении

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 0, \quad \dots, \quad k_{g-1} = 0, \quad k_g = 1,$$

мы, на основании выше сказанного об определении этих коэффициентов, заключаем, что частные при делении $\psi(M_0)$ на

$$D'_1, D''_1, \dots, D_1^{(g)}$$

должны быть равны нулю, а при делении на

$$D_1^{(g+1)}$$

в частном должна получиться единица, а это может иметь место только при

$$\psi(M_0) < D_1^{(g)}, \quad \psi(M_0) \geq D_1^{(g+1)}.$$

Внося же сюда значение $D_1^{(g)}, D_1^{(g+1)}$, по (16), мы находим

$$\begin{aligned} \psi(M_0) &< D_2 + (q_1 - g) D_1, \\ \psi(M_0) &\geq D_2 + (q_1 - g - 1) D_1, \end{aligned}$$

что дает нам

$$\begin{aligned} \psi(M_0) - (D_1 + D_2) &< (q_1 - g - 1) D_1, \\ \psi(M_0) - (D_1 + D_2) &\geq (q_1 - g - 2) D_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как g у нас означает одно из чисел

$$0, 1, 2, 3, \dots, q_1 - 2,$$

то последнее неравенство предполагает

$$\psi(M_0) \geq D_1 + D_2.$$

Это неравенство должно иметь место всякий раз, когда в ряду коэффициентов

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_{q_1-2}$$

есть коэффициент k_g , отличный от нуля. Следовательно, если условие

$$\psi(M_0) \geq D_1 + D_2$$

не выполняется, все коэффициенты

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_{q_1-2}$$

равны нулю. При выполнении же этого условия, мы, по (17), легко найдем значение g . Для этого мы замечаем, что, по (17), отношение

$$\frac{\psi(M_0) - (D_1 + D_2)}{D_1}$$

содержится между двумя числами

$$q_1 - g - 1, \quad q_1 - g - 2,$$

а потому меньшее из этих чисел $q_1 - g - 2$ будет представлять частное от деления

$$\psi(M_0) - (D_1 + D_2)$$

на D_1 . Изображая это частное через α_1 , мы, на основании выше сказанного, заключаем, что

$$q_1 - g - 2 = \alpha_1,$$

откуда для определения величины g имеем

$$g = q_1 - \alpha_1 - 2.$$

Так определится g , значок первого из коэффициентов

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_{q_1-2},$$

не обращающегося в 0, а равного 1. Что касается остальных

$$k_{g+1}, k_{g+2}, \dots, k_{q_1-2},$$

то они, как нетрудно убедиться, все приводятся к нулю.

В самом деле, по выше сказанному об определении коэффициентов в ряду

$$k_0 D'_1 + k_1 D''_1 + \dots + k_{q_1-2} D_1^{(q_1-1)} + k_{q_1-1} D_2 + \dots,$$

при

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 0, \quad \dots, \quad k_{g-1} = 0, \quad k_g = 1,$$

коэффициенты

$$k_{g+1}, k_{g+2}, \dots, k_{q_1-2}$$

будут равны частным от деления разности $\psi(M_0) - D_1^{(g+1)}$ на $D_1^{(g+2)}$, первого остатка на $D_1^{(g+3)}$, второго остатка на $D_1^{(g+4)}$ и т. д. Но при всех этих делениях частное будет нуль, ибо разность

$$\psi(M_0) - D_1^{(g+1)},$$

по (17), меньше

$$D_1 + D_2 + (q_1 - g - 1) D_1 - D_1^{(g+1)},$$

а это, по внесении величины $D_1^{(g+1)}$ на основании (16), приводится к D_1 , что, по (16), меньше всех делителей

$$D_1^{(g+2)}, D_1^{(g+3)}, \dots, D_1^{(q_1-1)}.$$

Из этого видно, что в ряду

$$k_0 D'_1 + k_1 D'_1 + \dots + k_{q_1-2} D_1^{(q_1-1)} + k_{q_1-1} D_2 + \dots$$

или совсем не будет членов вида

$$k_0 D'_1, k_1 D'_1, \dots, k_{q_1-2} D_1^{(q_1-1)},$$

или будет только один такой член, и коэффициент его будет равняться 1. Первое будет иметь место в том случае, когда

$$\psi(M_0) < D_1 + D_2;$$

второе, когда

$$\psi(M_0) \geq D_1 + D_2,$$

и в последнем из этих случаев такой член равен

$$k_g D_1^{(g+1)} = D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)},$$

где α_1 есть частное от деления разности

$$\psi(M_0) - (D_1 + D_2)$$

на D_1 . Вследствие этого вся часть этого ряда до члена $k_{q_1-1}D_2$ приведется или к 0, или к $D_1^{(q_1-\alpha_2-1)}$ и, следовательно, вообще представится формулой

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1-\alpha_1-1)}$$

с одним из двух знаков $\pm$. Верхний знак, с которым это выражение приводится к

$$D_1^{(q_1-\alpha_1-1)},$$

будет иметь место при

$$\psi(M_0) \geq D_1 + D_2;$$

нижний знак, с которым это выражение обращается в нуль, будет иметь место при

$$\psi(M_0) < D_1 + D_2.$$

Таким образом, мы находим, что ряд наш приведет к следующему:

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1-\alpha_1-1)} + k_{q_1-1}D_2 + k_{q_1}D'_3 + \dots,$$

и коэффициент k_{q_1-1} , по § IV, будет равняться частному от деления остатка

$$\psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1-\alpha_1-1)}$$

на D_2 . Изображая это частное через α_2 , мы будем иметь

$$k_{q_1-1} = \alpha_2.$$

Переходя затем к определению следующих коэффициентов

$$k_{q_1}, k_{q_1+1}, \dots,$$

мы замечаем, что они найдутся подобно первым

$$k_0, k_1, k_2, \dots, k_{q_1-2}$$

и что все члены вида

$$k_{q_1}D'_3, k_{q_1+1}D''_3, \dots, k_{q_1+q_3-2}D_3^{(q_3-1)}$$

приведутся к

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)},$$

где должно оставить нижний или верхний знак, смотря по тому, будет ли разность

$$\psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2$$

меньше $D_3 + D_4$ или нет. Число же α_3 будет частное от деления

$$\psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - (D_3 + D_4)$$

на D_3 .

Продолжая таким образом, мы находим для определения рассматриваемого нами ряда следующую формулу:

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \alpha_4 D_4 + \dots \quad (18)$$

§ VI

Числа

$$\alpha_2, \alpha_4, \dots,$$

стоящие в ряду (18) коэффициентами при

$$D_2, D_4, \dots,$$

будут получаться, по выше сказанному, в частном при делении разности

$$\psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)}$$

на D_2 , разности

$$\psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)}$$

на D_4 и т. д. А потому вообще будут иметь место такие неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \\ - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \dots - \alpha_{2\lambda} D_{2\lambda} < D_{2\lambda}, \end{aligned} \quad (19)$$

которые показывают, что ряд (18), остановленный на члене

$$\alpha_{2\lambda} D_{2\lambda},$$

дает величину, не превосходящую $\psi(M_0)$ и отличающуюся от $\psi(M_0)$ менее чем на $D_{2\lambda}$.

Что касается величины, получаемой из этого ряда, когда он остановлен на члене вида

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

то при этом представляются два случая, которые мы рассмотрим один за другим.

Случай 1. Член $\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)}$ не сокращается.

Это случай, когда из двух знаков $\pm$ берется верхний; тогда этот член приводится к

$$D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

и число $\alpha_{2\lambda+1}$, как видели, получится в частном при делении разности

$$\begin{aligned} & \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \\ & - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \dots - \alpha_{2\lambda} D_{2\lambda} - (D_{2\lambda+1} + D_{2\lambda+2}) \end{aligned}$$

на $D_{2\lambda+1}$, что предполагает такие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 & \leq \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \dots \\ & - \alpha_{2\lambda} D_{2\lambda} - (D_{2\lambda+1} + D_{2\lambda+2}) - \alpha_{2\lambda+1} D_{2\lambda+1} < D_{2\lambda+1}, \end{aligned}$$

а так как, по (16),

$$D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)} = D_{2\lambda+2} + (\alpha_{2\lambda+1} + 1) D_{2\lambda+1},$$

то это дает нам

$$\begin{aligned} 0 & \leq \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \\ & - \alpha_2 D_2 - \dots - \alpha_{2\lambda} D_{2\lambda} - D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)} < D_{2\lambda+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

откуда видно, что ряд (18), остановленный на члене

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

даст величину, не превосходящую $\phi(M_0)$ и отличающуюся от нее менее чем на $D_{2\lambda+1}$, если только этот член сам собою не сокращается.

С л у ч а й 2. Член $\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)}$ сокращается.

Это случается, когда здесь из двух знаков $\pm$ берется нижний, а это, как мы видели, будет иметь место при неравенстве

$$\phi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \dots - \alpha_{2\lambda} D_{2\lambda} < D_{2\lambda+1} + D_{2\lambda+2}. \quad (21)$$

Это же неравенство вместе с неравенством (19) показывает, что ряд (18), остановленный на члене

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

даст величину, не превосходящую $\phi(M_0)$ и отличающуюся от $\phi(M_0)$ менее чем на $D_{2\lambda+1} + D_{2\lambda+2}$, если этот член оказывается равным нулю.

На основании выведенных нами неравенств (19), (20), (21) не трудно показать, что в ряду (18) и числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ и множители вида $\frac{1 \pm 1}{2}$ имеют такие значения, при которых этот ряд, будучи остановлен на каком-либо члене, дает возможно большую величину, не превосходящую $\phi(M_0)$. В самом деле, по (19) видно прямо, что этот ряд, остановленный на члене

$$\alpha_{2\lambda} D_{2\lambda},$$

дал бы величину, превосходящую $\phi(M_0)$, если бы коэффициент $\alpha_{2\lambda}$ увеличен был хотя бы на одну единицу. Также, замечая по (16), что увеличение числа $\alpha_{2\lambda+1}$ на одну единицу влечет увеличение величины $D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)}$ на $D_{2\lambda+1}$, мы, по (20), убеждаемся, что при большем числе $\alpha_{2\lambda+1}$ ряд (18), остановленный на члене

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

с множителем $\frac{1 \pm 1}{2} = 1$ дал бы величину больше $\phi(M_0)$.

Что касается случая, когда в этом члене множитель $\frac{1 \pm 1}{2}$ приводится к 0, а не к 1, то это, как видели, имеет место при неравенстве (21). Вследствие же этого неравенства ряд (18), остановленный на члене

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

дал бы величину больше $\psi(M_0)$, если бы в этом члене множитель $\frac{1 \pm 1}{2}$ взят был равным 1, ибо с таким значением множителя $\frac{1 \pm 1}{2}$ этот член приводится к

$$D_{2\lambda+1}^{(q_{2\lambda+1} - \alpha_{2\lambda+1} - 1)},$$

что, по (16), не меньше $D_{2\lambda+2} + D_{2\lambda+1}$, а, по (21), сумма

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \dots + \alpha_{2\lambda} D_{2\lambda} + D_{2\lambda+1} + D_{2\lambda+2}$$

будет превосходить величину

$$\psi(M_0).$$

Из этого видно, что значения чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

и множителей вида

$$\frac{1 \pm 1}{2}$$

в ряду (18) определяются тем, что этот ряд, остановленный на каком-либо члене, дает по возможности большую величину, не превосходящую $\psi(M_0)$.

Нетрудно также показать, что в этом ряду коэффициент α_{2i} в члене

$$\alpha_{2i} D_{2i}$$

остается не более $q_{2i} + 1$, если член, ему предшествующий,

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)},$$

не сокращается; в противном случае коэффициент α_{2i} не превосходит числа q_{2i} .

В самом деле, коэффициент α_{2i} , как видели, получается при делении разности

$$\begin{aligned} \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \\ - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \dots - \frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} \end{aligned}$$

на D_{2i} . Но эта разность, по (21), будет меньше

$$D_{2i-1} + D_{2i},$$

если последний член сокращается, и, по (20), меньше

$$D_{2i-1},$$

если этот член не сокращается. А потому в первом случае

$$\alpha_{2i} < \frac{D_{2i-1} + D_{2i}}{D_{2i}}$$

и во втором

$$\alpha_{2i} < \frac{D_{2i-1}}{D_{2i}}.$$

Внеся же в эти неравенства, по (14), сумму $D_{2i+1} + q_{2i}D_{2i}$ вместо D_{2i-1} , мы находим, что они принимают такой вид:

$$\alpha_{2i} < \frac{D_{2i+1} + q_{2i}D_{2i} + D_{2i}}{D_{2i}},$$

$$\alpha_{2i} < \frac{D_{2i+1} + q_{2i}D_{2i}}{D_{2i}},$$

откуда выходит

$$\alpha_{2i} < q_{2i} + 1 + \frac{D_{2i+1}}{D_{2i}}$$

$$\alpha_{2i} < q_{2i} + \frac{D_{2i+1}}{D_{2i}}.$$

А так как D_{2i+1} меньше D_{2i} , то

$$\frac{D_{2i+1}}{D_{2i}} < 1,$$

вследствие чего, при α_{2i} , q_{2i} целых, первое неравенство не может удовлетвориться, если число α_{2i} превосходит число $q_{2i} + 1$; второе же предполагает, что число α_{2i} не превосходит q_{2i} .

Определяя по формулам § III и V значение членов ряда

$$k_0\phi_0(m_0) + k_1\phi_0(m_1) + k_2\phi_0(m_2) + \dots,$$

мы находим, что он представится следующей формулой:

$$\beta_1 D_1 + \frac{1 \pm 1}{2} D_2^{(q_2 - \beta_2 - 1)} + \beta_3 D_3 + \dots,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ числа целые положительные. Повторяя же над этим рядом все те суждения, которые делали мы относительно ряда (18), мы приходим к таким заключениям: 1) числа $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ и значение множителей вида $\frac{1 \pm 1}{2}$ определяются тем, что этот ряд, остановленный на каком-либо члене, дает величину по возможности большую, не превосходящую $\varphi(N_0)$; 2) коэффициент β_{2i+1} в члене $\beta_{2i+1} D_{2i+1}$ не превосходит $q_{2i+1} + 1$, если предшествующий член $\frac{1 \pm 1}{2} D_{2i}^{(q_{2i} - \beta_{2i} - 1)}$ сокращается; в противном случае он не может превосходить q_{2i+1} ; 3) этот ряд, остановленный на члене $\beta_{2\lambda+1} D_{2\lambda+1}$, дает величину, не превосходящую $\varphi(N_0)$ и отличающуюся от $\varphi(N_0)$ менее чем на $D_{2\lambda+1}$; остановленный же на члене $\frac{1 \pm 1}{2} D_{2\lambda}^{(q_{2\lambda} - \beta_{2\lambda} - 1)}$ дает величину, не превосходящую $\varphi(N_0)$ и отличающуюся от нее менее чем на $D_{2\lambda} + D_{2\lambda+1}$ и $D_{2\lambda}$, смотря по тому, сокращается ли этот член или нет.

§ VII

Показавши вычисление рядов

$$\begin{aligned} k_0\varphi_0(n_0) + k_1\varphi_0(n_1) + k_2\varphi_0(n_2) + \dots, \\ k_0\phi_0(m_0) + k_1\phi_0(m_1) + k_2\phi_0(m_2) + \dots, \end{aligned}$$

мы переходим теперь к употреблению их для определения, на основании формул § IV, первого члена в рядах

$$\phi(M_0), \phi(M_1), \phi(M_2), \dots$$

и

$$\varphi(N_0), \varphi(N_1), \varphi(N_2), \dots,$$

не превосходящего данного предела ε . Мы видели (§ IV), что такой член вида $\psi(M)$ и соответствующее ему число M определяются формулами

$$\begin{aligned}\psi(M) &= \psi(M_0) - k_0 \varphi_0(n_0) - k_1 \varphi_0(n_1) - \dots - (k_{\nu_{\rho-1}} - l) \varphi_0(n_{\nu_{\rho-1}}), \\ M &= M_0 + k_0 n_0 + k_1 n_1 + \dots + (k_{\nu_{\rho-1}} - l) n_{\nu_{\rho-1}},\end{aligned}$$

если

$$k_{\nu_{\rho-1}} \varphi_0(n_{\nu_{\rho-1}})$$

есть первый член ряда

$$k_0 \varphi_0(n_0) + k_1 \varphi_0(n_1) + k_2 \varphi_0(n_2) + \dots,$$

на котором он, будучи остановлен, дает величину $\psi(M_0)$ верно до ε , и l есть наибольшее из чисел

$$0, 1, 2, 3, \dots, k_{\nu_{\rho-1}} - 1,$$

с которым выражение

$$k_0 \varphi_0(n_0) + k_1 \varphi_0(n_1) + \dots + (k_{\nu_{\rho-1}} - l) \varphi_0(n_{\nu_{\rho-1}})$$

дает величину $\psi(M_0)$ верно до ε . Вычисляя же этот ряд, мы нашли (§ V), что он представляется такою формулою:

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots,$$

где, по нашему знакоположению (§ V),

$$\begin{aligned}D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} &= \varphi_0(Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)}), \\ D_2 &= \varphi_0(Q_2), \\ D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} &= \varphi_0(Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)}), \\ &\dots\end{aligned}$$

откуда видно, что выше показанные выражения величин $\psi(M)$ и M

приведутся или к таким:

$$\begin{aligned}\psi(M) &= \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} - (\alpha_{2i} - l) D_{2i}, \\ M &= M_0 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 Q_2 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1 \pm 1}{2} Q_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + (\alpha_{2i} - l) Q_{2i},\end{aligned}$$

или к таким:

$$\begin{aligned}\psi(M) &= \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \dots \\ &\quad \dots - \left(\frac{1 \pm 1}{2} - l \right) D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)}, \\ M &= M_0 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 Q_2 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1 \pm 1}{2} - l \right) Q_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)},\end{aligned}$$

смотря по тому, будет ли член

$$\alpha_{2i} D_{2i}$$

или член

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)}$$

первым в ряду

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots,$$

на котором останавливаясь, мы получаем величину $\psi(M_0)$, верную до ε . Но так как в последнем случае, по выше сказанному, число l должно быть меньше коэффициента $\frac{1 \pm 1}{2}$, то оно в этом случае не может иметь другого значения, кроме 0, а при $l = 0$ последние выражения $\psi(M)$ и M дают то же, что первые при l , равном α_{2i} . Следовательно, первые выражения $\psi(M)$ и M будут обнимать оба случая, если в них допустим значения $l = \alpha_{2i}$, и тогда можно будет, не останавливаясь на членах вида

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)},$$

продолжать ряд до члена вида

$$\alpha_{2i} D_{2i},$$

с которым он дает величину $\psi(M_0)$ верно до ε .

Вследствие этого для определения величин $\psi(M)$ и M мы будем иметь только одну систему формул

$$\begin{aligned} \psi(M) &= \psi(M_0) - \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha_2 D_2 - \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} - (\alpha_{2i} - l) D_{2i}, \\ M &= M_0 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 Q_2 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1 \pm 1}{2} Q_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + (\alpha_{2i} - l) Q_{2i}, \end{aligned}$$

изображая через

$$\alpha_{2i} D_{2i}$$

первый член вида

$$\alpha_2 D_2, \alpha_4 D_4, \dots,$$

останавливая на котором ряд

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots,$$

получаем величину $\psi(M_0)$, верную до ε , и через l наибольшее из чисел

$$0, 1, 2, 3, \dots, \alpha_{2i},$$

с которым выражение

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots + (\alpha_{2i} - l) D_{2i}$$

дает $\psi(M_0)$ верно до ε .

Число M , таким образом находимое, по § II, будет наименьшая величина x , с которою разность $y - ax$, оставаясь меньше b , может представить b верно до ε ; величина же $\psi(M)$ по § I и II будет равна значению

$$-(y - ax - b),$$

наиближе подходящему к 0 при $x = M$ и $y - ax < b$.

Чтобы найти величину y , соответствующую

$$\begin{aligned} x &= M, \\ -(y - ax - b) &= \psi(M), \end{aligned}$$

мы замечаем, что эти равенства, по исключении x , нам дают

$$y = b - \psi(M) + aM.$$

Внося же сюда выше найденные значения M и $\psi(M)$ и заменяя, по (12), величины

$$D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)}, D_2, D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)}, D_4, \dots$$

через

$$P_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} - \alpha Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)}, P_2 - \alpha Q_2, P_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} - \alpha Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)}, P_4 - \alpha Q_4, \dots,$$

мы, по приведении, находим

$$\begin{aligned} y &= b + aM_0 - \psi(M_0) + \frac{1 \pm 1}{2} P_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 P_2 + \frac{1 \pm 1}{2} P_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots \\ &\dots + \frac{1 \pm 1}{2} P_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + (\alpha_{2i} - l) P_{2i}. \end{aligned}$$

Для определения величины $\psi(M_0)$ и числа M_0 мы замечаем, что, по § II, ряд

$$\psi(0), \psi(1), \psi(2), \dots$$

и ряд

$$\psi(M_0), \psi(M_1), \psi(M_2), \dots$$

будут начинаться одним и тем же членом, а потому

$$M_0 = 0,$$

$$\psi(M_0) = \psi(0);$$

по формулам же (1)

$$\psi(0) = b - Eb;$$

следовательно,

$$\psi(M_0) = b - Eb.$$

Внося эти величины M_0 и $\phi(M_0)$ в выше найденные выражения $x = M$ и y , мы получаем

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm 1}{2} Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 Q_2 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots + \\ &\quad + \frac{1 \pm 1}{2} Q_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + (\alpha_{2i} - l) Q_{2i}, \\ y &= Eb + \frac{1 \pm 1}{2} P_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 P_2 + \frac{1 \pm 1}{2} P_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots + \\ &\quad + \frac{1 \pm 1}{2} P_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + (\alpha_{2i} - l) P_{2i}. \end{aligned}$$

Эти выражения x , y определяют наименьшие целые величины x , y , с которыми разность $y - ax$, оставаясь меньше b , дает b верно до ε .

Сличая эти выражения x , y с выражением $\phi(M_0) = b - Eb$ формулою

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots + (\alpha_{2i} - l) D_{2i}$$

и замечая, что, по (16) и (13),

$$\begin{aligned} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} &= D_1 + \alpha_1 D_1 + D_2, & D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} &= D_3 + \alpha_3 D_3 + D_4, \dots, \\ Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} &= -Q_1 - \alpha_1 Q_1 + Q_2, & Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} &= -Q_3 - \alpha_3 Q_3 + Q_4, \dots, \\ P_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} &= -P_1 - \alpha_1 P_1 + P_2, & P_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} &= -P_3 - \alpha_3 P_3 + P_4, \dots, \end{aligned}$$

мы на основании выше сказанного заключаем, что задача наша об определении наименьших чисел x , y , с которыми разность $y - ax$, оставаясь меньше b , дает b верно до ε , разрешается следующим образом:

Разлагаем величину a в непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

находим подходящие дроби

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \dots, \quad \frac{P_{e+1}}{Q_{e+1}} = \frac{P_e q_e + P_{e-1}}{Q_e q_e + Q_{e-1}}$$

и значение количеств

$$D_0, D_1, D_2, \dots,$$

определяемых так:

$$D_0 = 1, D_1 = a - q_0, \dots, D_{e+1} = D_{e-1} - D_e q_e.$$

По этим количествам разлагаем величину $b - Eb$ в ряд

$$\frac{1 \pm 1}{2} (D_1 + \alpha_1 D_1 + D_2) + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} (D_3 + \alpha_3 D_3 + D_4) + \dots,$$

где целые положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ и знаки в множителях вида $\frac{1 \pm 1}{2}$ выбираются так, чтобы этот ряд, остановленный на каком-либо члене, давал величину, не превосходящую $b - Eb$, но по возможности большую. По такому разложению величины $b - Eb$ наименьшие числа x, y , с которыми разность $y - ax$, оставаясь меньше b , дает b верно до ε , определяются так:

Останавливаем ряд

$$\frac{1 \pm 1}{2} (D_1 + \alpha_1 D_1 + D_2) + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} (D_3 + \alpha_3 D_3 + D_4) + \dots$$

на первом члене вида $\alpha_2 D_2, \alpha_4 D_4, \dots$, с которым этот ряд дает величину $b - Eb$ верно до ε , и в этом выражении $b - Eb$ последний коэффициент настолько приближаем к нулю, насколько это возможно сделать, оставляя его числом целым и не увеличивая погрешности выражения $b - Eb$ за предел ε . Заменяя в полученном таким образом приближенном выражении величины $b - Eb$ количества

$$D_1, D_2, D_3, D_4, \dots$$

числами

$$-Q_1, +Q_2, -Q_3, +Q_4, \dots,$$

мы находим величину искомого x ; а заменяя те же количества числами

$$-P_1, +P_2, -P_3, +P_4, \dots$$

и прибавляя член Eb , мы находим y .

Точно так же, по разложении величины $\varphi(N_0)$ в ряд

$$\beta_1 D_1 + \frac{1 \pm 1}{2} D_2^{(q_2 - \beta_2 - 1)} + \beta_3 D_3 + \dots,$$

мы находим решение нашей задачи для случая

$$y - ax > b.$$

При этом значение количеств

$$D_1, D_2, D_3, \dots$$

и чисел

$$P_1, P_2, P_3, \dots,$$

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

остается то же, а вместо

$$\psi(M_0) = b - Eb,$$

мы находим, по § II,

$$\varphi(N_0) = Eb + 1 - b.$$

В этом случае наименьшие числа x, y , с которыми разность $y - ax$ дает b верно до ε , определяются таким образом:

Останавливаем ряд

$$\beta_1 D_1 + \frac{1 \pm 1}{2} (D_2 + \beta_2 D_2 + D_3) + \beta_3 D_3 + \dots$$

на первом члене вида $\beta_1 D_1, \beta_3 D_3, \dots$, с которым получается из этого ряда величина $Eb + 1 - b$, верная до ε , и в этом выражении количества $Eb + 1 - b$, оставляя последний коэффициент числом целым, настолько приближаем его к нулю, насколько это возможно сделать, не увеличивая погрешности выражения $Eb + 1 - b$ за предел ε .

Заменяя в полученном таким образом приближенном выражении $Eb + 1 - b$ количества

$$D_1, D_2, D_3, D_4, \dots$$

числами

$$+ Q_1, - Q_2, + Q_3, - Q_4, \dots,$$

мы находим величину искомого x , а заменяя те же количества числами

$$+ P_1, - P_2, + P_3, - P_4, \dots$$

и прибавляя члены $Eb + 1$, мы находим величину y .

§ VIII

На основании выведенных нами формул нетрудно показать, что при определении величин x , y , с которыми разность $y - ax$, оставаясь менее b , дает b верно до ε_0 , получают x меньше $\frac{2}{D_{2i}}$, если ε_0 не меньше D_{2i} .

В самом деле, по (19), разность

$$\begin{aligned} \phi(M_0) - \left(\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + \alpha_{2i} D_{2i} \right) \end{aligned}$$

есть величина положительная, меньше D_{2i} , и, следовательно, в сделанном предположении, меньше ε_0 . Принимая же эту разность за величину ε и отыскивая по выше сказанному наименьшие значения x , y , при которых выражение $y - ax$, оставаясь меньше b , представляет b верно до ε , мы замечаем, что в этом случае ряд

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots$$

придется остановить на члене

$$\alpha_{2i} D_{2i},$$

так как при этом получается величина, разнящаяся с $\phi(M_0)$ ровно на ε . Переходя к определению числа l , наибольшего из чисел

$$0, 1, 2, 3, \dots, \alpha_{2i},$$

с которым выражение

$$\begin{aligned} \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots + \\ + \frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + (\alpha_{2i} - l) D_{2i} \end{aligned}$$

дает величину $\phi(M_0)$ верно до ε , мы находим, что $l = 0$, ибо при такой величине l это выражение, как видели, дает величину, меньшую $\phi(M_0)$ ровно на ε . На основании этого, по формулам § VII для определения

x, y в настоящем случае находим

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1 \pm 1}{2} Q_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 Q_2 + \frac{1 \pm 1}{2} Q_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots \\ &\dots + \frac{1 \pm 1}{2} Q_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + \alpha_{2i} Q_{2i}, \\ v &= Eb + \frac{1 \pm 1}{2} P_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 P_2 + \frac{1 \pm 1}{2} P_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots \\ &\dots + \frac{1 \pm 1}{2} P_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + \alpha_{2i} P_{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Но, по доказанному в § VI относительно коэффициентов ряда

$$\begin{aligned} & \frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots + \\ & + \frac{1 \pm 1}{2} D_{2i-1}^{(q_{2i-1} - \alpha_{2i-1} - 1)} + \alpha_{2i} D_{2i} + \dots, \end{aligned}$$

видно, что в этом выражении сумма коэффициентов при $Q_1^{(q_1-\alpha_1-1)}$ и Q_2 не превзойдет $q_2 + 1$, сумма коэффициентов при $Q_3^{(q_3-\alpha_3-1)}$ и Q_4 не превзойдет $q_4 + 1, \dots$, сумма коэффициентов при $Q_{2i-1}^{(q_{2i-1}-\alpha_{2i-1}-1)}$ и Q_{2i} не превзойдет $q_{2i} + 1$. По формулам же (13) мы находим, что

$$\begin{aligned} Q_1^{(q_1-\alpha_1-1)} &< Q_2, \\ Q_3^{(q_3-\alpha_3-1)} &< Q_4, \\ &\dots \\ Q_{2i-1}^{(q_{2i-1}-\alpha_{2i-1}-1)} &< Q_{2i}. \end{aligned}$$

Вследствие этого выше найденная величина x не может превосходить суммы

$$(q_2 + 1) Q_2 + (q_4 + 1) Q_4 + \cdots + (q_{2i} + 1) Q_{2i}.$$

А так как числа $q_2, q_4, \dots, q_{2i}$ не менее 1, то эта сумма должна быть не более

$$2q_2Q_2 + 2q_4Q_4 + \cdots + 2q_{2j}Q_{2j},$$

и, следовательно,

$$x \leq 2(q_2Q_2 + q_4Q_4 + \cdots + q_{2i}Q_{2i}).$$

По формулам же (13) мы находим

$$\begin{aligned} Q_3 &= Q_2 q_2 + Q_1, \\ Q_5 &= Q_4 q_4 + Q_3, \\ &\dots \dots \dots \\ Q_{2i+1} &= Q_{2i} q_{2i} + Q_{2i-1}, \end{aligned}$$

что, по исключении $Q_3, Q_5, \dots, Q_{2i-1}$, нам дает

$$Q_{2i+1} = Q_2 q_2 + Q_4 q_4 + \dots + Q_{2i} q_{2i} + Q_1.$$

Замечая, что (§ II) число Q_1 равно единице, мы на основании этого заключаем, что

$$Q_{2i+1} > Q_2 q_2 + Q_4 q_4 + \dots + Q_{2i} q_{2i}.$$

Вследствие этого выше выведенное неравенство относительно x нам дает

$$x < 2Q_{2i+1}.$$

Но, по свойству подходящих дробей

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_{2i}}{Q_{2i}}, \frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}}, \dots,$$

получаемых (§ II) разложением a в непрерывную дробь, разность

$$P_{2i} - aQ_{2i} = D_{2i},$$

как известно, остается меньше $\frac{1}{Q_{2i+1}}$; а потому

$$Q_{2i+1} < \frac{1}{D_{2i}};$$

вследствие же этого выше найденное неравенство нам дает

$$x < \frac{2}{D_{2i}},$$

что и следовало доказать.

По доказанному сейчас неравенству

$$x < \frac{2}{D_{2i}},$$

где

$$D_{2i} > \varepsilon$$

и ε есть степень точности, с которою разность

$$y - ax$$

будет представлять количество b , видно, что при величинах x, y , определяемых формулою (22), разность

$$y - ax,$$

оставаясь меньше b , представит эту величину верно до $\frac{2}{x}$. Замечая же, что такие системы величин x, y , по выше сказанному, получаются всякий раз, когда ряд

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots$$

останавливают на каком-либо из членов

$$\alpha_2 D_2, \alpha_4 D_4, \dots$$

и за l принимают нуль, мы заключаем, что таких систем найдется бесконечное множество, если только этот ряд продолжается беспрестанно. Ряд же этот, очевидно, может кончиться на каком-либо члене только в одном из двух случаев: или когда величины

$$D'_1, D''_1, \dots, D_1^{(q_1 - 1)}, D_2, D'_3, \dots,$$

определяемые разложением a в непрерывную дробь, представляются в ограниченном числе, или, когда коэффициенты ряда

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots,$$

начиная с какого-нибудь члена, все обращаются в 0. Первое, по § V, будет иметь место, когда непрерывная дробь, происходящая от разложения количества a , кончается и, следовательно, когда это количество соизмеримо*. Во втором случае, по § VI, ряд

$$\frac{1 \pm 1}{2} D_1^{(q_1 - \alpha_1 - 1)} + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2} D_3^{(q_3 - \alpha_3 - 1)} + \dots,$$

* „Соизмеримо“ означает здесь, что a — рациональное число. Аналогично, „ a “ несоизмеримо“ означает, что a — иррациональное число. — *Ред.*

продолженный до членов, обращающихся в нуль, даст величину

$$\psi(M_0)$$

верно до последнего из количеств

$$D_1, D_2, D_3, \dots$$

и, следовательно, даст величину $\psi(M_0)$ совершенно точную, если непрерывная дробь, происходящая от разложения a , бесконечна; тогда, как известно, величины

$$D_1, D_2, D_3, \dots$$

имеют пределом нуль. Определяя по формулам § VII значения x , y , соответствующие такой величине $\psi(M_0)$, мы найдем систему величин x , y , с которыми разность $y - ax$ представит b совершенно верно.

Нетрудно показать, что в этом последнем случае, при a несоизмеримом, также найдется бесконечное множество величин x , y , с которыми разность

$$y - ax,$$

оставаясь меньше b , дает величину b верно до $\frac{2}{x}$.

В самом деле, пусть будет

$$x = x_1, \quad y = y_1$$

система величин x , y , с которыми разность $y - ax$ представляет количество b совершенно верно. В ряду подходящих дробей a

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_{2\lambda}}{Q_{2\lambda}}, \frac{P_{2\lambda+1}}{Q_{2\lambda+1}}, \dots$$

при a несоизмеримом найдется бесконечное множество дробей с знаменателем больше x_1 , которые дают величину меньше a . Если же

$$\frac{P_{2\lambda+1}}{Q_{2\lambda+1}}$$

есть одна из таких дробей, то, как нетрудно убедиться, полагая

$$x = x_1 + Q_{2\lambda+1}, \quad y = y_1 + P_{2\lambda+1},$$

мы найдем значения x, y , с которыми разность

$$y - ax,$$

оставаясь меньше b , даст величину b верно до $\frac{2}{x}$. Чтобы показать это, мы замечаем, что выражение

$$y - ax - b,$$

по внесении в него вышешоказанных величин x, y , приводится к следующему:

$$y_1 - ax_1 - b + P_{2\lambda+1} - aQ_{2\lambda+1},$$

где

$$y_1 - ax_1,$$

по положению, равно b , а

$$P_{2\lambda+1} - aQ_{2\lambda+1},$$

по свойству подходящих дробей, меньше 0 и разнится с нулем менее чем на $\frac{1}{Q_{2\lambda+1}}$. Откуда видно, что при рассматриваемых величинах x, y разность $y - ax$, оставаясь меньше b , дает величину b верно до $\frac{1}{Q_{2\lambda+1}}$ и, следовательно, верно до $\frac{2}{x}$, ибо при $x = x_1 + Q_{2\lambda+1}$ и $Q_{2\lambda+1} > x_1$ мы находим, что

$$\frac{1}{Q_{2\lambda+1}} < \frac{2}{x}.$$

Из этого видно, что во всяком случае, при a несоизмеримом, найдется бесконечное множество значений x, y , с которыми разность $y - ax$, оставаясь меньше b , дает величину b верно до $\frac{2}{x}$. Рассматривая таким же образом значения x, y , при которых разность $y - ax$ больше b , мы приходим к тому же заключению и это дает нам такую теорему:

Теорема. Если a количество несоизмеримое, найдется бесконечное множество таких целых чисел x, y , при которых выражение $y - ax$ будет разниться с каким-либо данным количеством b менее чем на $\frac{2}{x}$. Одни из этих величин x, y будут давать $y - ax > b$, другие $y - ax < b$.

Ограничиваясь случаем, когда $y - ax < b$, и полагая

$$y - ax - b = -d,$$

находим

$$ax + b = y + d.$$

По этой формуле члены арифметической прогрессии

$$b, b + a, b + 2a, \dots$$

будут выражаться суммой целого числа y и количества d , представляющего величину разности выражения $y - ax$ и b . А так как, по доказанному нами, при a несоизмеримом найдется бесконечное множество чисел x, y , для которых разность $d = b - (y - ax)$ больше нуля и меньше $\frac{2}{x}$, то при таком a в арифметической прогрессии

$$b, b + a, b + 2a, \dots$$

найдется бесконечное множество членов, которых величина $ax + b$ равняется целому числу y с дробью меньше $\frac{2}{x}$, что дает нам такую теорему:

Теорема. Если разность арифметической прогрессии есть число несоизмеримое, между ее членами найдется бесконечное множество таких, которых дробная часть менее 2, разделенного на число предшествующих членов.

В заключение нашего мемуара мы покажем, как найдется бесконечное множество целых чисел x, y , при которых разность

$$A(lx + my + n)^2 - A_1(l_1x + m_1y + n_1)^2$$

остается между 0 и $4(lm_1 - l_1m)\sqrt{AA_1}$, если AA_1 не есть точный квадрат и $lm_1 - l_1m$ не равно 0.

Разлагая выражение

$$A(lx + my + n)^2 - A_1(l_1x + m_1y + n_1)^2$$

на линейные множители, мы находим, что оно может быть представлено в таком виде:

$$S(y - ax - \beta)(y - a_1x - \beta_1),$$

где

$$\begin{aligned}
 S &= m^2 A - m_1^2 A_1, \\
 \alpha &= \frac{l_1 m_1 A_1 - l m A}{m^2 A - m_1^2 A_1} + \frac{l_1 m - l m_1}{m^2 A - m_1^2 A_1} \sqrt{A A_1}, \\
 \alpha_1 &= \frac{l_1 m_1 A_1 - l m A}{m^2 A - m_1^2 A_1} - \frac{l_1 m - l m_1}{m^2 A - m_1^2 A_1} \sqrt{A A_1}, \\
 \beta &= \frac{n_1 m_1 A_1 - n m A}{m^2 A - m_1^2 A_1} + \frac{n_1 m - n m_1}{m^2 A - m_1^2 A_1} \sqrt{A A_1}, \\
 \beta_1 &= \frac{n_1 m_1 A_1 - n m A}{m^2 A - m_1^2 A_1} - \frac{n_1 m - n m_1}{m^2 A - m_1^2 A_1} \sqrt{A A_1}.
 \end{aligned}$$

Так как, по положению, AA_1 не точный квадрат и $l_1 m - l m_1$ не равно 0, количество α будет несоизмеримое, а в этом случае, как видели, найдется бесконечное множество целых чисел x, y , с которыми разность $(y - \alpha x) - \beta$ будет содержаться между 0 и $\frac{2}{x}$ и для которых, следовательно, будет существовать уравнение

$$y - \alpha x - \beta = \frac{2\theta}{x},$$

где θ — положительное количество, меньшее 1.

Внося отсюда величину y в выражение

$$S(y - \alpha x - \beta)(y - \alpha_1 x - \beta_1),$$

мы находим, что оно приводится к следующему:

$$\frac{2\theta S}{x} \left[(\alpha - \alpha_1)x + \beta - \beta_1 + \frac{2\theta}{x} \right],$$

а это, по внесении значения коэффициентов $S, \alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$, принимает такой вид:

$$4\theta (l_1 m - l m_1) \sqrt{A A_1} \left(1 + \frac{n_1 m - n m_1}{l_1 m - l m_1} \frac{1}{x} + \frac{m^2 A - m_1^2 A_1}{(l_1 m - l m_1) \sqrt{A A_1}} \cdot \frac{\theta}{x^2} \right). \quad (23)$$

На основании этого выражения величины разности

$$A(lx + my + n)^2 - A_1(l_1 x + m_1 y + n_1)^2$$

при величинах x , y , определяемых по выше сказанному, мы теперь покажем, что между ними найдется бесконечное множество таких, при которых рассматриваемая нами разность заключается между 0 и $4(lm_1 - l_1m) \sqrt{AA_1}$, и что это будет иметь место всегда, если x превосходит величину $x = x_0$, при которой выражения

$$\frac{n_1m - nm_1}{l_1m - lm_1} \frac{1}{x}, \quad \frac{m^2A - m_1^2A_1}{(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

остаются в пределах

$$-\frac{1}{2}, +\infty,$$

а выражения

$$4(n_1m - nm_1) \frac{\sqrt{AA_1}}{x}, \quad 4(m^2A - m_1^2A_1) \frac{1}{x^2}$$

в пределах

$$-\frac{1}{2} [4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} - E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}], \\ + \frac{1}{2} [E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} + 1 - 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}].$$

В самом деле, так как с увеличением x эти выражения приближаются к 0, то при $x > x_0$ они останутся в тех же пределах; то же будет после умножения их на $\theta < 1$.

Откуда видно, что при $x > x_0$ сумма

$$\frac{n_1m - nm_1}{l_1m - lm_1} \frac{1}{x} + \frac{m^2A - m_1^2A_1}{(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}} \frac{\theta}{x^2}$$

будет заключаться в пределах

$$-1, +\infty,$$

а сумма

$$4(n_1m - nm_1) \frac{\sqrt{AA_1}}{x} + 4(m^2A - m_1^2A_1) \frac{\theta}{x^2}$$

в пределах

$$-[4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} - E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}], \\ + [E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} + 1 - 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}].$$

По первому мы узнаем, что в формуле (23) множитель, стоящий при

$$4(l_1 m - l m_1) \sqrt{AA_1},$$

есть величина положительная; по второму же мы теперь покажем, что этот множитель не может быть ни равен 1, ни больше 1, и, следовательно, выражение (23), действительно, содержится между 0 и $4(l_1 m - l m_1) \sqrt{AA_1}$.

Для этого мы замечаем, что этот множитель может быть представлен в таком виде:

$$1 - (1 - \theta) + T,$$

где

$$T = \frac{n_1 m - n m_1}{l_1 m - l m_1} \frac{\theta}{x} + \frac{m^2 A - m_1^2 A_1}{(l_1 m - l m_1) \sqrt{AA_1}} \frac{\theta^2}{x^2}.$$

Так как член $-(1 - \theta)$ отрицательный, то рассматриваемый нами множитель

$$1 - (1 - \theta) + T$$

может быть равен 1 или превзойти 1 только в том случае, когда

$$T > 1 - \theta;$$

в этом случае, по соединении двух последних членов, величина

$$1 - (1 - \theta) + T$$

привелась бы к следующему:

$$1 + \theta_1 T,$$

где $\theta_1 > 0$ и < 1 .

Но такое выражение для рассматриваемого нами множителя невозможно. В самом деле, оно, по (23), для величины разности

$$A(lx + m_1 y + n)^2 - A_1(l_1 x + m_1 y + n_1)^2$$

дает

$$4(l_1 m - l m_1) \sqrt{AA_1} (1 + \theta_1 T),$$

что, по внесении значения T , приводится к следующему:

$$4(l_1 m - l m_1) \sqrt{AA_1} + \theta_1 \theta \left[4(n_1 m - n m_1) \frac{\sqrt{AA_1}}{x} + 4 \frac{m^2 A - m_1^2 A_1}{x^2} \theta \right].$$

А так как $\theta_1\theta > 0$ и < 1 и, по замеченному выше, выражение

$$4(n_1m - nm_1) \frac{\sqrt{AA_1}}{x} + 4(m^2A - m_1^2A_1) \frac{\theta}{x^2}$$

заключается в пределах

$$- [4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} - E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}], \\ + [E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} + 1 - 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}],$$

то эта величина рассматриваемой нами разности заключалась бы между

$$E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}$$

и

$$E 4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1} + 1,$$

что невозможно, ибо между этими двумя целыми числами не содержится числа целого, а рассматриваемая нами разность представляет число целое.

Из этого видно, что если в системе значений x, y , определенных по выше сказанному, величина x превосходит x_0 , при этих величинах x, y разность

$$A(lx + my + n)^2 - A_1(l_1x + m_1y + n_1)^2$$

будет содержаться между 0 и $4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}$; а таких систем, как видели, найдется бесконечное множество, если только AA_1 не точный квадрат и разность $l_1m - lm_1$ не приводится к нулю.

Подобным образом, определяя значения x, y , при которых разность $y - ax$, оставаясь меньше β , дает β верно до $\frac{2}{x}$, мы найдем бесконечное множество целых величин x, y , при которых разность

$$A(lx + my + n)^2 - A_1(l_1x + m_1y + n_1)^2$$

заклучается в пределах 0 и $-4(l_1m - lm_1) \sqrt{AA_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА *

А. А. Марков

(Письмо к Эрмиту)

Вы отмечаете в вашем курсе одно замечательное предложение Чебышева о простых делителях чисел вида $n^2 + 1$.

Это предложение следующее:

Пусть μ наибольший простой делитель чисел

$$1 + 2^2, 1 + 4^2, 1 + 6^2, \dots, 1 + 4N^2;$$

в таком случае отношение

$$\frac{\mu}{N}$$

беспредельно растет вместе с N .

Используя один отрывок, найденный среди бумаг Чебышева (фотографическая копия этого отрывка приложена к этому моему письму), можно восстановить доказательство Чебышева.

С этой целью рассмотрим сумму

$$\log(1 + 2^2) + \log(1 + 4^2) + \dots + \log(1 + 4N^2) = \sum \log(1 + 4x^2),$$

равную сумме, составленной из логарифмов простых чисел вида $4m + 1$,

$$\sum \log(1 + 4x^2) = \sum A_q \log q \quad (q = 5, 13, 17, \dots, \mu).$$

* Заметка, составленная по бумагам, оставшимся после смерти Чебышева.

Что же касается множителя A_q , то он равен сумме чисел решений сравнений

$$\begin{aligned} 1 + 4x^2 &\equiv 0 \pmod{q}, \\ 1 + 4x^2 &\equiv 0 \pmod{q^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

где x меньше $N + 1$.

Но число решений сравнения

$$1 + 4x^2 \equiv 0 \pmod{q^k},$$

удовлетворяющих условию

$$x \leq N,$$

меньше, чем

$$\frac{2N}{q^k} + 1,$$

и равно нулю при $k > \frac{\log(1 + 4N^2)}{\log q}$.

Отсюда получается

$$A_q < 2N \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \frac{\log(1 + 4N^2)}{\log q}$$

и, следовательно,

$$\sum \log(1 + 4x^2) < 2N \sum \frac{\log q}{q-1} + \varphi(\mu) \log(1 + 4N^2),$$

где $\varphi(\mu)$ — число чисел $5, 13, 17, \dots, \mu$.

Из этого неравенства и из неравенства

$$\sum \log(1 + 4x^2) > 2N \log N - N$$

следует

$$\frac{\log N}{\log \mu} < \frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} + \frac{\varphi(\mu) \log(1 + 4N^2)}{2N \log \mu} + \frac{1}{2 \log \mu}.$$

Пусть теперь N бесконечно растет. В таком случае μ также бесконечно растет и выражения $\frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1}$ и $\frac{1}{2 \log \mu}$ приближаются к пределам $\frac{1}{2}$ и 0 .

Что же касается выражения

$$\frac{\varphi(\mu) \log(1 + 4N^2)}{2N \log \mu} = \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \cdot \frac{\log(1 + 4N^2)}{2 \log N} \cdot \frac{\mu \log N}{N \log \mu},$$

то легко убедиться, что оно должно было бы приближаться к нулю, если бы отношение $\frac{\mu}{N}$ оставалось конечным. Действительно,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(1 + 4N^2)}{2 \log N} \right) = 1, \quad \frac{\mu \log N}{N \log \mu} < \frac{\mu}{N} < O(1).$$

Таким образом, предполагая, что отношение $\frac{\mu}{N}$ остается конечным для бесконечно больших значений N , мы приходим к противоречию: для достаточно больших значений N отношение $\frac{\log N}{\log \mu}$ должно быть меньше всякого числа, большего $\frac{1}{2}$, и одновременно с этим больше любого числа, меньшего 1. Отношение $\frac{\mu}{N}$, следовательно, бесконечно растет при бесконечном возрастании N .

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



ОПЫТ ЭЛЕМЕНТАРНОГО АНАЛИЗА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПОЛОЖЕНИЯ

I

Теория вероятностей приносит надлежащую пользу только при помощи анализа.

II

С началами алгебры может быть выведена вероятность повториться нескольким событиям известное число раз.

III

Определение вероятности, что числа повторений событий будут в данных пределах, требует составления особенной таблицы.

IV

Без посредства интегралов могут быть даны понятие об этой таблице и ряды для ее вычисления.

V

С помощью этой таблицы мы можем составлять заключение о вероятности события по числу его повторений.

VI

Через посредство одной вспомогательной теоремы относительно суммирований может быть также выведена вероятность *средних результатов*.

VII

С одними началами алгебры можно показать, что величина произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (x-1)x$ всегда заключается между величинами $Cx^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}$, $Cx^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{36x^2}}$, где C есть количество, не зависящее от x .

Показать без посредства трансцендентного анализа основные теоремы исчисления вероятностей и главные приложения их, служащие опорой всем знаниям, основанным на наблюдениях и свидетельствах, — вот мысль, предложенная мне для осуществления его сиятельством господином попечителем Сергеем Григорьевичем Строгановым. Решение этой задачи представляет, с одной стороны, важное развитие приемов алгебраического анализа, с другой — значительную пользу в распространении знаний исчисления вероятностей между множеством людей, ограничивающихся в изучении математики одною алгеброю.

Анализ теории вероятностей до сих пор составляет одну из любопытнейших и вместе с тем одну из труднейших отраслей трансцендентного анализа. Здесь искомое, кроме самых простых случаев, определяется уравнениями в конечных разностях, которых исследование представляет несравненно более трудностей, чем исследование уравнений дифференциальных. Из этих уравнений искомое получается выраженным с помощью определенных интегралов, большею частью весьма сложных; таков способ Лапласа, до сих пор единственный. И наконец, числовые величины этих искомых приводятся к особенной трансцендентной, незаменимой вполне никакою совокупностью конечного числа действий алгебры, так же как известными там трансцендентными e^x , $\sin x$ и пр.

Таким образом, начиная с уравнений, определяющих искомое, до числовых значений его, везде встречаем анализ трансцендентный и наиболее трудный. Но, вникнув внимательнее в задачи теории вероятностей, мы убеждаемся на самом деле, что кроме приема, здесь доселе употребляемого, посредством которого при помощи анализа трансцендентного все вопросы решаются удовлетворительно, возможен другой прием с одними началами алгебры, прием, хотя уступающий

первому в общности, но значительно выигрывающий в простоте анализа. Так, мы находим весьма просто выражение искомой вероятности без уравнений в разностях, с началами только умножения и возведения в степени. В диссертации моей я ограничился только несколькими частными случаями, наиболее любопытными; но легко убедиться, что тот же самый прием прилагается и ко многим другим вопросам. Получая таким образом для вероятностей алгебраические выражения, я показываю приближенные их величины без помощи интегралов; здесь как вспомогательное средство употребляется только разложение $\lg(1+x)$ по степеням возрастающим x , ряд, обыкновенно предлагаемый в прибавлениях к начальной алгебре. Замечая же, что большею частью все эти величины вероятностей приводятся к выражениям одинакового вида, я означаю их, подобно $\sin$, $\lg$ и пр., особенным знаком T и предлагаю для определения их величин таблицу. Таким образом с помощью одной алгебры решаются все вопросы относительно повторения событий и определяются вероятности средних результатов — все, что составляет наиболее любопытное и полезное в теории вероятностей.

Но если все это, сделанное мною, слабо и незначительно, то сочинение мое „Опыт элементарного анализа теории вероятностей“, я надеюсь, заслужит внимание ученых как попытка осуществить мысль чрезвычайно полезную. До сих пор элементарные курсы теории вероятностей ограничивались только изложением, более или менее подробным, результатов, полученных посредством высшего анализа. Дать возможность проверить все эти заключения анализом строгим и простым, доступным для большей части учащихся, есть большой шаг в способе элементарного изложения теории вероятностей.

Кандидат Чебышев.

1844 года
октября 17 дня.

I

ОСНОВНЫЕ НАЧАЛА

§ 1. Если из определенного числа различных событий при известных обстоятельствах одно необходимо должно случиться и нет особенной причины ожидать какого-либо из этих событий преимущественно пред другими, то такие события отличаем названием *случаев*

равновозможных. Так, имея одинаковую причину ожидать туза, короля, даму и пр. какой-либо масти, выдергивая наудачу карту из полной колоды, мы говорим здесь туз, король, дама и пр. известной масти суть случаи равновозможные.

§ 2. Если же из n таких случаев m имеют необходимым следствием событие, которое не имеет места при остальных $n - m$ случаях, то такое событие называют *вероятным* и за меру его вероятности принимают $\frac{m}{n}$, т. е. *отношение числа равновозможных случаев, благоприятных для события, к числу всех равновозможных случаев*. Так, из 52 равновозможных случаев, которые представляет выдернутая наудачу карта из полной колоды (§ 1), двенадцать случаев:

король червей	король бубен	король треф	король пик
дама „	дама „	дама „	дама „
валет „	валет „	валет „	валет „

представляют фигуру, а остальные $52 - 12$ не фигуру. Поэтому вероятность выдернуть наудачу фигуру из полной колоды карт будет $\frac{12}{52}$, или, по сокращении на 4 числителя и знаменателя, $\frac{3}{13}$.

Вот другой пример, более общий. В сосуде лежит a шаров, из которых b цвета белого; остальные $a - b$ других цветов. Если я, не выбирая, выну отсюда один шар, он будет белый или не белый, смотря по тому, попадется ли мне в руку шар из числа b белых или из числа прочих $a - b$. Но как всякий из этих шаров имеет одинаковую возможность попасться в руку, следовательно, вынуть каждый из них — случай равновозможный, и число всех этих случаев a , число шаров. Но из них b только белого цвета, а поэтому p , вероятность вынуть белый шар, определится

$$p = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

§ 3. Из составленного нами понятия о вероятности (§ 2) следует, что она всегда выражается дробью, которой числитель менее знаменателя, если только не во всех возможных случаях имеет место рассматриваемое событие, или, что одно и то же, если это событие

не есть необходимое. В последнем случае вероятность его, как отношение чисел равных, приведет к 1. Так p , вероятность вынуть белый шар в предыдущем примере (§ 2), будет 1, если $b = a$, т. е. если в сосуде все a шаров белого цвета. В этом случае мы необходимо вынем белый шар, а не какого-либо другого цвета, ибо в сосуде все шары будут белые.

Другой предел вероятности, когда число случаев, в которые рассматриваемое событие имеет место, есть нуль, или, что одно и то же, когда событие совсем невозможно. Вероятность такого события, выражаясь отношением 0 к конечной величине, приводится к 0. Например, если b в примере § 2 будет 0, то вынуть белый шар будет невозможно (ибо при $b = 0$ совсем не будет шаров белого цвета) и p — вероятность этого события — будет 0.

Итак, 1 и 0 суть пределы вероятности событий, из которых первого она достигает, увеличиваясь, для событий необходимых, второго, — уменьшаясь, для событий невозможных. Для всех же других событий, в которых нет необходимости и невозможности, вероятность остается отличною от 1 или 0. Здесь приближенно мы считаем несомненным, что события будут или не будут иметь место, если вероятности их мало разнятся от 1 или 0. Таковы все заключения, выводимые из наблюдений и свидетельств.

§ 4. Наука о вероятностях, известная под именем *теории вероятностей*, имеет предметом определение вероятности события по данной связи его с событиями, которых вероятности известны.

Вот основные теоремы этой науки.

§ 5. *Первая теорема.* Вероятность, что случится одно из μ событий $E_1, E_2, \dots$, из которых ни одно не может случиться вместе с другим*, есть сумма их вероятностей.

В самом деле. Если вероятности событий

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu \quad (2)$$

суть

$$p_1, p_2, \dots, p_\mu, \quad (3)$$

* Такие события будем называть несовместными между собою.

и число всех равновозможных случаев

$$C_1, C_2, \dots, C_n \quad (4)$$

есть n , то, по сделанному нами определению вероятностей (§ 2), будем иметь

$$p_1 = \frac{m_1}{n}, \quad p_2 = \frac{m_2}{n}, \quad \dots, \quad p_\mu = \frac{m_\mu}{n}, \quad (5)$$

где $m_1, m_2, \dots, m_\mu$ суть числа случаев, благоприятных для событий (4)

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu.$$

Все эти случаи, имея необходимым следствием одно из событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$, будут различны между собою, ибо по положению ни одно из событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ не может случиться вместе с другим, а потому число всех таковых случаев будет $m_1 + m_2 + \dots + m_\mu$. Но число всех равновозможных случаев (4) есть n ; следовательно, P вероятность, что случится какое-либо из событий (2)

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu,$$

по § 2, определится уравнением

$$P = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_\mu}{n},$$

или

$$P = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_\mu}{n}$$

и, вследствие (5), будет

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_\mu, \quad (6)$$

что и следовало доказать.

Например, если в числе a шаров, заключенных в сосуде, находятся b_1 белого цвета, b_2 черного, то вероятность вынуть шар (§ 2) белого цвета будет $\frac{b_1}{a}$, черного $\frac{b_2}{a}$. Отсюда вероятность вынуть шар белого или черного цвета, по доказанной теореме, будет $\frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a}$.

Рассматривая события $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ как различные виды одного события F , эту теорему выражают так:

Если для события F возможно несколько различных видов, несовместных между собою, то вероятность его будет сумма вероятностей этих видов.

Так в выше приведенном примере вынуть шар белый и вынуть шар черный суть два вида одного события — вынуть шар или белый или черный.

§ 6. В частном случае, когда

$$p_1 = p_2 = \dots = p_\mu,$$

по (6), будем иметь

$$p = \mu p, \quad (7)$$

т. е. вероятность случиться одному из μ событий, несовместных между собою и одинаково вероятных, есть произведение их числа на общую их вероятность.

Так, вероятность вынуть один определенный шар* из сосуда, заключающего a шаров, есть $\frac{1}{a}$, ибо здесь при равновозможных случаях только один случай дает определенный шар. Отсюда, по (7), вероятность вынуть один из b определенных шаров будет $b \frac{1}{a}$ или $\frac{b}{a}$, что мы и нашли (1) для выражения вероятности вынуть шар белого цвета, когда число их есть b .

§ 7. Вероятность события необходимого, как видели (§ 3), есть 1; вследствие этого по доказанной теореме (§ 5) необходимо должно случиться одно из несовместных между собою событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$, если сумма их вероятностей есть 1, и обратно: сумма вероятностей событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$, несовместных между собою, [будет] 1, если одно из них необходимо имеет место. Так, если в сосуде из числа $b + b' + b''$ шаров b белого цвета, b' — черного, b'' — красного, то вероятность вынуть белый шар будет $\frac{b}{b + b' + b''}$, черный $\frac{b'}{b + b' + b''}$, красный $\frac{b''}{b + b' + b''}$. Сумма вероятностей этих событий есть $\frac{b}{b + b' + b''} + \frac{b'}{b + b' + b''} + \frac{b''}{b + b' + b''}$,

* Например, означенный № 1 (если мы каждый из них означим различными номерами 1, 2, 3, ..., a).

что, приводясь к 1, обнаруживает необходимость одного из них, т. е. вынуть шар или белый, или черный, или красный.

Два события, несовместные между собою, из которых при известных обстоятельствах одно необходимо имеет место, отличаются названием событий противоположных. Означая через p и q вероятности таких двух событий, мы по доказанному будем иметь

$$p + q = 1. \quad (8)$$

Вот какую связь представляют вероятности двух событий противоположных. Вследствие этого, по (8),

$$p = 1 - q, \quad q = 1 - p, \quad (9)$$

т. е. вероятность какого-либо события определится разностью 1 и вероятности события ему противоположного.

§ 8. Вторая теорема. Вероятность случиться событию E_1 вместе с событием E_2 есть произведение вероятности E_1 на вероятность, которую получает E_2 в том случае, когда E_1 имеет место.

В самом деле, пусть будет p вероятность события E_1 , и когда это событие имеет место, пусть будут

$$C_1, C_2, \dots, C_n \quad (10)$$

все равновозможные случаи, из которых m случаев

$$C_1, C_2, \dots, C_m \quad (11)$$

имеют необходимым следствием событие E_2 , не имеющее места при остальных $n - m$ случаях; p_2 , вероятность события E_2 в этом предложении, определится (§ 2) через

$$p_2 = \frac{m}{n}. \quad (12)$$

Если же мы назовем через P_0 вероятность случиться E_1 вместе с C_1 ; вероятности случиться E_1 с C_2 , E_1 с C_3 , ..., E_1 с C_m , E_1 с C_{m+1} , E_1 с C_{m+2} , ..., E_1 с C_n будут также P_0 , ибо по положению $C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots, C_n$ все суть случаи равновозможные после события E_1 .

Вследствие чего, по (7), mP_0 будет вероятность случиться событию E_1 вместе с одним из m случаев (11),

$$C_1, C_2, \dots, C_m,$$

или, что одно и то же, вместе с событием E_2 , которое они имеют необходимым следствием. Поэтому будем иметь

$$P = mP_0, \quad (13)$$

если назовем через P вероятность случиться E_1 вместе с E_2 . Точно так же по (7) в nP_0 находим вероятность случиться E_1 вместе с одним из n случаев (10)

$$C_1, C_2, \dots, C_m, \dots, C_n,$$

что приводится к p_1 , вероятности одного события E_1 , ибо вместе с этим событием всегда случится один из n случаев (10) как единственно возможных. А потому

$$nP_0 = p_1.$$

Исключая с помощью этого уравнения P_0 , из (13) находим

$$P = \frac{m}{n} p_1,$$

где, по (12), заменяя $\frac{m}{n}$ через p_2 , получим

$$P = p_1 p_2, \quad (14)$$

в чем и заключается предложенная теорема.

В частном случае, когда одно событие не имеет влияния на вероятность другого, по (14) P , вероятность случиться им вместе определится через произведение их вероятностей.

Например, если в сосуде из числа a шаров находятся b белого цвета, в другом из числа a' шаров b' белого цвета, то вероятность вынуть белый шар из первого сосуда будет $\frac{b}{a}$, из второго $\frac{b'}{a'}$. Отсюда, по (14), вероятность, что из обоих сосудов вынуты белые шары, определится произведением $\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'}$.

Здесь одно событие не имело влияния на вероятность другого. Вот пример, где происходит такое влияние.

Из сосуда, содержащего a шаров, в числе которых b шаров белого цвета, я вынимаю наудачу два шара один за другим, не положив назад вынутого; какая вероятность, что оба вынутые шара будут белые? Вероятность, что первый вынутый шар будет белый, есть $\frac{b}{a}$, и из оставшихся в сосуде $a-1$ шаров белых будет $b-1$ или b , смотря по тому, будет ли вынутый в первый раз шар белый или не белый. А следовательно, смотря по тому, будет ли вынут в первый раз шар белый или не белый; вероятность вынуть белый шар во второй раз будет $\frac{b-1}{a-1}$ или $\frac{b}{a-1}$. Вот влияние одного события на вероятность другого. Чтобы получить вероятность в оба раза вынуть белые шары, мы по доказанной теореме должны умножить $\frac{b}{a}$, вероятность в первый раз вынуть белый шар, на $\frac{b-1}{a-1}$, вероятность во второй раз вынуть белый в том предположении, что первый вынутый шар был белый.

§ 9. Предыдущую теорему легко распространить на большее число событий. Пусть будут p_1 — вероятность события E_1 , p_2 — вероятность события E_2 в том предположении, что событие E_1 имеет место, p_3 — вероятность события E_3 в том предположении, что оба события E_1 , E_2 имеют место. По (14) мы находим, что вероятность случиться E_1 вместе с E_2 есть $p_1 p_2$. Делая

$$p_1 p_2 = p, \quad (15)$$

мы в p будем иметь вероятность события *случиться E_1 вместе с E_2* , а поэтому вероятность такому событию случиться вместе с E_3 , или, что одно и то же, случиться трем событиям E_1 , E_2 , E_3 вместе, по (14), будет $p p_3$. Заменяя здесь p через $p_1 p_2$ по (15), находим для выражения этой вероятности $p_1 p_2 p_3$.

Переходя таким образом к 4, 5, 6, ... и т. д. событиям, мы убеждаемся, что P , вероятность случиться вместе μ событиям $E_1, E_2, \dots, E_\mu$,

определится уравнением

$$P = p_1 p_2 \dots p_\mu, \quad (16)$$

где p_1 — вероятность события E_1 ;

p_2 — вероятность события E_2 в предположении, что E_1 имело место;

p_3 — вероятность события E_3 в предположении, что E_1, E_2 имели место;

.....

p_μ — вероятность события E_μ в предположении, что $E_1, E_2, \dots, E_{\mu-1}$ имели место.

В частном случае, когда события $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ не имеют влияния друг на друга, P (16), вероятность случиться всем им вместе, приводится к произведению их вероятностей.

Так, например, вероятность вынуть белые шары из μ сосудов, содержащих

$$a_1, a_2, \dots, a_\mu$$

шаров разного цвета, в числе которых белых

$$b_1, b_2, \dots, b_\mu,$$

вынимая из каждого сосуда по одному шару, будет

$$\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \dots \frac{b_\mu}{a_\mu}.$$

Вероятность же вынуть сразу μ белых шаров из сосуда, заключающего a шаров, в числе которых b белых, будет

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b-1}{a-1} \cdot \frac{b-2}{a-2} \dots \frac{b-(\mu-1)}{a-(\mu-1)},$$

где $\frac{b}{a}$ есть вероятность вынуть белый шар в первый раз; $\frac{b-1}{a-1}$ — вероятность вынуть белый шар во второй раз в предположении, что первый вынутый шар был белый; $\frac{b-2}{a-2}$ — вероятность вынуть белый шар в третий раз в предположении, что первые два вынутые были белые, и т. д.

§ 10. С помощью предыдущих теорем мы доходим до следующего предложения:

Если событие F может случиться только тогда, когда имеет место одно из μ событий

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu,$$

после которых его вероятность становится равною

$$p_1, p_2, \dots, p_\mu,$$

вероятности же событий

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu$$

суть

$$P_1, P_2, \dots, P_\mu,$$

то вероятность события F есть

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \dots + P_\mu p_\mu.$$

В самом деле, по теореме второй (§ 8) вероятность случиться E_1 вместе с F есть P_1p_1 ; E_2 вместе с F — есть P_2p_2 ; E_3 вместе с F — есть P_3p_3 , ..., E_μ вместе с F — есть $P_\mu p_\mu$. Отсюда по первой теореме (§ 5) вероятность, что случится какое-либо из этих совпадений событий E_1 с F , E_2 с F , E_3 с F , ..., E_μ с F , или, что одно и то же, что случится F вместе с каким-либо из событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$, определится суммой

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \dots + P_\mu p_\mu. \quad (17)$$

Но по положению F и не может иначе случиться, как вместе с одним из событий

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu.$$

Следовательно, это выражение (17) и будет принадлежать вероятности события F .

Пусть будет, например, μ сосудов

$$A_1, A_2, \dots, A_\mu,$$

где A_1 включает a_1 шаров, в числе которых b_1 белого цвета, A_2 включает a_2 шаров, в числе которых b_2 белого цвета, ..., A_μ включает a_μ шаров,

в числе которых b_μ белого цвета. Вероятность вынуть белый шар будет

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_\mu}{a_\mu},$$

смотря по тому, будем ли мы вынимать шар из сосуда A_1 или $A_2 \dots$, или A_μ . Но если мы, не выбирая, опускаем руку в один из этих μ сосудов, то вероятности вынуться шару из сосудов

$$A_1, A_2, \dots, A_\mu$$

будут

$$\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}.$$

Отсюда вероятность, что шар, вынутый наудачу из этих μ сосудов, будет белого цвета, определится через

$$\frac{1}{\mu} \frac{b_1}{a_1} + \frac{1}{\mu} \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{1}{\mu} \frac{b_\mu}{a_\mu},$$

или

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_\mu}{a_\mu} \right).$$

Рассматривая события $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ как различные гипотезы, в которых событие F может случиться, это предложение выражают так: вероятность события есть сумма произведений вероятностей каждой из возможных и взаимно друг друга исключающих гипотез на вероятности его в этих гипотезах.

§ 11. Третья теорема. Если событие F может случиться только тогда, когда имеет место одно из μ событий

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu,$$

после которых его вероятность

$$p_1, p_2, \dots, p_\mu,$$

вероятности же событий

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu$$

суть

$$P_1, P_2, \dots, P_\mu,$$

то вероятность, что с F имело место событие E_1 , есть

$$\frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu}.$$

Для доказательства этого назовем через P вероятность E_1 в предположении, что F имеет место. По теореме второй (§ 8), вероятность случиться вместе F и E_1 будет

$$(P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu) P,$$

ибо, как видели (§ 10), $P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu$ есть вероятность события F , а P по положению есть вероятность E_1 в том случае, когда F имеет место. Но эта же вероятность — вероятность случиться вместе F и E_1 — по теореме второй (§ 8) есть $P_1 p_1$, ибо P_1 есть вероятность события E_1 , а p_1 вероятность F , если E_1 имеет место. Следовательно,

$$(P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu) P = P_1 p_1.$$

Откуда

$$P = \frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu}, \quad (18)$$

что и следовало доказать.

Так, если из μ сосудов предыдущего примера (§ 10) вынулс я наудачу белый шар, то вероятность, что он вынулс я из сосуда A_1 , определится через

$$\frac{\frac{1}{\mu} \frac{b_1}{a_1}}{\frac{1}{\mu} \frac{b_1}{a_1} + \frac{1}{\mu} \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{1}{\mu} \frac{b_\mu}{a_\mu}},$$

где $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_\mu}{a_\mu}$ — вероятности вынуть белый шар, когда вынимаем шар из сосудов $A_1, A_2, \dots, A_\mu$, а $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}$ — вероятности вынуться шару из сосудов $A_1, A_2, \dots, A_\mu$.

Рассматривая события $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ как различные гипотезы, в которых событие F может иметь место, это предложение выражают следующим образом: «вероятность, что событие имело место в предполагаемой гипотезе, есть произведение вероятности этой гипотезы на вероятность события в ней, разделенное на сумму таких произведений

относительно всех возможных и взаимно друг друга исключающих гипотез».

§ 12. Если же событие F' находится под теми же самыми условиями, как и F , так что первое случается в той же самой гипотезе, в какой случилось второе, то, находя, по § 11, для вероятностей гипотез

$$E_1, E_2, \dots, E_\mu,$$

когда событие F имеет место,

$$\frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu}, \frac{P_2 p_2}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu}, \dots, \frac{P_\mu p_\mu}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu}$$

и называя через $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu$ вероятности события F' в гипотезах $E_1, E_2, \dots, E_\mu$, мы, по § 10, заключаем, что вероятность F' будет

$$\frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu} \pi_1 + \dots + \frac{P_\mu p_\mu}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu} \pi_\mu,$$

или

$$\frac{P_1 p_1 \pi_1 + P_2 p_2 \pi_2 + \dots + P_\mu p_\mu \pi_\mu}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_\mu p_\mu}.$$

Вот вероятность события F' , условливаемая событием F , происходящим под теми же самыми условиями, как и F' .

Например, если я вынул наудачу белый шар из сосуда, не зная, какой это именно сосуд из числа сосудов § 10, то вероятность вынуть еще белый шар, вынимая из того же самого сосуда, будет

$$\frac{\frac{1}{\mu} \frac{b_1}{a_1} \frac{b_1 - 1}{a_1 - 1} + \frac{1}{\mu} \frac{b_2}{a_2} \frac{b_2 - 1}{a_2 - 1} + \dots + \frac{1}{\mu} \frac{b_\mu}{a_\mu} \frac{b_\mu - 1}{a_\mu - 1}}{\frac{1}{\mu} \frac{b_1}{a_1} + \frac{1}{\mu} \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{1}{\mu} \frac{b_\mu}{a_\mu}}.$$

II

О ПОВТОРЕНИИ СОБЫТИЙ

§ 13. Показавши основные начала теории вероятностей, мы приступим к определению вероятности повториться данным событиям в известном числе случаев известное число раз.

Мы видели (§ 9), что если $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ суть вероятности событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$, то вероятность, что события $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ будут иметь место, определится произведением $p_1 p_2 \dots p_\mu$. Если же предположим, что из числа μ событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ t событий тождественны E , которого вероятность p , прочие же $\mu - t$ событий тождественны F , которого вероятность $1 - p$, то по предыдущему $p^t (1 - p)^{\mu - t}$ будет вероятность случиться в известном, определенном порядке t раз событию E и $\mu - t$ [раз] событию F . А поэтому, если K будет число всех различных видоизменений, возможных в порядке следования t событий E и $\mu - t$ событий F , то (§ 6) $K p^t (1 - p)^{\mu - t}$ будет вероятность повториться в μ случаях t раз событию E и $\mu - t$ событию F .

Что же касается до числа K , числа различных видоизменений в порядке следования t событий E и $\mu - t$ событий F , то при выводе формулы бинома Ньютона показано, что это число равняется

$$\frac{\mu!}{t! (\mu - t)!}.$$

Итак, называя через $P_{\mu, t}$ вероятность в μ случаях повториться t раз событию E (и, следовательно, противоположному ему повториться $\mu - t$ раз), мы для определения $P_{\mu, t}$ имеем уравнение

$$P_{\mu, t} = \frac{\mu!}{t! (\mu - t)!} p^t (1 - p)^{\mu - t}, \quad (19)$$

где p есть вероятность события E .

Таким же образом предполагая, что из числа μ событий $E_1, E_2, \dots, E_\mu$ t_1 событий тождественны E'_1 , t_2 тождественны E'_2 , $\dots$, t_{s-1} тождественны E'_{s-1} и, наконец, остальные $\mu - t_1 - t_2 - \dots - t_{s-1}$ тождественны F , событию противоположному $E'_1, E'_2, \dots, E'_{s-1}$, и, называя через $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}, 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1}$ вероятности событий $E'_1, E'_2, \dots, E'_{s-1}, F$, мы, по § 9, заключаем, что $p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_{s-1}^{t_{s-1}} (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1})^{\mu - t_1 - \dots - t_{s-1}}$ будет вероятность случиться в определенном порядке t_1 событиям E'_1 , t_2 событиям E'_2 , $\dots$, t_{s-1} событиям E'_{s-1} , $\mu - t_1 - t_2 - \dots - t_{s-1}$ событиям F . Замечая же, что число видоизменений в порядке следования t_1 событий E'_1 , t_2 событий E'_2 , $\dots$,

m_{s-1} событий $E'_{s-1}, \dots, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1}$ событий F есть, как доказано при бинOME Ньютона,

$$\frac{\mu!}{m_1! m_2! \dots m_{s-1}! (\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1})!},$$

мы, по (§ 6), заключаем, что

$$\frac{\mu! p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_{s-1}^{m_{s-1}} (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1})^{\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1}}}{m_1! m_2! \dots m_{s-1}! (\mu - m_1 - \dots - m_{s-1})!}$$

есть вероятность повториться в μ случаях m_1 раз событию E'_1 , m_2 — событию E'_2 , $\dots$, m_{s-1} — событию E'_{s-1} , $\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1}$ — событию, противоположному $E'_1, E'_2, \dots, E'_{s-1}$, где $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}$ суть вероятности событий $E'_1, E'_2, \dots, E'_{s-1}$. Итак, называя вероятность этого P , мы для определения P имеем уравнение

$$P = \frac{\mu! p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_{s-1}^{m_{s-1}} (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1})^{\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1}}}{m_1! m_2! \dots m_{s-1}! (\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1})!}. \quad (20)$$

§ 14. Переменяя в уравнении (19) p на $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots, p_{s-1}$, находим

$$\begin{aligned} & \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} p_1^m (1 - p_1)^{\mu - m}, \quad \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} p_2^m (1 - p_2)^{\mu - m}, \dots, \\ & \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} p_n^m (1 - p_n)^{\mu - m}, \dots, \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu - m} \end{aligned}$$

для величины вероятностей событию E повториться в μ случаях m раз, когда вероятность E предполагаем равною $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots, p_{s-1}$. Если же все эти $s - 1$ гипотез одинаково возможны и нет места иным гипотезам, то общая их вероятность $\frac{1}{s - 1}$. Вследствие чего, по § 11,

$$\frac{1}{s - 1} \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} p_n^m (1 - p_n)^{\mu - m} \quad (21)$$

$$\frac{1}{s - 1} \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} \{ p_1^m (1 - p_1)^{\mu - m} + p_2^m (1 - p_2)^{\mu - m} + \dots + p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu - m} \}$$

будет вероятность, что событие E , повторившееся в μ случаях m раз,

имело вероятностью p_n . Изображая вероятность этого через V_{p_n} , мы для определения ее, сократив одинаких производителей числителя и знаменателя (21), находим

$$V_{p_n} = \frac{p_n^m (1 - p_n)^{\mu-m}}{p_1^m (1 - p_1)^{\mu-m} + p_2^m (1 - p_2)^{\mu-m} + \dots + p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu-m}}. \quad (22)$$

Например, если нам известно только, что в сосуде s шаров и они двух цветов: белые и черные, то вероятность вынуть оттуда белый шар одинаково может быть

$$\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s},$$

смотря по тому, будет ли там 1, 2, ..., $s-1$ шаров белого цвета. Если же мы знаем, что, вынимая отсюда по одному μ шаров, всякий раз полагая назад вынутый, мы m раз имели шар белый, то по (22), делая там $p_1 = \frac{1}{s}$, $p_2 = \frac{2}{s}$, ..., $p_{s-1} = \frac{s-1}{s}$, найдем в

$$\frac{\left(\frac{n}{s}\right)^m \left(1 - \frac{n}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu-m} + \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu-m} + \dots + \left(\frac{s-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{s-1}{s}\right)^{\mu-m}}$$

выражение вероятности, что вынуть белый шар имело вероятностью $\frac{n}{s}$, или, что в сосуде было n шаров белого цвета.

По (22) мы находим

$$\frac{p_1^m (1 - p_1)^{\mu-m}}{p_1^m (1 - p_1)^{\mu-m} + p_2^m (1 - p_2)^{\mu-m} + \dots + p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu-m}},$$

$$\frac{p_2^m (1 - p_2)^{\mu-m}}{p_1^m (1 - p_1)^{\mu-m} + p_2^m (1 - p_2)^{\mu-m} + \dots + p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu-m}},$$

$$\dots$$

$$\frac{p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu-m}}{p_1^m (1 - p_1)^{\mu-m} + p_2^m (1 - p_2)^{\mu-m} + \dots + p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu-m}}$$

для величины вероятностей, что событие, повторившееся в μ случаях

m раз, имело вероятностью $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}$; но при этом вероятность повториться ему в μ' случаях m' раз по (21) есть

$$\frac{\mu'!}{m'!(\mu' - m')!} p_1^{m'} (1 - p_1)^{\mu' - m'}, \quad \frac{\mu'!}{m'!(\mu' - m')!} p_2^{m'} (1 - p_2)^{\mu' - m'}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \frac{\mu'!}{m'!(\mu' - m')!} p_{s-1}^{m'} (1 - p_{s-1})^{\mu' - m'}.$$

Следовательно, по § 12,

$$\frac{\mu'!}{m'!(\mu' - m')!} \frac{p_1^m (1 - p_1)^{\mu - m} + p_2^m (1 - p_2)^{\mu - m} + \dots + p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu - m}}{p_1^{m'} (1 - p_1)^{\mu' - m'} \cdot p_1^m (1 - p_1)^{\mu - m} + p_2^{m'} (1 - p_2)^{\mu' - m'} \cdot p_2^m (1 - p_2)^{\mu - m} + \dots}$$

$$\times \{p_1^{m'} (1 - p_1)^{\mu' - m'} \cdot p_1^m (1 - p_1)^{\mu - m} + p_2^{m'} (1 - p_2)^{\mu' - m'} \cdot p_2^m (1 - p_2)^{\mu - m} + \dots$$

$$\dots + p_{s-1}^{m'} (1 - p_{s-1})^{\mu' - m'} \cdot p_{s-1}^m (1 - p_{s-1})^{\mu - m}\} \quad (23)$$

будет вероятность повториться событию в μ' случаях m' раз, когда оно в μ случаях имело место m раз и $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}$ суть единственно и равно возможные величины его вероятности.

Так, в предыдущем примере

$$\frac{\mu'!}{m'!(\mu' - m')!} \frac{\left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu - m} + \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu - m} + \dots + \left(\frac{s-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{s-1}{s}\right)^{\mu - m}}{\left(\frac{1}{s}\right)^{m'} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu' - m'} \left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu - m} + \left(\frac{2}{s}\right)^{m'} \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu' - m'} \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu - m} + \dots}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{1}{s}\right)^{m'} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu' - m'} \left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu - m} + \left(\frac{2}{s}\right)^{m'} \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu' - m'} \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu - m} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{s-1}{s}\right)^{m'} \left(1 - \frac{s-1}{s}\right)^{\mu' - m'} \left(\frac{s-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{s-1}{s}\right)^{\mu - m} \right\}$$

будет вероятность в μ' раз вынуться m' белых шаров, если в μ раз вынулись m белых.

III

О ПОВТОРЕНИИ ДВУХ СОБЫТИЙ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО РАЗ

§ 15. Выражения вероятностей, как могли заметить из предыдущих параграфов, заключают большею частью произведение такого вида

$$x! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x - 1) x.$$

Чтобы найти значение его для x довольно большого, полагаем

$$e^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \dots e^2 \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-1} = A, \quad (24)$$

где, сократив одинаких множителей числителя и знаменателя и собравши все производители, равные e^2 , которых число $x-1$, находим

$$1^2 \cdot 2^2 \dots (x-1)^2 x^{-2x+1} e^{2x-2} = A. \quad (25)$$

Отсюда, по умножении всего на $x^{2x+1} e^{-2x+2}$ и извлечении квадратного корня, имеем

$$x! = e \sqrt{A} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (26)$$

Так выражается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$ через A ; остается только определить это количество.

Для этого назовем через C произведение бесконечного числа производителей

$$e^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \dots e^2 \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-1} \dots$$

По равенству

$$C = e^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \dots e^2 \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-1} \dots \quad (27)$$

мы будем иметь

$$e^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \dots e^2 \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-1} = \frac{C}{e^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x+1} e^2 \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x+3} \dots},$$

что для A , по (24), дает такое выражение:

$$A = \frac{C}{e^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x+1} e^2 \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x+3} \dots},$$

которое иначе можем написать так:

$$A = C e^{-\lg e^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x+1} - \lg e^2 \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x+3} - \dots}. \quad (28)$$

Но

$$\begin{aligned}
 \lg e^2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x+1} &= \lg e^2 + (2x+1) \lg \frac{x}{x+1} = \\
 &= 2 + 2(x+1) \lg \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) - \lg \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) = \\
 &= 2 - 2 - \frac{2}{2(x+1)} - \frac{2}{3(x+1)^2} - \frac{2}{4(x+1)^3} - \dots \\
 &\quad \dots + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \dots = \\
 &= -\frac{1}{2 \cdot 3(x+1)^2} - \frac{2}{3 \cdot 4(x+1)^3} - \frac{3}{4 \cdot 5(x+1)^4} - \dots
 \end{aligned} \tag{29}$$

Это выражение $\lg e^2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x+1}$ мы можем представить иначе, заметив, что

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x+1-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{6(x+1)^2} + \frac{1}{6(x+1)^3} + \frac{1}{6(x+1)^4} + \dots$$

Внося отсюда значение $\frac{1}{6(x+1)^2} + \frac{1}{6(x+1)^3} + \dots$ в (29), находим

$$\begin{aligned}
 \lg e^2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x+1} &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4 \cdot 5} \right) \frac{1}{(x+1)^4} + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{5 \cdot 6} \right) \frac{1}{(x+1)^5} + \dots
 \end{aligned} \tag{30}$$

Рассматривая это выражение, мы замечаем, что все коэффициенты $\frac{1}{6} - \frac{3}{4 \cdot 5}$, $\frac{1}{6} - \frac{4}{5 \cdot 6}$, ... имеют значения положительные, а поэтому

$$\lg e^2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x+1} > -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right). \tag{31}$$

С другой стороны, коэффициенты $\frac{1}{6} - \frac{3}{4 \cdot 5}$, $\frac{1}{6} - \frac{4}{5 \cdot 6}$, ... менее $\frac{1}{6}$, а вместе с тем и менее коэффициентов выражения

$$\begin{aligned}
 &\frac{3}{18} \cdot \frac{1}{(x+1)^4} + \frac{3}{18} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^5} + \frac{3}{18} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(x+1)^6} + \\
 &+ \dots = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{(x+1-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right).
 \end{aligned}$$

Вследствие этого (28) дает

$$Ce^{\frac{1}{6x}} > A; \quad Ce^{\frac{1}{6x} - \frac{1}{18x^3}} < A,$$

и, по (26),

$$x! < e\sqrt{Cx}^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}}, \quad x! > e\sqrt{Cx}^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{36x^3}}. \quad (33)$$

Что касается до постоянного количества $e\sqrt{C}$, мы, по (33), находим

$$e\sqrt{C} > \frac{x!}{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}}}, \quad e\sqrt{C} < \frac{x!}{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{36x^3}}},$$

где, давши x величину довольно значительную, например 100, получим две величины, весьма мало разнствующие между собою, и тем менее, чем более x , из которых одна будет более $e\sqrt{C}$, другая менее $e\sqrt{C}$. Числовые вычисления этих величин обнаруживают, что $e\sqrt{C}$ равняется 2,506 628 28..., что, как известно, есть величина $\sqrt{2\pi}$ во сто миллионных долях. Следовательно, по (33) можно принять с достаточной точностью

$$x! < \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}}, \quad x! > \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{36x^3}}. \quad (34)$$

Пренебрегая здесь отрицательными степенями x перед первою степенью его, по (34), можем принять для выражения $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$ такое уравнение:

$$x! = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (35)$$

Эту формулу обыкновенно и употребляют в теории вероятностей.

§ 16. С помощью формулы (35) нетрудно определить значение

$$P_{\mu, m} = \frac{\mu!}{m! (\mu - m)!} p^m (1 - p)^{\mu - m} \quad (36)$$

для μ , m , $\mu - m$ больших чисел, что, как мы видели в § 13, есть вероятность двум противоположным событиям E и F , которых вероятности p и $1 - p$, в μ случаях повториться первому m раз, второму $\mu - m$.

Делая последовательно $x = \mu, m, \mu - m$ в формуле (35), находим

$$\begin{aligned}\mu! &= \sqrt{2\pi\mu}^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\mu}, \\ m! &= \sqrt{2\pi m}^{m+\frac{1}{2}} e^{-m}, \\ (\mu - m)! &= \sqrt{2\pi(\mu - m)}^{\mu-m+\frac{1}{2}} e^{-\mu+m}.\end{aligned}$$

Внеся эти выражения $\mu!, m!, (\mu - m)!$ в (36), имеем

$$P_{\mu, m} = \frac{\sqrt{2\pi\mu}^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi m}^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \sqrt{2\pi(\mu - m)}^{\mu-m+\frac{1}{2}} e^{-\mu+m}} p^m (1 - p)^{\mu-m},$$

что по сокращении может быть представлено так:

$$P_{\mu, m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} \left(\frac{p\mu}{m}\right)^m \left(\frac{(1-p)\mu}{\mu - m}\right)^{\mu-m}. \quad (37)$$

Полагая же

$$m - p\mu = Z \quad (38)$$

и замечая, что вследствие этого уравнения

$$Z = m - p\mu = (1 - p)\mu - \mu + m,$$

находим

$$\frac{p\mu}{m} = 1 - \frac{Z}{m}, \quad \frac{(1-p)\mu}{\mu - m} = 1 + \frac{Z}{\mu - m}, \quad (39)$$

что дает, по (37), такое выражение для $P_{\mu, m}$:

$$P_{\mu, m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} \left(1 - \frac{Z}{m}\right)^m \left(1 + \frac{Z}{\mu - m}\right)^{\mu-m}. \quad (40)$$

Для величин Z , незначительных в отношении m и $\mu - m$, это выражение $P_{\mu, m}$ может быть представлено весьма просто. Написавши уравнение (40) таким образом:

$$\begin{aligned}P_{\mu, m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^{\lg \left(1 - \frac{Z}{m}\right)^m \left(1 + \frac{Z}{\mu - m}\right)^{\mu-m}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^{m \lg \left(1 - \frac{Z}{m}\right) + (\mu - m) \lg \left(1 + \frac{Z}{\mu - m}\right)},\end{aligned}$$

разлагаем $\lg\left(1 - \frac{Z}{m}\right)$, $\lg\left(1 + \frac{Z}{\mu - m}\right)$ в ряды

$$\begin{aligned} & -\frac{Z}{m} - \frac{Z^2}{2m^2} - \frac{Z^3}{3m^3} - \dots, \quad \frac{Z}{\mu - m} - \frac{Z^2}{2(\mu - m)^2} + \frac{Z^3}{3(\mu - m)^3} - \dots \\ P_{\mu, m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^m \left(-\frac{Z}{m} - \frac{Z^2}{2m^2} - \dots \right) + (\mu - m) \left(\frac{Z}{\mu - m} - \frac{Z^2}{2(\mu - m)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^{-\frac{Z^2}{2m} - \frac{Z^3}{3m^2} - \dots - \frac{Z^2}{2(\mu - m)} + \frac{Z^3}{3(\mu - m)^2} - \dots}, \end{aligned}$$

где, пренебрегая $\frac{Z^3}{3m^2}$, $\dots$, $\frac{Z^3}{3(\mu - m)^2}$, $\dots$, величинами незначительными по незначительности Z в отношении m , $\mu - m$, находим

$$\begin{aligned} P_{\mu, m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu - m} \right) Z^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^{-\frac{\mu}{2m(\mu - m)} Z^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

или

$$P_{\mu, m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{m(\mu - m)}} e^{-\frac{\mu}{2m(\mu - m)} (m - p\mu)^2}, \quad (42)$$

внеся значение Z по (38).

Но $\frac{\mu}{m(\mu - m)}$, по (39), есть $\frac{\left(1 - \frac{Z}{m}\right) \left(1 + \frac{Z}{\mu - m}\right)}{p(1 - p)\mu}$, следовательно, пренебрегая $\frac{Z}{m}$, $\frac{Z}{\mu - m}$, мы можем принять $\frac{1}{p(1 - p)\mu}$ за величину $\frac{\mu}{m(\mu - m)}$; а поэтому выражение $P_{\mu, m}$ (41) представится так:

$$P_{\mu, m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1 - p)\mu}} e^{-\frac{Z^2}{2p(1 - p)\mu}}. \quad (43)$$

Вот как выражается вероятность, что в μ случаях событие, которого вероятность p , повторится m раз и, следовательно, остальные $\mu - m$ раз будет иметь место событие противоположное, которого вероятность $1 - p$, где, по (38),

$$m = p\mu + Z. \quad (44)$$

мы это выражение (47) $\prod_{\mu, m}^{m+s}$ напомним так:

$$\prod_{\mu, m}^{m+s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)^\mu}} \sum_{k=0}^s e^{-\frac{(Z_0+k)^2}{2p(1-p)^\mu}},$$

где, положив

$$\frac{Z_0}{\sqrt{2p(1-p)^\mu}} = X, \quad \frac{s+1}{\sqrt{2p(1-p)^\mu}} = x, \quad (48)$$

находим

$$\prod_{\mu, m}^{m+s} = \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2}. \quad (49)$$

Так определяется $\prod_{\mu, m}^{m+s}$ через сумму $s+1$ членов. Если число $s+1$ не так велико, эту сумму нетрудно найти. Но вычисление будет очень продолжительно, когда $s+1$ велико; свойства выражения (49) облегчают в этом случае определение числовой его величины. Этим мы теперь и займемся.

§ 18. Когда $s+1$ так велико, что можно пренебречь $\frac{2x}{\sqrt{\pi(s+1)}}$ (при определении $\prod_{\mu, m}^{m+s}$), то можем принять

$$\frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{k=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2}. \quad (50)$$

Для доказательства этого предполагаем сначала X количеством положительным, и так как x (48) всегда имеет значение положительное, то в этом случае

$$te^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} < \sum_{k=0}^{t-1} e^{-\left(X + \frac{t(l-1)+k}{t(s+1)}x\right)^2} < te^{-\left(X + \frac{l-1}{s+1}x\right)^2},$$

($l=1, \dots, s+1$), (51)

ибо при X и x положительных

$$X^2 < \left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2 < \left(X + \frac{1}{s+1}x\right)^2, \quad (k=1, \dots, t-1),$$

$$\left(X + \frac{1}{s+1}x\right)^2 < \left(X + \frac{t+k}{t(s+1)}x\right)^2 < \left(X + \frac{2}{s+1}x\right)^2, \quad (k=1, \dots, t-1),$$

и т. д.

Но, сложив почленно эти неравенства (51) и полученные суммы умножив на $\frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}}$, находим,

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k+1}{s+1}x\right)^2} &< \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{k=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2} < \\ &< \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2} - \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{k=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2} < \\ &< \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} (e^{-X^2} - e^{-(X+x)^2}). \end{aligned} \quad (52)$$

Следовательно, пренебрегая количеством

$$\frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} (e^{-X^2} - e^{-(X+x)^2}),$$

которое $< \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}}$, можем принять разность

$$\frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2} - \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{k=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2} \quad (53)$$

за нуль.

В неравенствах (51), а потому и в (52) переменятся только знаки $<$, $>$ на $>$, $<$, если X и вместе с ним

$$X + \frac{1}{t(s+1)}x, X + \frac{2}{t(s+1)}x, \dots, X + \frac{t(s+1)}{t(s+1)}x$$

будут количества отрицательные; ибо в этом случае

$$\begin{aligned} \left(X + \frac{1}{s+1}x\right)^2 &< \left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2 < X^2, \quad (k=1, 2, \dots, t-1), \\ \left(X + \frac{2}{s+1}x\right)^2 &< \left(X + \frac{k+t}{t(s+1)}x\right)^2 < \left(X + \frac{1}{s+1}x\right)^2, \quad (k=1, 2, \dots, t-1), \end{aligned}$$

и т. д. Но и при обратных знаках неравенств из (52), пренебрегая

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}(s+1)} (e^{-X^2} - e^{-(X+x)^2}),$$

ВЫВОДИМ

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2} - \frac{x}{\sqrt{\pi}t(s+1)} \sum_{k=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2} = 0.$$

Наконец, если X количество отрицательное, но не все члены ряда

$$X + \frac{1}{t(s+1)}x, X + \frac{2}{t(s+1)}x, \dots, X + \frac{t(s+1)}{t(s+1)}x$$

имеют значения отрицательные, а, например, начиная с $X + \frac{t\zeta+1}{t(s+1)}x$, или с $X + \frac{t\zeta+2}{t(s+1)}x, \dots$, или с $X + \frac{t(\zeta+1)}{t(s+1)}x$, они становятся количествами положительными, то в этом случае для $X, X + \frac{1}{t(s+1)}x, \dots, X + \frac{t\zeta}{t(s+1)}x$, как количеств отрицательных, имеем неравенства, обратные неравенствам (51):

$$te^{-\left(X + \frac{l-1}{s+1}x\right)^2} < \sum_{k=0}^{t-1} e^{-\left(X + \frac{t(l-1)+k}{t(s+1)}x\right)^2} < te^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2}, \quad (l=1, 2, \dots, \zeta). \quad (54)$$

Для

$$X + \frac{t(\zeta+1)}{t(s+1)}x, X + \frac{t(\zeta+1)+1}{t(s+1)}x, \dots, X + \frac{t(s+1)}{t(s+1)}x$$

как количеств положительных, по (51),

$$te^{-\left(X + \frac{l+1}{s+1}x\right)^2} < \sum_{k=0}^{t-1} e^{-\left(X + \frac{tl+k}{t(s+1)}x\right)^2} < te^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2}, \quad (l=\zeta+1, \dots, s+1) \quad (55)$$

и для всяких величин $X + \frac{t\zeta}{t(s+1)}x, X + \frac{t\zeta+1}{t(s+1)}x, \dots, X + \frac{t(\zeta+1)-1}{t(s+1)}x$

$$0 < \sum_{k=0}^{t-1} e^{-\left(X + \frac{t\zeta+k}{t(s+1)}x\right)^2} < t. \quad (56)$$

Складывая почленно неравенства (54), (55), (56) и умножая полученные

суммы на $\frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}}$, находим

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \left(\sum_{l=0}^{\zeta-1} e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} + \sum_{l=\zeta+2}^{s+1} e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} \right) < \\ & < \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{l=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{l}{t(s+1)}x\right)^2} < \\ & < \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \left(\sum_{l=1}^{\zeta} e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} + 1 + \sum_{l=\zeta+1}^s e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} \right), \end{aligned}$$

откуда разность

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{l=0}^s e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} - \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{l=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{l}{t(s+1)}x\right)^2} \\ & \text{менее } \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{l=\zeta}^{s+1} e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} \text{ и более } \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} (1 - e^{-X^2}). \end{aligned}$$

Но числовые значения этих величин менее $\frac{2x}{\sqrt{\pi(s+1)}}$; следовательно, пренебрегая ими, можем принять и в этом последнем случае разность (53) за нуль, что и следовало доказать.

Заменяя в уравнении (50) $s+1$ через t и t через $s+1$, мы будем иметь верно до $\frac{2x}{\sqrt{\pi t}}$

$$\frac{x}{\sqrt{\pi t}} \sum_{l=0}^{t-1} e^{-\left(X + \frac{l}{t}x\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{\pi t(s+1)}} \sum_{k=0}^{t(s+1)-1} e^{-\left(X + \frac{k}{t(s+1)}x\right)^2}, \quad (57)$$

что в совокупности с (50) дает уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{\pi t}} \sum_{l=0}^{t-1} e^{-\left(X + \frac{l}{t}x\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{\pi(s+1)}} \sum_{k=0}^s e^{-\left(X + \frac{k}{s+1}x\right)^2}, \quad (58)$$

погрешность которого будет не более суммы погрешностей уравнений (50) и (57) и, следовательно, менее $\frac{2x}{\sqrt{\pi(s+1)}} + \frac{2x}{\sqrt{\pi t}}$.

§ 19. По этому свойству выражения

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \sum_{l=0}^s e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2}$$

мы можем легко найти числовое значение его верно до $\frac{2x}{\sqrt{\pi}(s+1)}$ в 12 десятичных цифрах для всех величин X и $X+x$ от -50 до $+50$, выраженных в биллионных долях (что для нас совершенно достаточно), когда знаем для $Z=X$ и $Z=X+x$ значения

$$T(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(Z + \frac{k}{10^{13}}\right)^2}. \quad (59)$$

В самом деле. Для x в биллионных долях и менее 100, как предполагают условия $-50 < X < 50$, $-50 < X+x < 50$, произведение $10^{13}x$ будет число целое и меньше 10^{15} . А в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}x-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(X + \frac{10^{13}x+k}{10^{13}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=10^{13}x}^{10^{15}-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2}, \end{aligned}$$

где, заменяя по (59)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2}, \\ &\frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(X + \frac{10^{13}x+k}{10^{13}}\right)^2} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(X+x + \frac{k}{10^{13}}\right)^2} \end{aligned}$$

через $T(X)$, $T(X+x)$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}x-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2} &= T(X) - T(X+x) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}x-1} e^{-\left(X + \frac{10^{13}+k}{10^{13}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Но для $X, X \pm x$, бóльших — 50 и меньших 50, количество

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}x-1} e^{-\left(X + \frac{10^{15}+k}{10^{13}}\right)^2}$$

менее

$$\frac{10^{13}x}{\sqrt{\pi} 10^{13}} e^{-\left(-50 + \frac{10^{15}}{10^{13}}\right)^2},$$

а потому гораздо менее $\frac{1}{100\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$. Следовательно, пренебрегая этим, можем принять

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}x-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2} = T(X) - T(X \pm x). \quad (60)$$

Но (58) для $t = 10^{13}x$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}x-1} e^{-\left(X + \frac{k}{10^{13}}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \sum_{l=0}^s e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2}$$

верно до $\frac{2x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \pm \frac{2}{\sqrt{\pi} 10^{13}}$ или более чем до

$$\frac{2x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \pm 0,000\,000\,000\,000\,2.$$

Отсюда, по (60), верно до $\frac{2x}{\sqrt{\pi}(s+1)}$ в 12 десятичных цифрах

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \sum_{l=0}^s e^{-\left(X + \frac{l}{s+1}x\right)^2} = T(X) - T(X \pm x). \quad (61)$$

Мы не будем заниматься составлением таблицы значений $T(Z)$. По уравнению (59)

$$T(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{15}-1} e^{-\left(Z + \frac{k}{10^{13}}\right)^2}$$

это дело возможное, хотя чрезвычайно трудное, требующее определения и сложения $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ членов, что превосходит всякие

силы. Но есть способы, облегчающие эту выкладку; с помощью их и найдены значения

$T(0), T(0,01), T(0,02), \dots, T(2,98), T(2,99), T(3), T(4), T(5)$, помещенные в конце книги* под названием таблица T . Что же касается до значений $T(Z)$ при Z — величине отрицательной, то, полагая в (61) $X = -\frac{s}{s+1}x$ и $X=0$, находим

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi}(s+1)} \sum_{k=0}^s e^{-\left(\frac{k}{s+1}x\right)^2} = T\left(-\frac{s}{s+1}x\right) - T\left(\frac{1}{s+1}x\right);$$

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}(s+1)} \sum_{k=0}^s e^{-\left(\frac{k}{s+1}x\right)^2} = T(0) - T(x).$$

Откуда заключаем

$$T\left(-\frac{s}{s+1}x\right) - T\left(\frac{1}{s+1}x\right) = T(0) - T(x),$$

что для s чрезвычайно большого будет

$$T(-x) - T(0) = T(0) - T(x),$$

или

$$T(-x) = 2T(0) - T(x).$$

Но $T(0)$, как видно из таблицы T , есть 0,5, следовательно,

$$T(-x) = 1 - T(x). \quad (62)$$

§ 20. Вследствие уравнения (61) найденное нами выражение $\prod_{\mu, m}^{m+s}$ (49) приводится к следующему

$$\prod_{\mu, m}^{m+s} = T(X) - T(X+x),$$

откуда, внося значения X, x из (48) и потом значение Z из (44), находим

$$\prod_{\mu, m}^{m+s} = T\left(\frac{m - p\mu}{\sqrt{2p(1-p)\mu}}\right) - T\left(\frac{m + s + 1 - p\mu}{\sqrt{2p(1-p)\mu}}\right). \quad (63)$$

* См. стр. 188—189.— *Ред.*

Вот как выражается через T вероятность, что в μ случаях событие, которого вероятность p , повторится не менее t раз и не более $t+s$.

Так, делая постепенно t равным

$$p\mu - \sqrt{2p(1-p)\mu}, \quad p\mu - 2\sqrt{2p(1-p)\mu}, \quad p\mu - 3\sqrt{2p(1-p)\mu}, \\ p\mu - 4\sqrt{2p(1-p)\mu}, \quad p\mu - 5\sqrt{2p(1-p)\mu},$$

и соответственно s равным

$$2\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1, \quad 4\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1, \quad 6\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1, \\ 8\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1, \quad 10\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1,$$

по уравнению (63) находим

$$\prod_{\mu, p\mu - \sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + \sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = T(-1) - T(1), \quad \prod_{\mu, p\mu - 2\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 2\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = T(-2) - T(2), \\ \prod_{\mu, p\mu - 3\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 3\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = T(-3) - T(3), \quad \prod_{\mu, p\mu - 4\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 4\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = T(-4) - T(4), \\ \prod_{\mu, p\mu - 5\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 5\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = T(-5) - T(5),$$

или, внося выражение $T(-1)$, $T(-2)$, $T(-3)$, $T(-4)$ через $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$, $T(5)$, по (62),

$$\prod_{\mu, p\mu - \sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + \sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 1 - 2T(1), \quad \prod_{\mu, p\mu - 2\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 2\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 1 - 2T(2), \\ \prod_{\mu, p\mu - 3\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 3\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 1 - 2T(3), \quad \prod_{\mu, p\mu - 4\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 4\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 1 - 2T(4), \\ \prod_{\mu, p\mu - 5\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 5\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 1 - 2T(5).$$

Находя значения $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$, $T(5)$ [в таблице T , отсюда имеем

$$\prod_{\mu, p\mu - \sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + \sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 0,842\,700\,8, \quad \prod_{\mu, p\mu - 2\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 2\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 0,995\,322\,4, \\ \prod_{\mu, p\mu - 3\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 3\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 0,999\,977\,9, \quad \prod_{\mu, p\mu - 4\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 4\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 0,999\,999\,984\,582, \\ \prod_{\mu, p\mu - 5\sqrt{2p(1-p)\mu}}^{p\mu + 5\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1} = 0,999\,999\,999\,998^*.$$

* Верно до $\frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2p(1-p)\mu}}, \quad \frac{2 \cdot 4}{4\sqrt{\pi}\sqrt{2p(1-p)\mu}}, \quad \frac{2 \cdot 6}{6\sqrt{\pi}\sqrt{2p(1-p)\mu}},$
 $\frac{2 \cdot 8}{8\sqrt{\pi}\sqrt{2p(1-p)\mu}}, \quad \frac{2 \cdot 10}{10\sqrt{\pi}\sqrt{2p(1-p)\mu}}$ [см. ур. (61)].

Таковы вероятности, что в μ случаях событие, которого вероятность p , повторится

- а) не более $p\mu + \sqrt{2p(1-p)\mu} - 1$ раз и не менее $p\mu - \sqrt{2p(1-p)\mu}$,
- б) не более $p\mu + 2\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1$ и не менее $p\mu - 2\sqrt{2p(1-p)\mu}$,
- в) не более $p\mu + 3\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1$ и не менее $p\mu - 3\sqrt{2p(1-p)\mu}$,
- г) не более $p\mu + 4\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1$ и не менее $p\mu - 4\sqrt{2p(1-p)\mu}$,
- д) не более $p\mu + 5\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1$ и не менее $p\mu - 5\sqrt{2p(1-p)\mu}$,

или, что одно и то же, вероятности, что в μ случаях отношение числа повторений события, которого вероятность p , к числу всех случаев будет разниться от $p - \frac{1}{2\mu}$ не более

$$\frac{\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu}, \quad \frac{2\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu}, \dots, \quad \frac{5\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu}.$$

Вообще, по (63), $T(-u) - T(u)$ или $1 - 2T(u)$, по (62), будет вероятность, что событие в μ случаях, имея вероятностью p , повторится не более $p\mu + u\sqrt{2p(1-p)\mu} - 1$ и не менее $p\mu - u\sqrt{2p(1-p)\mu}$ раз, или, что отношение числа повторений его к μ будет отличаться от $p - \frac{1}{2\mu}$ не более как на $u \frac{\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu}$. Но $1 - 2T(u)$ при значительной величине u весьма близко подходит к 1, а $\frac{1}{2\mu}$, и $u \frac{\sqrt{2p(1-p)}}{\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu}$ при μ чрезвычайно большом величины весьма малые; следовательно, чрезвычайно вероятно, что при большем числе случаев отношение числа повторений события к числу всех случаев будет весьма мало разниться от вероятности события в этих случаях. В этом заключается теорема Якова Бернулли.

§ 21. Легко доказать эту теорему независимо от таблицы T . В самом деле, по принятому нами законоположению § 17, вероятность событию E повториться в μ случаях не более $(p+i)\mu$ раз и не менее $(p-i)\mu$ определится уравнением

$$\prod_{\mu, (p-i)\mu}^{(p+i)\mu} = P_{\mu, (p+i)\mu} + P_{\mu, (p+i)\mu-1} + \dots + P_{\mu, (p-i)\mu};$$

откуда выводим

$$\prod_{\mu, (p-i)\mu}^{(p+i)\mu} = 1 - P_{\mu, (p+i)\mu+1} - P_{\mu, (p+i)\mu+2} - \dots - P_{\mu, \mu} - P_{\mu, (p-i)\mu-1} - P_{\mu, (p-i)\mu-2} - \dots - P_{\mu, 0}, \quad (64)$$

замечая, что

$$P_{\mu, \mu} + P_{\mu, \mu-1} + \dots + P_{\mu, 1} + P_{\mu, 0} = 1.$$

Но по § 13 находим, принимая за p вероятность события E ,

$$\begin{aligned} P_{\mu, (p+i)\mu+s} &= P_{\mu, (p+i)\mu} \frac{(1-p-i)\mu}{(p+i)\mu+1} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{(1-p-i)\mu-1}{(p+i)\mu+2} \cdot \frac{p}{p-1} \dots \\ &\dots \frac{(1-p-i)\mu-s+1}{(p+i)\mu+s} \cdot \frac{p}{p-1}, \\ P_{\mu, (p-i)\mu-s} &= P_{\mu, (p-i)\mu} \frac{(p-i)\mu}{(1-p+i)\mu+1} \cdot \frac{1-p}{p} \frac{(p-i)\mu-1}{(1-p+i)\mu+2} \cdot \frac{1-p}{p} \dots \\ &\dots \frac{(p-i)\mu-s+1}{(1-p+i)\mu+s} \cdot \frac{1-p}{p}, \end{aligned}$$

где количества

$$\frac{(1-p-i)\mu}{(p+i)\mu+1} \cdot \frac{p}{1-p}, \dots, \frac{(1-p-i)\mu-s+1}{(p+i)\mu+s} \cdot \frac{p}{1-p}$$

менее $\frac{(1-p-i)\mu}{(p+i)\mu} \cdot \frac{p}{p-1}$ или $\frac{1 - \frac{i}{1-p}}{1 + \frac{i}{p}}$, а количества

$$\frac{(p-i)\mu}{(1-p+i)\mu+1} \cdot \frac{1-p}{p}, \dots, \frac{(p-i)\mu-s+1}{(1-p+i)\mu+s} \cdot \frac{1-p}{p}$$

менее $\frac{(p-i)\mu}{(1-p+i)\mu} \cdot \frac{1-p}{p}$ или $\frac{1 - \frac{i}{p}}{1 + \frac{i}{1-p}}$.

Поэтому

$$P_{\mu, (p+i)\mu+s} < P_{\mu, (p+i)\mu} \left(\frac{1 - \frac{i}{1-p}}{1 + \frac{i}{p}} \right)^s, \quad P_{\mu, (p-i)\mu-s} < P_{\mu, (p-i)\mu} \left(\frac{1 - \frac{i}{p}}{1 + \frac{i}{1-p}} \right)^s.$$

Вследствие чего (64) дает

$$\prod_{\mu, (p-i)\mu}^{(p+i)\mu} > 1 - P_{\mu, (p+i)\mu} \sum_{k=1}^{(1-p-i)\mu} \left(\frac{1 - \frac{i}{1-p}}{1 + \frac{i}{p}} \right)^k - P_{\mu, (p-i)\mu} \sum_{k=1}^{(p-i)\mu} \left(\frac{1 - \frac{i}{p}}{1 + \frac{i}{1-p}} \right)^k$$

и a fortiori

$$\prod_{\mu, (p-i)\mu}^{(p+i)\mu} > 1 - \frac{\frac{1 - \frac{i}{1-p}}{1 + \frac{i}{p}}}{1 - \frac{1 - \frac{i}{1-p}}{1 + \frac{i}{p}}} P_{\mu, (p+i)\mu} - \frac{\frac{1 - \frac{i}{p}}{1 + \frac{i}{1-p}}}{1 - \frac{1 - \frac{i}{p}}{1 + \frac{i}{1-p}}} P_{\mu, (p-i)\mu},$$

что, по сокращении, приводится к следующему:

$$\prod_{\mu, (p-i)\mu}^{(p+i)\mu} > 1 - \frac{p(1-p-i)}{i} P_{\mu, (p+i)\mu} - \frac{(1-p)(p-i)}{i} P_{\mu, (p-i)\mu}. \quad (65)$$

Остается только показать высший предел величин $P_{\mu, (p+i)\mu}$, $P_{\mu, (p-i)\mu}$, что урав[нения] (19), (33) дают без всякого затруднения.

Так, по (19), находим

$$P_{\mu, (p+i)\mu} = \frac{\mu!}{[(p+i)\mu]! [(1-p-i)\mu]!} p^{(p+i)\mu} (1-p)^{(1-p-i)\mu},$$

вследствие чего, по (33), $P_{\mu, (p+i)\mu}$ менее

$$e \sqrt{C_{\mu}}^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\mu + \frac{1}{12\mu}} p^{(p+i)\mu} (1-p)^{(1-p-i)\mu} \left\{ e^2 C[(p+i)\mu]^{(p+i)\mu + \frac{1}{2}} \times \right. \\ \times e^{-(p+i)\mu + \frac{1}{12(p+i)\mu} - \frac{1}{36(p+i)^3\mu^3}} [(1-p-i)\mu]^{(1-p-i)\mu + \frac{1}{2}} \times \\ \left. \times e^{-(1-p-i)\mu + \frac{1}{12(1-p-i)\mu} - \frac{1}{36(1-p-i)^3\mu^3}} \right\}^{-1}.$$

Отсюда по приведении и заметив, что

$$\frac{1}{12(p+i)\mu} - \frac{1}{36(p+i)^3\mu^3} > 0, \quad \frac{1}{12(1-p-i)\mu} - \frac{1}{36(1-p-i)^3\mu^3} > 0,$$

a fortiori выводим

$$P_{\mu, (p+i)\mu} < \frac{e^{\frac{1}{12}\mu}}{e\sqrt{C}} \frac{V_{\mu}^{-}}{V_{(p+i)\mu}(1-p-i)\mu} \left(\frac{p}{p+i}\right)^{(p+i)\mu} \left(\frac{1-p}{1-p-i}\right)^{(1-p-i)\mu} < \\ < \frac{e^{\frac{1}{12}\mu}}{e\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{V_{(p+i)(1-p-i)\mu}} e^{(p+i)\mu \lg \frac{p}{p+i} + (1-p-i)\mu \lg \frac{1-p}{1-p-i}},$$

что по разложению $\lg$ в ряд дает

$$P_{\mu, (p+i)\mu} < \\ < \frac{e^{\frac{1}{12}\mu}}{e\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{V_{(p+i)(1-p-i)\mu}} \cdot e^{-\mu \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2}{p+i} + \frac{1}{3} \cdot \frac{i^3}{(p+i)^2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2}{(1-p-i)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{i^3}{(1-p-i)^2} + \dots \right\}}. \quad (66)$$

Переменяя здесь i на $-i$, имеем

$$P_{\mu, (p-i)\mu} < \\ < \frac{e^{\frac{1}{12}\mu}}{e\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{V_{(p-i)(1-p-i)\mu}} e^{-\mu \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2}{p-i} - \frac{1}{3} \cdot \frac{i^3}{(p-i)^2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2}{1-p+i} + \frac{1}{3} \cdot \frac{i^3}{(1-p+i)^2} + \dots \right\}}. \quad (67)$$

С помощью формул (65), (66), (67) нетрудно заметить, как быстро подходит к единице значение $\prod_{\mu, (p-i)\mu}^{(p+i)\mu}$ с увеличением μ . Что касается до постоянного $e\sqrt{C}$, то, делая в (33) $x=10$, находим

$$e\sqrt{C} = \frac{10!}{10^{10+\frac{1}{2}}} e^{-10+\frac{1}{120}} > 2,50662.$$

§ 22. Уравнение (63) для $p = \frac{1}{2}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma$ дает

$$\prod_{\mu_1 + \dots + \mu_\sigma, m}^{m+s} = T \left(\frac{m - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma)}} \right) - \\ - T \left(\frac{m + s + 1 - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma)}} \right). \quad (68)$$

Так определяется вероятность, что в $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$ случаях событие, которого вероятность p , повторится не менее m раз и не более $m + s$ или, что одно и то же, вероятность, что сумма чисел повторений этого события в $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ случаях $\geq m$ и $\leq m + s$. Но вероятности событию в μ_1 случаях повториться m_1 раз; в μ_2 случаях m_2 раз, $\dots$, в μ_s случаях m_s раз, когда вероятность его $\frac{1}{2}$, по (43) суть

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_1}} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{\frac{1}{2} \mu_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_2}} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{\frac{1}{2} \mu_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_s}} \cdot e^{-\frac{z_s^2}{\frac{1}{2} \mu_s}},$$

где

$$Z_1 = m_1 - \frac{1}{2} \mu_1, \quad Z_2 = m_2 - \frac{1}{2} \mu_2, \dots, Z_s = m_s - \frac{1}{2} \mu_s. \quad (69)$$

Отсюда по второй теореме (§ 8)

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_1}} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{\frac{1}{2} \mu_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_2}} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{\frac{1}{2} \mu_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_s}} \cdot e^{-\frac{z_s^2}{\frac{1}{2} \mu_s}}$$

будет вероятность, что в $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ случаях $m_1, m_2, \dots, m_s$ будут числа повторений события, которого вероятность $\frac{1}{2}$; и по первой теореме $\prod_{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s, m}^{m+s}$ вероятность, что эти числа будут какие-либо, удовлетворяющие условию $m \leq m_1 + m_2 + \dots + m_s \leq m + s$, определится суммой значений

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_1}} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{\frac{1}{2} \mu_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_2}} \cdot e^{-\frac{z_2^2}{\frac{1}{2} \mu_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \mu_s}} \cdot e^{-\frac{z_s^2}{\frac{1}{2} \mu_s}},$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{1}{2} \mu_1, & -\frac{1}{2} \mu_1 + 1, & -\frac{1}{2} \mu_1 + 2, & \dots, & \frac{1}{2} \mu_1 - 1, & \frac{1}{2} \mu_1, \\ Z_2 &= -\frac{1}{2} \mu_2, & -\frac{1}{2} \mu_2 + 1, & -\frac{1}{2} \mu_2 + 2, & \dots, & \frac{1}{2} \mu_2 - 1, & \frac{1}{2} \mu_2, \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_s &= -\frac{1}{2} \mu_s, & -\frac{1}{2} \mu_s + 1, & -\frac{1}{2} \mu_s + 2, & \dots, & \frac{1}{2} \mu_s - 1, & \frac{1}{2} \mu_s \end{aligned}$$
$$m - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s) \leq Z_1 + Z_2 + \dots + Z_s \leq m + s - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s).$$
$$T\left(\frac{M}{V^{2(\alpha_1^2 b_1 + \alpha_2^2 b_2 + \dots + \alpha_s^2 b_s)}}\right) - T\left(\frac{M+s+1}{V^{2(\alpha_1^2 b_1 + \alpha_2^2 b_2 + \dots + \alpha_s^2 b_s)}}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1^2b}} \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2b_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_2^2b_2}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2b_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_\sigma^2b_\sigma}} \cdot e^{-\frac{y_\sigma^2}{2b_\sigma}}$$
[illegible]

и удовлетворяющих условию

$$M \leq \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_s y_s \leq M + \sigma.$$

§ 23. Но уравнение (61) для $X = \frac{H}{\sqrt{2b_1}}$, $x = \frac{h}{\sqrt{2b_1}}$, $s + 1 = h$ и для $X = \frac{H_1}{\sqrt{2b_1}}$, $x = \frac{h_1}{\sqrt{2b_1}}$, $s + 1 = h_1 \alpha_1$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} \cdot \sum_{k=0}^{h-1} e^{-\frac{(H+k)^2}{2b_1}} = T\left(\frac{H}{\sqrt{2b_1}}\right) - T\left(\frac{H+h}{\sqrt{2b_1}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \alpha_1^2 b_1}} \sum_{k=0}^{\alpha_1 h_1 - 1} e^{-\frac{\left(H_1 + \frac{k}{\alpha_1}\right)^2}{2b_1}} = T\left(\frac{H_1}{\sqrt{2b_1}}\right) - T\left(\frac{H_1 + h_1}{\sqrt{2b_1}}\right).$$

Притом $T(Z)$, как замечаем из таблицы T , изменяется весьма мало, при малом изменении Z , так же как и в том случае, когда довольно большую величину Z переменяем на другую большую величину. А поэтому, в предположении b_1 числом большим, можем принять

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} \cdot \sum_{k=0}^{h-1} e^{-\frac{(H+k)^2}{2b_1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \alpha_1^2 b_1}} \cdot \sum_{k=0}^{\alpha_1 h_1 - 1} e^{-\frac{\left(H_1 + \frac{k}{\alpha_1}\right)^2}{2b_1}},$$

если H и H_1 , $H + h$ и $H_1 + h_1$ мало разнятся между собою или если они величины довольно большие; а это приводит к тому, что суммы

значений $\frac{1}{\sqrt{2\pi \alpha_1^2 b_1}} e^{-\frac{y_1^2}{2b_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{x_1^2}{2b_1}}$ будут равны, если в пределах

довольно близких между собою или довольно больших будем давать y_1 величины, возрастающие [до] $\frac{1}{\alpha_1}$, а x_1 , возрастающие [до] 1.

Предполагая же эти суммы умноженными на

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_2^2b_2}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2b_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_3^2b_3}} \cdot e^{-\frac{y_3^2}{2b_3}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_\sigma^2b_\sigma}} \cdot e^{-\frac{y_\sigma^2}{2b_\sigma}}$$

и за пределы y_1 , x_1 принимая

$$\begin{aligned} -2\alpha_1b_1 &\leq \frac{M - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1} \leq y_1, \\ y_1 &\leq \frac{M + s - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1} \leq 2\alpha_1b_1, \\ -A_1 &\leq \frac{M - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1} \leq x_1, \\ x_1 &\leq \frac{M + s - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1} \leq B_1, \end{aligned}$$

где A_1 , B_1 , подобно $2\alpha_1b_1$, величины большие, мы таким образом доходим до заключения, что суммы значений

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1^2b_1}} \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2b_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_2^2b_2}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2b_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_\sigma^2b_\sigma}} \cdot e^{-\frac{y_\sigma^2}{2b_\sigma}}, \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} \cdot e^{-\frac{x_1^2}{2b_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2b_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi b_\sigma}} \cdot e^{-\frac{y_\sigma^2}{2b_\sigma}} \end{aligned}$$

равны для величин y_1 , x_1 , заключающихся в рядах

$$y_1 = -2\alpha_1b_1, -2\alpha_1b_1 + \frac{1}{\alpha_1}, -2\alpha_1b_1 + \frac{2}{\alpha_1}, \dots, 2\alpha_1b_1 - \frac{1}{\alpha_1}, 2\alpha_1b_1,$$

$$x_1 = -A_1, -A_1 + 1, -A_1 + 2, \dots, B_1 - 1, B_1$$

и удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y_1 &\geq \frac{M - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1}, & x_1 &\geq \frac{M - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1}, \\ y_1 &\leq \frac{M + s - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1}, & x_1 &\leq \frac{M + s - \alpha_2y_2 - \alpha_3y_3 - \dots - \alpha_\sigma y_\sigma}{\alpha_1}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} \cdot e^{-\frac{x_1^2}{2b_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2b_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi b_g}} \cdot e^{-\frac{x_g^2}{2b_g}}$$
[illegible]
$$M \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s \leq M + s,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1^2b_1}} \cdot e^{-\frac{y_1^2}{2b_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_2^2b_2}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2b_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_\sigma^2b_\sigma}} \cdot e^{-\frac{y_\sigma^2}{2b_\sigma}}$$
[illegible]
$$M \leq \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_s y_s \leq M + s$$

и, следовательно, так же как эта последняя (§ 22), определится через

$$T\left(\frac{M}{\sqrt{2(x_1^2 b_1 + x_2^2 b_2 + \dots + x_s^2 b_s)}}\right) - T\left(\frac{M+s+1}{\sqrt{2(x_1^2 b_1 + x_2^2 b_2 + \dots + x_s^2 b_s)}}\right).$$

Это вывели мы, предполагая $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ количествами положительными; но результат не переменяется при перемене их знака, ибо это соответствует перемене x_1 на $-x_1$, x_2 на $-x_2$ и пр. вместе с переменою A_1 на B_1 , A_2 на B_2 , ... и обратно, причем значение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} \cdot e^{-\frac{x_1^2}{2b_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2b_2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi b_s}} \cdot e^{-\frac{x_s^2}{2b_s}}$$

остается без перемены.

§ 24. Если событие E в μ_1 случаях имело вероятностию p_1 , в μ_2 случаях p_2 , в μ_3 случаях p_3 , ..., в μ_s случаях p_s , то, по (43),

$\frac{1}{\sqrt{2\pi p_1(1-p_1)\mu_1}} \cdot e^{-\frac{Z_1^2}{2p_1(1-p_1)\mu_1}}$ будет вероятность повториться ему в μ_1 случаях m_1 раз, где

$$Z_1 = m_1 - p_1\mu_1. \quad (70)$$

Подобным образом $\frac{1}{\sqrt{2\pi p_2(1-p_2)\mu_2}} \cdot e^{-\frac{Z_2^2}{2p_2(1-p_2)\mu_2}}$ будет вероятность повториться ему в μ_2 случаях m_2 раз, где

$$Z_2 = m_2 - p_2\mu_2; \quad (71)$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi p_3(1-p_3)\mu_3}} \cdot e^{-\frac{Z_3^2}{2p_3(1-p_3)\mu_3}}$ вероятность повториться ему в μ_3 случаях m_3 раз, где

$$Z_3 = m_3 - p_3\mu_3; \quad (72)$$

.....

Следовательно, вероятность, что числа $m_1, m_2, \dots, m_s$ повторений события E в $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ случаях будут удовлетворять условию

$$S \leq \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s \leq S + s,$$

определится суммой значений

$$\frac{e^{-\frac{z_1^2}{2p_1(1-p_1)\mu_1}}}{\sqrt{2\pi p_1(1-p_1)\mu_1}} \cdot \frac{e^{-\frac{z_2^2}{2p_2(1-p_2)\mu_2}}}{\sqrt{2\pi p_2(1-p_2)\mu_2}} \cdots \frac{e^{-\frac{z_s^2}{2p_s(1-p_s)\mu_s}}}{\sqrt{2\pi p_s(1-p_s)\mu_s}}$$

для величин (75) $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$, удовлетворяющих условию (74). Но эта сумма, по § 23, для $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ больших чисел равняется

$$T\left(\frac{S - \alpha_1 p_1 \mu_1 - \alpha_2 p_2 \mu_2 - \dots - \alpha_s p_s \mu_s}{\sqrt{2[\alpha_1^2 p_1(1-p_1)\mu_1 + \alpha_2^2 p_2(1-p_2)\mu_2 + \dots + \alpha_s^2 p_s(1-p_s)\mu_s]}}\right) - \\ - T\left(\frac{S + s + 1 - \alpha_1 p_1 \mu_1 - \alpha_2 p_2 \mu_2 - \dots - \alpha_s p_s \mu_s}{\sqrt{2[\alpha_1^2 p_1(1-p_1)\mu_1 + \alpha_2^2 p_2(1-p_2)\mu_2 + \dots + \alpha_s^2 p_s(1-p_s)\mu_s]}}\right).$$

Вот как выражается вероятность, что числа $m_1, m_2, \dots, m_s$ повторений события в $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ случаях будут удовлетворять условию

$$S \leq \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s \leq S + s,$$

когда вероятность его в этих $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ случаях была $p_1, p_2, \dots, p_s$.

Например, если p_1 есть вероятность погибнуть в известном пути кораблю определенного устройства D_1 , p_2 вероятность этого же для корабля D_2 , p_3 для корабля D_3 , $\dots$, p_s для корабля D_s , то μ_1 кораблей D_1 , μ_2 кораблей D_2 , μ_3 кораблей D_3 , $\dots$, μ_s кораблей D_s , пустившихся в путь, будут [иметь] $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ случаев для кораблекрушения, причем вероятность его $p_1, p_2, \dots, p_s$. А поэтому, называя через $m_1, m_2, \dots, m_s$ числа кораблекрушений в μ_1 кораблях D_1 , в μ_2 кораблях D_2 , в μ_3 кораблях D_3 , $\dots$, в μ_s кораблях D_s , мы по доказанному находим

$$T\left(\frac{S - \alpha_1 p_1 \mu_1 - \alpha_2 p_2 \mu_2 - \dots - \alpha_s p_s \mu_s}{\sqrt{2[\alpha_1^2 p_1(1-p_1)\mu_1 + \alpha_2^2 p_2(1-p_2)\mu_2 + \dots + \alpha_s^2 p_s(1-p_s)\mu_s]}}\right) -$$

$$-T \left(\frac{S + s + 1 - \alpha_1 p_1 \mu_1 - \alpha_2 p_2 \mu_2 - \dots - \alpha_s p_s \mu_s}{V 2 [\alpha_1^2 p_1 (1 - p_1) \mu_1 + \alpha_2^2 p_2 (1 - p_2) \mu_2 + \dots + \alpha_s^2 p_s (1 - p_s) \mu_s]} \right)$$

для величины вероятности быть

$$[S \leq \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s \leq S + s.]$$

Если же предположим $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ценностями кораблей $D_1, D_2, \dots, D_s$, это будет вероятность, что кораблей погибнет на сумму не менее S и не более $S + s$. Так определяется вероятность, что страховое общество, в котором застраховано μ_1 кораблей D_1, μ_2 кораблей D_2, μ_3 кораблей $D_3, \dots, \mu_s$ кораблей D_s , заплатит за погибшие корабли не менее S и не более $S + s$, если вероятности кораблекрушений $D_1, D_2, \dots, D_s$ суть $p_1, p_2, \dots, p_s$. То же относительно страхования других каких-либо собственности.

IV

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ ПО ЧИСЛУ ПОВТОРЕНИЙ ЕГО

§ 25. Если событие E , вероятность которого может быть только

$$\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s},$$

где все величины для нее одинаково возможны, в μ случаях повторилось m раз, то, как видели (§ 14), $V_{\frac{n}{s}}$, вероятность *быть* $\frac{n}{s}$ *величиною вероятности события* E , определится уравнением

$$V_{\frac{n}{s}} = \frac{\left(\frac{n}{s}\right)^m \left(1 - \frac{n}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu-m} + \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu-m} + \dots + \left(\frac{s-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{s-1}{s}\right)^{\mu-m}}. \quad (76)$$

Мы покажем теперь приближенное значение этого выражения $V_{\frac{n}{s}}$

при больших числах $s, \mu, m, \mu - m$ в том случае, когда $\frac{m}{\mu}$ мало разнится с $\frac{n}{s}$. Для этого мы замечаем, что отношение

$$\frac{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v}{s}\right)^{\mu-m}} \quad \text{к} \quad \frac{\left(\frac{v-2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-2}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}},$$

приводясь к $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(v-1)^2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{(s-v+1)^2}\right)^{\mu-m}}$, более 1. А поэтому

$$\frac{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v}{s}\right)^{\mu-m}} \quad \text{более} \quad \frac{\left(\frac{v-2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-2}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}} \quad \text{и, следовательно}$$

но, более каждого из количеств

$$\frac{\left(\frac{v-3}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-3}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-2}{s}\right)^{\mu-m}}, \dots, \frac{\left(\frac{v-r}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-r}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-r+1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-r+1}{s}\right)^{\mu-m}}.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v}{s}\right)^{\mu-m}} \right)^{r-1} < \\ & < \frac{\left(\frac{v-2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-2}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}} \dots \frac{\left(\frac{v-r}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-r}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-r+1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-r+1}{s}\right)^{\mu-m}}, \end{aligned}$$

или

$$\left[\left(1 - \frac{1}{v}\right)^m \left(1 + \frac{1}{s-v}\right)^{\mu-m} \right]^{r-1} > \frac{\left(\frac{v-r}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-r}{s}\right)^{\mu-m}}{\left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}}$$

Замечая из этого неравенства, что

$$\left(\frac{v-r}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-r}{s}\right)^{\mu-m} < \\ < \left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m} \left[\left(1 - \frac{1}{v}\right)^m \left(1 + \frac{1}{s-v}\right)^{\mu-m} \right]^{r-1},$$

мы заключаем, что

$$\left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu-m} + \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu-m} + \dots + \left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m} < \\ < \left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{v}\right)^m \left(1 + \frac{1}{s-v}\right)^{\mu-m} \right]^{v-2} + \right. \\ \left. + \left[\left(1 - \frac{1}{v}\right)^m \left(1 + \frac{1}{s-v}\right)^{\mu-m} \right]^{v-3} + \dots + 1 \right\}. \quad (77)$$

Но нетрудно убедиться, что если

$$v = s \frac{m}{\mu} - u s \left(\frac{2m(\mu-m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad 3 < u < 4, \quad (78)$$

то количество $\left(1 - \frac{1}{v}\right)^m \left(1 + \frac{1}{s-v}\right)^{\mu-m}$ менее 1. В самом деле. Это

количество может быть представлено так:

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{s-v}}{\left(1 - \frac{1}{v}\right)^{-\frac{m}{\mu-m}}} \right)^{\mu-m}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{1 + \frac{1}{s-v}}{1 + \frac{m}{\mu-m} \frac{1}{v} + \frac{m\mu}{2(\mu-m)^2} \frac{1}{v^2} + \dots} \right)^{\mu-m},$$

где дробь

$$\frac{1 + \frac{1}{s-v}}{1 + \frac{m}{\mu-m} \frac{1}{v} + \frac{m\mu}{2(\mu-m)^2} \frac{1}{v^2} + \dots}$$

менее 1; ибо вследствие (78) будет $\frac{m}{\mu-m} \frac{1}{v} < \frac{1}{s-v}$, а $\frac{m\mu}{2(\mu-m)^2} \frac{1}{v^2}$, $\frac{m\mu(2\mu-m)}{6(\mu-m)^3} \frac{1}{v^3}, \dots$ — количества положительные.

Убедившись таким образом, что в сделанном предположении (78) количество $\left(1 - \frac{1}{v}\right)^m \left(1 + \frac{1}{v-s}\right)^{\mu-m}$ менее 1, мы, по (77), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\mu-m} + \left(\frac{2}{s}\right)^m \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{\mu-m} + \dots \\ & \dots + \left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m} < (v-1) \left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m}, \end{aligned} \quad (79)$$

где, по (78),

$$v = s \frac{m}{\mu} - us \left(\frac{2m(\mu-m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad 3 < u < 4.$$

Заменяя здесь s через $s-w$, m через $\mu-m$, находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{s}\right)^{\mu-m} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^m + \left(\frac{2}{s}\right)^{\mu-m} \left(1 - \frac{2}{s}\right)^m + \dots + \\ & + \left(\frac{s-w-1}{s}\right)^{\mu-m} \left(1 - \frac{s-w-1}{s}\right)^m < (s-w-1) \left(\frac{s-w-1}{s}\right)^{\mu-m} \left(1 - \frac{s-w-1}{s}\right)^m, \end{aligned}$$

или, что одно и то же,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{w+1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{w+1}{s}\right)^{\mu-m} + \dots + \left(\frac{s-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{s-1}{s}\right)^{\mu-m} < \\ & < (s-w-1) \left(\frac{w+1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{w+1}{s}\right)^{\mu-m}, \end{aligned} \quad (80)$$

где

$$w = s \frac{\mu-m}{\mu} + us \left(\frac{2m(\mu-m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad 3 < u < 4.$$

Вследствие неравенств (79), (80), выражение $V_{\frac{n}{s}}$ по формуле (76) может быть представлено так:

$$\begin{aligned} V_{\frac{n}{s}} = & \left(\frac{n}{s}\right)^m \left(1 - \frac{n}{s}\right)^{\mu-m} \left\{ \theta (v-1) \left(\frac{v-1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v-1}{s}\right)^{\mu-m} + \right. \\ & + \left(\frac{v}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v}{s}\right)^{\mu-m} + \left(\frac{v+1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{v+1}{s}\right)^{\mu-m} + \dots + \left(\frac{w}{s}\right)^m \left(1 - \frac{w}{s}\right)^{\mu-m} + \\ & \left. + \theta_1 (s-w-1) \left(\frac{w+1}{s}\right)^m \left(1 - \frac{w+1}{s}\right)^{\mu-m} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (81)$$

где

$$v = s \frac{m}{\mu} - u s \left(\frac{2m(\mu - m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad w = s \frac{\mu - m}{\mu} + u s \left(\frac{2m(\mu - m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad 3 < u < 4, \\ 0 < \theta, \quad \theta_1 < 1. \quad (82)$$

По формуле (81) мы легко найдем приближенную величину $V_{\frac{n}{s}}$.

Для этого мы замечаем, что вследствие (82) разности $\frac{v}{s} - \frac{m}{\mu}$, $\frac{v+1}{s} - \frac{m}{\mu}$, ..., $\frac{w}{s} - \frac{m}{\mu}$ при μ , m , $\mu - m$ больших числах будут величины незначительные относительно μ , m , $\mu - m$ степени $-\frac{2}{5}$. Также, по предположению, незначительна величина разности $\frac{n}{s} - \frac{w}{\mu}$. Вследствие этого для приближенного вычисления членов выражения (81) может быть употреблен следующий прием.

Чтобы найти приближенное значение $\left(\frac{t}{s}\right)^m \left(1 - \frac{t}{s}\right)^{\mu-m}$, мы замечаем, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{s}\right)^m \left(1 - \frac{t}{s}\right)^{\mu-m} &= \left(\frac{m}{\mu} + \frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^m \left[\frac{\mu-m}{\mu} - \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)\right]^{\mu-m} = \\ &= \left(\frac{m}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu-m}{\mu}\right)^{\mu-m} e^{m \lg \left[1 + \frac{\mu}{m} \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)\right] + (\mu-m) \lg \left[1 - \frac{\mu}{\mu-m} \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)\right]} = \\ &= \left(\frac{m}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu-m}{\mu}\right)^{\mu-m} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu^3}{m^2} - \frac{\mu^3}{(\mu-m)^2}\right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^3 -}. \end{aligned}$$

Откуда, пренебрегая членами $\frac{1}{3} \left(\frac{\mu^3}{m^2} - \frac{\mu^3}{(\mu-m)^2}\right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^3$, $\frac{1}{4} \left(\frac{\mu^4}{m^3} + \frac{\mu^4}{(\mu-m)^3}\right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^5$, ..., имеем

$$\left(\frac{t}{s}\right)^m \left(1 - \frac{t}{s}\right)^{\mu-m} = \left(\frac{m}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu-m}{\mu}\right)^{\mu-m} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2}. \quad (83)$$

Что же касается пренебрежения членами

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\mu^3}{m^2} - \frac{\mu^3}{(\mu-m)^2}\right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^3, \quad \frac{1}{4} \left(\frac{\mu^4}{m^3} + \frac{\mu^4}{(\mu-m)^3}\right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^4, \quad \dots,$$

то оно позволительно для $t=n$, потому что, по предположению,

разность $\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}$ величина весьма малая; также оно позволительно для $t = v, v + 1, \dots, w$, ибо, [как мы] видели, для этих величин t разность $\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu}$ величина незначительная и относительно $\mu, m, \mu - m$ степени $-\frac{2}{5}$ *. Итак, формула (83) может быть употреблена для приближенного вычисления членов выражения (81). Вследствие чего имеем по (81)

$$V_{\frac{n}{s}} = e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} \times \\ \times \left\{ \theta(v-1) e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{v-1}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} + \theta_1(s-w-1) e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{w+1}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=v}^w e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{k}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} \right\}^{-1}$$

где, по (82),

$$v = s \frac{m}{\mu} - us \left(\frac{2m(\mu-m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad w = s \frac{\mu-m}{\mu} + us \left(\frac{2m(\mu-m)}{\mu^3} \right)^{2/5}, \quad 3 < u < 4; \\ 0 < \theta; \theta_1 < 1.$$

Умножая на $\frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}}$ числителя и знаменателя в полученном таким образом выражении $V_{\frac{n}{s}}$, находим

$$V_{\frac{n}{s}} = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} \left[\theta(v-1) e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{v-1}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_1(s-w-1) e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{w+1}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} + \sum_{k=v}^w e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{k}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} \right] \right\}^{-1}.$$

* Вследствие чего, как легко заметить, член $\frac{1}{3} \left(\frac{\mu^3}{m^2} - \frac{\mu^3}{(\mu-m)^2} \right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^3$ степени $-\frac{1}{5}$, член $\frac{1}{4} \left(\frac{\mu^4}{m^3} + \frac{\mu^4}{(\mu-m)^3} \right) \left(\frac{t}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^4$ степени $-\frac{3}{5}$; следующие будут степени $-1, -1\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5}$ и т. д.

Но заменяя в (61) $s + 1$ через $w - v + 1$, X через $\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \left(\frac{v}{s} - \frac{m}{\mu} \right)$,
 x через $\frac{w - v + 1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}}$, мы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \sum_{k=v}^w e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)} \left(\frac{k}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^2} = \\ & = T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \left(\frac{v}{s} - \frac{m}{\mu} \right) \right] - T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \left(\frac{w+1}{s} - \frac{m}{\mu} \right) \right]. \end{aligned}$$

Вследствие чего предыдущее выражение $V_{\frac{n}{s}}$ напишется так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu - m)}} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu - m)}} \left[\theta(v-1) e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)} \left(\frac{v-1}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta_1(s-w-1) e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)} \left(\frac{w+1}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^2} \right] + \right. \\ & \left. + T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \left(\frac{v}{s} - \frac{m}{\mu} \right) \right] - T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \left(\frac{w+1}{s} - \frac{m}{\mu} \right) \right] \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

куда внеся значения v , w из (82) и пренебрегая $\frac{1}{s}$, заключаем, что $V_{\frac{n}{s}}$ равняется

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu - m)}} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu} \right)^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu - m)}} [\theta(v-1) + \theta_1(s-w+1)] e^{-u^2 \left(\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)} \right)^{1/5}} + \right. \\ & \left. + T \left(-u \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \right) - T \left(u \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu - m)}} \right) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Но, по (62), $T\left(-u \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}}\right) = 1 - T\left(u \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}}\right)$, вследствие чего предыдущее выражение $V_{\frac{n}{s}}$ приводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{s} \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} [\theta(v-1) + \theta_1(s-w+1)] e^{-u^2\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}} + \right. \\ & \left. + 1 - 2T\left(u \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}}\right) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Но при μ большом $T\left(u \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}}\right)$ величина чрезвычайно малая; ею мы можем пренебречь. Также можем пренебречь количеством

$$\frac{1}{s} \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} [\theta(v-1) + \theta_1(s-w-1)] e^{-u^2\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}},$$

ибо это количество менее $\sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \cdot e^{-u^2\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}$, а это менее

$\left(\frac{\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}{e^{\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}}\right)^{5/2}$ *. Но $\frac{\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}{e^{\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}}$ есть отношение неперова логарифма

$e^{\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}$ к $e^{\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}}$ — отношение, быстро подходящее к 0 с увеличением значения $\left(\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\right)^{1/5}$, как можно видеть из таблицы log. Итак, при значительных величинах $s, \mu, m, \mu-m$ для приближенного значения $V_{\frac{n}{s}}$ можем принять

$$V_{\frac{n}{s}} = \frac{1}{s} \sqrt[10]{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} \cdot e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}\left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2}. \quad (84)$$

* Потому что $u^2 > \frac{5}{2}$. См. (82).

Вот как выражается вероятность, что $\frac{n}{s}$ есть величина вероятности события E , повторившегося в μ случаях m раз, когда

$$\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}$$

все равно и единственно возможные величины этой вероятности.

§ 26. Отсюда $W_{\frac{n+n_1}{s}}$, вероятность, что одно из количеств

$$\frac{n}{s}, \frac{n+1}{s}, \dots, \frac{n+n_1}{s}$$

будет вероятностью события E , повторившегося в μ случаях m раз, определяясь по первой теореме (§ 5) суммой $V_{\frac{n}{s}} + V_{\frac{n+1}{s}} + \dots + V_{\frac{n+n_1}{s}}$, выразится формулою

$$W_{\frac{n+n_1}{s}} = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} \sum_{k=n}^{n_1} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{k}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2}. \quad (85)$$

Но (61) для $s = n_1$, $X = \sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right)$, $x = \sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \frac{n_1+1}{s}$ дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi m(\mu-m)}} \sum_{k=n}^{n_1} e^{-\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)} \left(\frac{k}{s} - \frac{m}{\mu}\right)^2} = \\ & = T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right) \right] - T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(\frac{n+n_1+1}{s} - \frac{m}{\mu}\right) \right], \end{aligned}$$

а поэтому уравнение (85) приведет к следующему:

$$W_{\frac{n+n_1}{s}} = T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(\frac{n}{s} - \frac{m}{\mu}\right) \right] - T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(\frac{n+n_1+1}{s} - \frac{m}{\mu}\right) \right]. \quad (86)$$

Вот как выражается вероятность, что одно из количеств

$$\frac{n}{s}, \frac{n+1}{s}, \dots, \frac{n+n_1}{s} \quad (87)$$

было вероятностью события E , повторившегося m раз в μ случаях,

когда

$$\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}$$

все равно и единственно возможные величины этой вероятности, или, что одно и то же, что вероятность этого события была $\geq \frac{n}{s}$ и $\leq \frac{n+n_1}{s}$.

Здесь наиболее замечателен случай, когда для вероятности события E все величины от 0 до 1 равновозможны, что приводит к предположению в ряду (87) s числом чрезвычайно большим.

Называя в этом случае $\frac{n}{s}$, $\frac{n+n_1}{s}$ через p , p_1 и замечая, что при s чрезвычайно большом $\frac{n+n_1}{s}$ не чувствительно разнится с $\frac{n+n_1+1}{s}$, мы по (86) находим, что $W_p^{p_1}$, вероятность быть $\geq p$ и $\leq p_1$ вероятности события E , повторившегося в μ случаях m раз, когда для нее все величины одинаково возможны, определится уравнением

$$W_p^{p_1} = T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(p - \frac{m}{\mu} \right) \right] - T \left[\sqrt{\frac{\mu^3}{2m(\mu-m)}} \left(p_1 - \frac{m}{\mu} \right) \right]. \quad (88)$$

Так из наблюдений над построением события мы можем вывести заключение о его вероятности.

Например. Наблюдения показали, что из 215 599 новорожденных во Франции 110 312 было мальчиков. Внеся в уравнение (88) 215 599, 110 312 на место μ , m , мы найдем

$$T \left[\sqrt{\frac{215\,599^2}{2 \cdot 110\,312 \cdot 105\,287}} \left(p - \frac{110\,312}{215\,599} \right) \right] - T \left[\sqrt{\frac{215\,599^2}{2 \cdot 110\,312 \cdot 105\,287}} \left(p_1 - \frac{110\,312}{215\,599} \right) \right]$$

для выражения вероятности, что новорожденному во Франции быть мальчиком имело вероятностью величину $\geq p$ и $\leq p_1$. Так, для $p = 0,507\,15$, $p_1 = 0,516\,15$ эта вероятность будет

$$T \left[\sqrt{\frac{215\,599^2}{2 \cdot 110\,312 \cdot 105\,287}} \left(0,507\,15 - \frac{110\,312}{215\,599} \right) \right] - \\ - T \left[\sqrt{\frac{215\,599^2}{2 \cdot 110\,312 \cdot 105\,287}} \left(0,516\,15 - \frac{110\,312}{215\,599} \right) \right],$$

что приводится по выполнению вычислений к

$$T(-2,95) - T(2,95)$$

и по уравнению (62) к

$$1 - 2T(2,95).$$

Таблица же T дает $1 - 2T(2,95) = 0,999\,969\,80$.

Таким образом, наблюдая числа умирающих в разные возрасты, определили, в пределах весьма вероятных и довольно тесных, вероятность дожить до известного возраста.

V

О ПОВТОРЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ СОБЫТИЙ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО РАЗ

§ 27. Вероятность, что в μ случаях события $E_1, E_2, \dots, E_{\sigma-1}, E_{\sigma}$, которых вероятности суть $p_1, p_2, \dots, p_{\sigma-1}, 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1}$, повторятся $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$ раз, есть, как видели (§ 13),

$$P = \frac{\mu!}{m_1! m_2! \dots m_{\sigma-1}! (\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1})!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots \dots p_{\sigma-1}^{m_{\sigma-1}} (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1})^{\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1}}. \quad (89)$$

Но, по (35), имеем

$$\begin{aligned} \mu! &= \sqrt{2\pi} \mu^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\mu}, \\ m_1! &= \sqrt{2\pi} m_1^{m_1 + \frac{1}{2}} e^{-m_1}, \\ m_2! &= \sqrt{2\pi} m_2^{m_2 + \frac{1}{2}} e^{-m_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ m_{\sigma-1}! &= \sqrt{2\pi} m_{\sigma-1}^{m_{\sigma-1} + \frac{1}{2}} e^{-m_{\sigma-1}}, \\ (\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1})! &= \\ &= \sqrt{2\pi} (\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1})^{\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1} + \frac{1}{2}} e^{-(\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1})}. \end{aligned}$$

Внеся отсюда величины

$$\mu!, m_1!, m_2!, \dots, m_{\sigma-1}!, \quad (\mu - m_1 - m_2 \dots - m_{\sigma-1})!$$

в (89), по сокращении и приведении, находим

$$P = \frac{\sqrt{2\pi\mu}}{\sqrt{2\pi m_1 \cdot 2\pi m_2 \cdots 2\pi m_{\sigma-1} \cdot 2\pi (\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1})}} \left(\frac{p_1\mu}{m_1}\right)^{m_1} \left(\frac{p_2\mu}{m_2}\right)^{m_2} \cdots \cdots \left(\frac{p_{\sigma-1}\mu}{m_{\sigma-1}}\right)^{m_{\sigma-1}} \left(\frac{(1-p_1-p_2-\cdots-p_{\sigma-1})\mu}{\mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_{\sigma-1}}\right)^{\mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_{\sigma-1}}. \quad (90)$$

Но, полагая

$$m_1 - p_1\mu = Z_1, \quad m_2 - p_2\mu = Z_2, \quad \dots, \quad m_{\sigma-1} - p_{\sigma-1}\mu = Z_{\sigma-1}, \quad (91)$$

в сумме этих уравнений находим

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{\sigma-1} - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{\sigma-1})\mu = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\sigma-1},$$

или

$$-\mu + m_1 + m_2 + \cdots + m_{\sigma-1} + (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{\sigma-1})\mu = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\sigma-1}. \quad (92)$$

Откуда, по сокращении на $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_{\sigma-1}$, имеем

$$1 - \frac{p_1\mu}{m_1} = \frac{Z_1}{m_1}, \quad 1 - \frac{p_2\mu}{m_2} = \frac{Z_2}{m_2}, \quad \dots, \quad 1 - \frac{p_{\sigma-1}\mu}{m_{\sigma-1}} = \frac{Z_{\sigma-1}}{m_{\sigma-1}},$$

$$-1 + \frac{(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{\sigma-1})\mu}{\mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_{\sigma-1}} = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\sigma-1}}{\mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_{\sigma-1}}.$$

Внося отсюда значения $\frac{p_1\mu}{m_1}, \frac{p_2\mu}{m_2}, \dots, \frac{p_{\sigma-1}\mu}{m_{\sigma-1}}, \frac{(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{\sigma-1})\mu}{\mu - m_1 - m_2 - \cdots - m_{\sigma-1}}$ в (90), получаем следующее выражение для P

$$P = \frac{\sqrt{2\pi\mu}}{\sqrt{2\pi m_1 \cdot 2\pi m_2 \cdots 2\pi m_{\sigma-1} \cdot 2\pi (\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1})}} \left(1 - \frac{Z_1}{m_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{Z_2}{m_2}\right)^{m_2} \cdots \cdots \left(1 - \frac{Z_{\sigma-1}}{m_{\sigma-1}}\right)^{m_{\sigma-1}} \left(1 + \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\sigma-1}}{\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1}}\right)^{\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1}},$$

что с помощью логарифмов может быть представлено так:

$$P = \frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \lg \left(1 - \frac{Z_k}{m_k}\right) + (\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1}) \lg \left(1 + \frac{Z_1 + \cdots + Z_{\sigma-1}}{\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1}}\right)}}{\sqrt{2\pi m_1 \cdot 2\pi m_2 \cdots 2\pi m_{\sigma-1} \cdot 2\pi (\mu - m_1 - \cdots - m_{\sigma-1})}}.$$

Разлагая здесь логарифмы в ряды по восходящим степеням $\frac{Z_1}{m_1}, \frac{Z_2}{m_2}, \dots, \frac{Z_{\sigma-1}}{m_{\sigma-1}}, \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{\sigma-1}}{\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}}$ и пренебрегая их третьими и высшими степенями, находим

$$P_m = \frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=0}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2m_k} - \frac{(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{\sigma-1})^2}{2(\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1})}}}{\sqrt{2\pi m_1 \cdot 2\pi m_2 \cdot \dots \cdot 2\pi m_{\sigma-1} \cdot 2\pi (\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1})}},$$

куда внеся значения $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$ из (91) и (92), и пренебрегши $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\sigma-1}, Z_1 + \dots + Z_{\sigma-1}$ перед $p_1\mu, p_2\mu, \dots, p_{\sigma-1}\mu, (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1})\mu$, получим

$$P = \frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=0}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{\sigma-1})^2}{2(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1})\mu}}, \quad (93)$$

где, по (91),

$$m_1 - p_1\mu = Z_1, \quad m_2 - p_2\mu = Z_2, \quad \dots, \quad m_{\sigma-1} - p_{\sigma-1}\mu = Z_{\sigma-1}. \quad (94)$$

Вот как выражается вероятность, что события $E_1, E_2, \dots, E_{\sigma-1}, E_{\sigma}$ в μ случаях, имея вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_{\sigma-1}, 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1}$, повторятся $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$ раз.

Отсюда по первой теореме вероятность, что $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$, числа повторений событий $E_1, E_2, \dots, E_{\sigma-1}, E_{\sigma}$, будут какие-либо числа, удовлетворяющие условию

$$S \leq \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_{\sigma-1} m_{\sigma-1} + \alpha_{\sigma} (\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}) \leq S + s, \quad (95)$$

определится суммой значений

$$\frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=0}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{\sigma-1})^2}{2(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1})\mu}},$$

Определением этой суммы теперь и займемся, называя ее для сокращения Π .

§ 28. Уравнение (61) для $X = -\frac{D}{\sqrt{2\mu}}$, $x = \frac{D+D'+1}{\sqrt{2\mu}}$, $s = D+D'$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \sum_{k=-D}^{D'} e^{-\frac{k^2}{2\mu}} = T\left(-\frac{D}{\sqrt{2\mu}}\right) - T\left(\frac{D'+1}{\sqrt{2\mu}}\right),$$

откуда, по (62),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \sum_{k=-D}^{D'} e^{-\frac{k^2}{2\mu}} = 1 - T\left(\frac{D}{\sqrt{2\mu}}\right) - T\left(\frac{D'+1}{\sqrt{2\mu}}\right)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \sum_{k=D}^{D'} e^{-\frac{k^2}{2\mu}} = 1 \quad (99)$$

для величин D , D' положительных, значительных в отношении $\sqrt{2\mu}$, ибо в этом случае, как видно из таблицы T , значения $T\left(\frac{D}{\sqrt{2\mu}}\right)$, $T\left(\frac{D'+1}{\sqrt{2\mu}}\right)$ весьма мало разнятся от 0.

Но легко заметить, что

$$\frac{e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{(Z_k - p_k Z)^2}{2p_k \mu} - \frac{[Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{\sigma-1} + (1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})Z]^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1 \mu \cdot 2\pi p_2 \mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1} \mu \cdot 2\pi (1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}$$

приводится к

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{Z^2}{2\mu}} \frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2p_k \mu} - \frac{(Z_1 + \dots + Z_{\sigma-1})^2}{2(1-p_1-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1 \mu \cdot 2\pi p_2 \mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1} \mu \cdot 2\pi (1-p_1-\dots-p_{\sigma-1})\mu}},$$

а потому сумма значений

$$\frac{e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{(Z_k - p_k Z)^2}{2p_k \mu} - \frac{[Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{\sigma-1} + (1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})Z]^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1 \mu \cdot 2\pi p_2 \mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1} \mu \cdot 2\pi (1-p_1-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}$$

для величин

$$Z = -D, -D+1, -D+2, \dots, D'-1, D', \quad (100)$$

приводясь к

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\sum_{l=D}^{D'} \frac{l^2}{2\mu}} \frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(Z_1+Z_2+\dots+Z_{\sigma-1})^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}},$$

по (99), будет равняться

$$\frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(Z_1+Z_2+\dots+Z_{\sigma-1})^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}.$$

Вследствие этого П (§ 27), сумма значений

$$\frac{\sqrt{2\pi\mu} e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{Z_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(Z_1+Z_2+\dots+Z_{\sigma-1})^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}},$$

для величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\sigma-1}$ (97), удовлетворяющих условиям (96), (98), определится суммой значений

$$e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{(Z_k - p_k Z)^2}{2p_k\mu} - \frac{[Z_1+Z_2+\dots+Z_{\sigma-1}+(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})Z]^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}},$$

для этих величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\sigma-1}$ и для величин (100). Если же мы внесем в это выражение $x_1, x_2, \dots, x_{\sigma-1}$ на место $Z_1 - p_1 Z, Z_2 - p_2 Z, \dots, Z_{\sigma-1} - p_{\sigma-1} Z$, то оно представится через

$$e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{x_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(x_1+x_2+\dots+x_{\sigma-1}+Z)^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}},$$

где значениям $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\sigma-1}$ (97), удовлетворяющим условиям (96), (98), будут соответствовать такие значения $x_1, x_2, \dots, x_{\sigma-1}$:

[illegible]

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}
S - \mu [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1} + \alpha_s (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1})] &\leq \\
&\leq (\alpha_1 - \alpha_s) (x_1 + p_1 Z) + (\alpha_2 - \alpha_s) (x_2 + p_2 Z) + \dots \\
&\quad \dots + (\alpha_{s-1} - \alpha_s) (x_{s-1} + p_{s-1} Z) \leq \\
&\leq S + s - \mu [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1} + \alpha_s (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1})], \\
(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1}) \mu - (p_1 + p_2 + \dots + p_{s-1}) Z - x_1 - \\
&\quad - x_2 - \dots - x_{s-1} \geq 0,
\end{aligned} \tag{102}$$

из которых первое напишется так:

$$\begin{aligned} S - N\mu &\leq (\alpha_1 - \alpha_s) x_1 + (\alpha_2 - \alpha_s) x_2 + \dots + (\alpha_{s-1} - \alpha_s) x_{s-1} + (N - \alpha_s) Z \leq \\ &\leq S + s - N\mu, \end{aligned} \quad (102')$$

если положим для сокращения

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1} + \alpha_s (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1}) = N. \quad (103)$$

Вследствие этого Π определится суммой значений

$$e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{x_k^2}{2p_k\mu} - \frac{(x_1+x_2+\dots+x_{\sigma-1}+Z)^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}$$

для величин (101), (100) $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, Z$, удовлетворяющих условиям (102), (102'). Но значение

$$e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{x_k^2}{2p_{k\mu}} - \frac{(x_1+x_2+\dots+x_{\sigma-1}+Z)^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}$$

значения

$$\sqrt{2\pi p_1 \mu \cdot 2\pi p_2 \mu \cdots 2\pi p_{\sigma-1} \mu \cdot 2\pi (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{\sigma-1}) \mu}$$

сумме значений

$$\sqrt{2\pi p_{1\mu} \cdot 2\pi p_{2\mu} \cdots 2\pi p_{s-1\mu} \cdot 2\pi (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{s-1})_\mu}$$

для величин

$$\begin{array}{l}
x_1 = -A_1, \quad -A_1 + 1, \quad -A_1 + 2, \dots, \quad B_1 - 1, \quad B_1, \\
x_2 = -A_2, \quad -A_2 + 1, \quad -A_2 + 2, \dots, \quad B_2 - 1, \quad B_2, \\
\vdots \\
x_{\sigma-1} = -A_{\sigma-1}, \quad -A_{\sigma-1} + 1, \quad -A_{\sigma-1} + 2, \dots, \quad B_{\sigma-1} - 1, \quad B_{\sigma-1}, \\
Z = -D, \quad -D + 1, \quad -D + 2, \dots, \quad D' - 1, \quad D',
\end{array} \tag{105}$$

удовлетворяющих условиям

$$(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{s-1})\mu - (p_1 + p_2 + \dots + p_{s-1})Z - x_1 - x_2 - \dots - x_{s-1} \geq 0, \quad (106)$$

$$S - N\mu \leq (a_1 - a_s) x_1 + (a_2 - a_s) x_2 + \dots + (a_{s-1} - a_s) x_{s-1} + (N - a_s) Z \leq S + s - N\mu. \quad (107)$$

Но подставляя сюда x_σ на место $x_1 + x_2 + \dots + x_{\sigma-1} + Z$, мы (104) представим через

$$\frac{e^{-\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{x_k^2}{2p_k\mu} - \frac{x_\sigma^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1\mu \cdot 2\pi p_2\mu \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}\mu \cdot 2\pi(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})\mu}},$$

и величинам (105) Z , удовлетворяющим условиям (106), (107), будут соответствовать значения x_σ

$$x_\sigma = -D + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k, -D + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k + 1, \dots, D' + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k, \quad (108)$$

удовлетворяющие условиям

$$(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k)\mu - (\sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k)x_\sigma - (1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k) \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k \geq 0, \quad (109)$$

$$S - N\mu \leq \sum_{k=1}^{\sigma-1} (\alpha_k - N)x_k + (N - \alpha_\sigma)x_\sigma \leq S + s - N\mu. \quad (110)$$

Замечания же, сделанные нами относительно рядов величин $x_1, x_2, \dots, x_{\sigma-1}$ (101) и их пределов, здесь будут иметь место относительно ряда величин (108) x_σ и пределов его $x_\sigma \geq -D + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k$,

$$x_\sigma \leq D' + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k, \quad x_\sigma \leq \frac{1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k}{\sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k} (\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k) \quad \text{по (109).} \quad \text{Откуда мы}$$

заключаем, что величина рассматриваемой суммы изменится не приметно, если мы количеству x_σ вместо величин (108) в пределах

$$x_\sigma \geq -D + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k, \\ x_\sigma \leq D' + \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k \quad \text{и} \quad \leq \frac{1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k}{\sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k} (\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} x_k)$$

будем давать величины

$$x_{\sigma} = -A_{\sigma}, -A_{\sigma} + 1, -A_{\sigma} + 2, \dots, B_{\sigma} - 1, B_{\sigma}, \quad (111)$$

ограничивая их пределами $-A_{\sigma}, B_{\sigma}$, где A_{σ}, B_{σ} — какие-либо большие положительные числа.

Но сумма значений

$$\frac{\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{x_k^2}{2p_k^{\mu}} + \frac{x_{\sigma}^2}{2(1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})^{\mu}}}{\sqrt{2\pi p_1^{\mu} \cdot 2\pi p_2^{\mu} \cdot \dots \cdot 2\pi p_{\sigma-1}^{\mu} \cdot 2\pi (1-p_1-p_2-\dots-p_{\sigma-1})^{\mu}}}$$

для величин (108), (111) $x_1, x_2, \dots, x_{\sigma-1}, x_{\sigma}$, удовлетворяющих условию (110)

$$S - N\mu \leq \sum_{k=1}^{\sigma-1} (\alpha_k - N) x_k + (N - \alpha_{\sigma}) x_{\sigma} \leq S + s - N\mu,$$

по (§ 23), для $\mu, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{\sigma-1}, B_{\sigma-1}, A_{\sigma}, B_{\sigma}$ больших чисел равняется

$$\begin{aligned} & T \left(\frac{S - N\mu}{\sqrt{2 \sum_{k=1}^{\sigma-1} (\alpha_k - N)^2 p_k^{\mu} + 2(N - \alpha_{\sigma})^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right)^{\mu}}} \right) - \\ & - T \left(\frac{S + s - N\mu}{\sqrt{2 \sum_{k=1}^{\sigma-1} (\alpha_k - N)^2 p_k^{\mu} + 2(N - \alpha_{\sigma})^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right)^{\mu}}} \right) \end{aligned} \quad (112)$$

или, по раскрытии скобок, вследствие (103),

$$\begin{aligned} & T \left(\frac{S - N\mu}{\sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_k^2 p_k + \alpha_{\sigma}^2 (1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k) - N^2 \right\}^{\mu}}} \right) - \\ & - T \left(\frac{S + s - N\mu}{\sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} \alpha_k^2 p_k + \alpha_{\sigma}^2 (1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k) - N^2 \right\}^{\mu}}} \right). \end{aligned} \quad (113)$$

Вот величина Π (§ 27) вероятности, что $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$, числа повторений в μ случаях событий

$E_1, E_2, \dots, E_{\sigma-1}, E_{\sigma}$, которых вероятности $p_1, p_2, \dots, p_{\sigma-1}, 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1}$, будут удовлетворять условию

$$S \leq \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_{\sigma-1} m_{\sigma-1} + \alpha_{\sigma} (\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}) \leq S + s.$$

§ 29. Если предмет K в различных случаях может иметь σ различных величин $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma-1}, h_{\sigma}$ и из μ величин его, взятых случайно, m_1 равны h_1 , m_2 равны h_2 , $\dots$, $m_{\sigma-1}$ равны $h_{\sigma-1}$ и остальные $\mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$ равны h_{σ} , то

$$\frac{1}{\mu} \left(\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + (\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1}) h_{\sigma} \right),$$

или

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{h_k}{\mu} m_k + \frac{h_{\sigma}}{\mu} (\mu - m_1 - \dots - m_{\sigma-1}) \quad (114)$$

будет среднее этих μ величин K . Но если $p_1, p_2, \dots, p_{\sigma-1}, 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1}$ суть вероятности предмету K иметь величины $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma-1}, h_{\sigma}$, то $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - m_1 - m_2 - \dots - m_{\sigma-1}$ выражения (114) будут числа повторений в μ случаях событий, которых вероятности $p_1, p_2, \dots, p_{\sigma-1}, 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{\sigma-1}$, а потому вероятность, что эти числа удовлетворят условию

$$S \leq \sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{h_k}{\mu} m_k + \frac{h_{\sigma}}{\mu} \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) \leq S + s, \quad (115)$$

или, что все равно, условию

$$S\mu \leq \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k m_k + h_{\sigma} (\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k) \leq S\mu + s\mu,$$

будет, по (113),

$$\begin{aligned} & T \left(\frac{S\mu - N\mu}{\sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_{\sigma}^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right\} \mu}} \right) - \\ & - T \left(\frac{S\mu + s\mu - N\mu + 1}{\sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_{\sigma}^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right\} \mu}} \right), \end{aligned} \quad (116)$$

где

$$N = \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right). \quad (117)$$

Полагая в выражении (116)

$$S = N - \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right\} \mu}$$

$$s = 2 \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right\} \mu}$$

и пренебрегая

$$\left\{ 2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right] \mu \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

под знаком T , находим $T(-u) - T(u)$, или, по (62), $1 - 2T(u)$ для величины вероятности, что среднее μ величин K (115) будет не менее

$$N - \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right] \mu}$$

и не более

$$N + \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right] \mu}$$

или что среднее μ величин K от N будет разниться не более как на

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right] \mu}. \quad (118)$$

Но $1 - 2T(u)$ при значительной величине u , как видим из таблицы T , весьма мало разнится от 1, а

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - N^2 \right] \mu},$$

равное по (117)

$$u \sqrt{\frac{2}{\mu} \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) - \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) \right]^2 \right\}},$$

при μ чрезвычайно большом величина весьма малая. Следовательно, весьма вероятно, что среднее большого числа величин K будет незначительно разниться с N , где N , по (117), есть

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right),$$

количество, зависящее только от $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma-1}, h_\sigma$, величин возможных для K , и их вероятностей. Вследствие этого, если условия, определяющие μ величин K , остаются без перемены и для других μ' величин, то при больших числах μ, μ' средние μ и μ' величин K будут разниться весьма мало. И обратно: мы узнаем разность этих условий по значительной разности средних величин.

§ 30. Но чтобы судить о близости среднего μ величин K к $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right)$, мы должны определить значение

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu}, \quad (119)$$

ибо, как показали (§ 29), имеем вероятность $1 - 2T(u)$, что среднее μ величин K от N или (117) от $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right)$ будет разниться не более как на это количество.

Для определения приближенной величины (118) принимают N равным

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right],$$

среднему μ величин K , что, как видели (§ 29), для μ числа большого мало разнится с N . Вследствие этого выражение (119) заменится таким:

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - \left[\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \frac{1}{\mu} \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]^2 \right\} \mu},$$

ИЛИ

$$\sqrt{\frac{2}{\mu} \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - \left[\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \frac{1}{\mu} \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]^2 \right\}}. \quad (120)$$

Что же касается до приближенного значения

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right),$$

то, заменяя в (115), (116), (118) $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma-1}, h_\sigma$ через $h_1^2, h_2^2, \dots, h_{\sigma-1}^2, h_\sigma^2$ и пренебрегая

$$\left\{ 2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu \right\}^{-1/2}$$

под знаком T , находим

$$T \left(\frac{S\mu - N\mu}{\sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu}} \right) - \\ - T \left(\frac{S\mu + s\mu - N\mu}{\sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu}} \right), \quad (121)$$

где

$$N = \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right), \quad (122)$$

для величины вероятности, что числа $m_1, m_2, \dots, m_{\sigma-1}, \mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k$ будут удовлетворять условию

$$S\mu \leq \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 m_k + h_\sigma^2 \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) \leq S\mu + s\mu,$$

ИЛИ

$$S \leq \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 m_k + h_\sigma^2 \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) \right] \leq S + s.$$

Отсюда, делая

$$S = N - \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 m_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu},$$

$$s = \frac{2u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 m_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu},$$

найдем $T(-u) - T(u)$, или по (62) $1 - 2T(u)$ для величины вероятности, что

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 m_k + h_\sigma^2 \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) \right]$$

будет не менее

$$N - \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 m_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu}$$

и не более

$$N + \frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu},$$

или, что

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right]$$

от N будет разниться не более как на

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu}.$$

Но $1 - 2T(u)$ при значительной величине u весьма мало разнится от 1, а

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - N^2 \right] \mu},$$

приводясь, по (122), к

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left\{ \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^4 p_k + h_\sigma^4 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) - \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) \right]^2 \right\} \mu},$$

становится малою величиною при μ большом. Следовательно, весьма вероятно, что при μ — большом числе количество

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right]$$

будет мало разниться от N , или (122) от $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right)$.

А потому, без значительного изменения величины (122), можем заменить здесь $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k^2 p_k + h_\sigma^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right)$ через

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right].$$

Вследствие чего приближенное значение (118) будет

$$u \left(\frac{2}{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right] - \frac{1}{\mu^2} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]^2 \right\} \right)^{1/2}.$$

Итак (§ 29), имеем вероятность $1 - 2T(u)$, что среднее μ величин K от $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right)$ будет разниться не более как на

$$u \left(\frac{2}{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right] - \frac{1}{\mu^2} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]^2 \right\} \right)^{1/2}. \quad (123)$$

Это выражение мы можем написать иначе, замечая, что количество

$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]$ есть среднее μ величин K , а

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right]$$

есть среднее их квадратов, а потому, изображая эти средние величины через $[K]_\mu$, $[K^2]_\mu$, выражение (123) представим так:

$$u \sqrt{\frac{2}{\mu} ([K^2]_\mu - [K]_\mu^2)}.$$

Но легко убедиться, что

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right] - \frac{1}{\mu^2} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]^2 \right\} = \\ & = \frac{2}{\mu^2} \left(\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \left\{ h_k - \frac{1}{\mu} \left[\sum_{i=1}^{\sigma-1} m_i h_i + \left(\mu - \sum_{i=1}^{\sigma-1} m_i \right) h_\sigma \right] \right\}^2 + \right. \\ & \left. + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) \left\{ h_\sigma - \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right] \right\}^2 \right), \end{aligned}$$

где, заменяя

$$\frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]$$

через $[K]_\mu$, находим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma^2 \right] - \frac{1}{\mu^2} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k h_k + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) h_\sigma \right]^2 \right\} = \\ & = \frac{2}{\mu^2} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k (h_k - [K]_\mu)^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) (h_\sigma - [K]_\mu)^2 \right], \end{aligned}$$

и выражение (123) представится так:

$$u \sqrt{\frac{2}{\mu} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k (h_k - [K]_{\mu})^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) (h_{\sigma} - [K]_{\mu})^2 \right] \right\}}, \quad (124)$$

или

$$\frac{u}{\mu} \sqrt{2 \left[\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k (h_k - [K]_{\mu})^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) (h_{\sigma} - [K]_{\mu})^2 \right]}, \quad (125)$$

где

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k (h_k - [K]_{\mu})^2 + \left(\mu - \sum_{k=1}^{\sigma-1} m_k \right) (h_{\sigma} - [K]_{\mu})^2$$

есть сумма квадратов разностей всех μ величин K и их средней величины.

§ 31. Если $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma-1}, h_{\sigma}$ суть разные величины, получаемые для одного и того же искомого K из различных наблюдений, то истинная величина K определится уравнениями

$$\begin{aligned} h_1 &= K + \varepsilon_1, \\ h_2 &= K + \varepsilon_2, \\ &\dots \dots \dots \\ h_{\sigma} &= K + \varepsilon_{\sigma}, \end{aligned} \quad (126)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\sigma}$ погрешности наблюдений, вследствие которых находим для K величины $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma}$. Называя через $p_1, p_2, \dots, p_{\sigma}$ вероятности этих погрешностей, или, что одно и то же, вероятности получить из наблюдений для K величины $h_1, h_2, \dots, h_{\sigma}$, мы из уравнений (126) находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_{\sigma} \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) &= \sum_{k=1}^{\sigma-1} (K + \varepsilon_k) p_k + (K + \varepsilon_{\sigma}) \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right) = \\ &= K + \sum_{k=1}^{\sigma-1} \varepsilon_k p_k + \varepsilon_{\sigma} \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k \right). \end{aligned} \quad (127)$$

Если же предположим в наблюдениях, определяющих величину K , одинаковую возможность дать величину больше или меньше истинной на одно и то же количество, что весьма вероятно, то возможные

погрешности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\sigma$ будут попарно равны, отличаясь только знаками, и будут иметь одинаковые вероятности, вследствие чего сумма $\sum_{k=1}^{\sigma-1} \varepsilon_k p_k + \varepsilon_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right)$ приведет к 0, и по (127) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right) = K. \quad (128)$$

Но по предыдущему (§ 30) мы имеем вероятность $1 - 2T(u)$, что среднее μ величин K будет разниться от $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right)$ не более как на $u \sqrt{\frac{2}{\mu} ([K^2]_\mu - [K]_\mu^2)}$, когда $h_1, h_2, \dots, h_\sigma$ суть возможные величины K и $p_1, p_2, \dots, p_\sigma$ их вероятности. Следовательно, предполагая $h_1, h_2, \dots, h_\sigma$ различными величинами, получаемыми из наблюдений для искомого K , причем по (128) $\sum_{k=1}^{\sigma-1} h_k p_k + h_\sigma \left(1 - \sum_{k=1}^{\sigma-1} p_k\right)$ есть K , истинная величина искомого, мы в $1 - 2T(u)$ находим выражение вероятности, что среднее μ величин искомого, полученных из различных наблюдений, от истинной величины его будет разниться не более как на $u \sqrt{\frac{2}{\mu} ([K^2]_\mu - [K]_\mu^2)}$, или, что одно и то же, на количество (125). Например, 29 наблюдений, произведенных Кавендишем для определения плотности Земли, дали для ее величины

5,50	5,26	5,58	5,62	5,79	5,42	5,46	5,85
5,61	5,55	5,65	5,29	5,10	5,47	5,30	
5,88	5,36	5,57	5,44	5,27	5,63	5,75	
5,07	5,29	5,53	5,34	5,39	5,34	5,68	

Находя среднее этих 29 величин плотности Земли равным 5,48 и среднее их квадратов равным 30,071, мы, по доказанному, имеем вероятность $1 - 2T(u)$, что 5,48 от плотности Земли разнится не более как на $u \sqrt{\frac{2}{29} (30,071 - 5,48^2)}$, или не более как на 0,053 u . Так, делая $u = 1,89$, находим вероятность $1 - 2T(1,89) = 0,992\,479\,4$, что 5,48 от плотности Земли разнится не более как на $0,053 \cdot 1,89$, или на 0,1.

Т а б л и ц а Т

Z	T(Z)	Z	T(Z)	Z	T(Z)	Z	T(Z)	Z	T(Z)		
0,00	0,500 000 0	0,50	0,239 750 0	1,00	0,078 649 6	1,50	0,016 947 4	2,00	0,002 338 8	2,50	0,000 203 47
0,01	0,494 358 3	0,51	0,235 378 1	1,01	0,076 594 7	1,51	0,016 361 6	2,01	0,002 237 6	2,51	0,000 192 85
0,02	0,488 717 8	0,52	0,231 050 6	1,02	0,074 581 0	1,52	0,015 793 2	2,02	0,002 140 2	2,52	0,000 182 75
0,03	0,483 079 5	0,53	0,226 767 9	1,03	0,072 607 9	1,53	0,015 241 9	2,03	0,002 046 8	2,53	0,000 173 14
0,04	0,477 444 6	0,54	0,222 530 4	1,04	0,070 675 1	1,54	0,014 707 1	2,04	0,001 957 1	2,54	0,000 164 01
0,05	0,471 814 1	0,55	0,218 338 3	1,05	0,068 782 0	1,55	0,014 188 6	2,05	0,001 870 9	2,55	0,000 155 33
0,06	0,466 159 2	0,56	0,214 192 1	1,06	0,066 928 1	1,56	0,013 685 9	2,06	0,001 788 2	2,56	0,000 147 08
0,07	0,460 571 2	0,57	0,210 092 1	1,07	0,065 113 4	1,57	0,013 198 7	2,07	0,001 708 9	2,57	0,000 132 40
0,08	0,454 960 9	0,58	0,206 038 5	1,08	0,063 336 9	1,58	0,012 726 5	2,08	0,001 632 8	2,58	0,000 131 80
0,09	0,449 359 7	0,59	0,202 031 7	1,09	0,061 598 5	1,59	0,012 269 1	2,09	0,001 559 6	2,59	0,000 124 73
0,10	0,443 768 5	0,60	0,198 071 9	1,10	0,059 897 5	1,60	0,011 825 0	2,10	0,001 489 7	2,60	0,000 118 02
0,11	0,438 188 5	0,61	0,194 159 4	1,11	0,058 233 5	1,61	0,011 396 5	2,11	0,001 422 6	2,61	0,000 111 64
0,12	0,432 620 8	0,62	0,190 294 3	1,12	0,056 606 0	1,62	0,010 980 9	2,12	0,001 358 2	2,62	0,000 105 59
0,13	0,427 066 4	0,63	0,186 476 8	1,13	0,055 014 6	1,63	0,010 578 5	2,13	0,001 296 5	2,63	0,000 099 85
0,14	0,421 526 5	0,64	0,182 707 1	1,14	0,053 458 8	1,64	0,010 189 1	2,14	0,001 237 3	2,64	0,000 094 41
0,15	0,416 002 0	0,65	0,178 985 4	1,15	0,051 938 1	1,65	0,009 812 2	2,15	0,001 180 7	2,65	0,000 089 24
0,16	0,410 494 1	0,66	0,175 311 7	1,16	0,050 451 9	1,66	0,009 447 5	2,16	0,001 126 4	2,66	0,000 084 34
0,17	0,405 003 8	0,67	0,171 686 2	1,17	0,048 999 8	1,67	0,009 094 8	2,17	0,001 074 4	2,67	0,000 079 70
0,18	0,399 532 1	0,68	0,168 109 0	1,18	0,047 581 3	1,68	0,008 753 6	2,18	0,001 024 7	2,68	0,000 075 29
0,19	0,394 080 1	0,69	0,164 580 0	1,19	0,046 195 8	1,69	0,008 423 7	2,19	0,000 977 0	2,69	0,000 072 12
0,20	0,388 648 7	0,70	0,161 099 5	1,20	0,044 843 0	1,70	0,008 104 8	2,20	0,000 931 4	2,70	0,000 067 16
0,21	0,383 239 1	0,71	0,157 667 3	1,21	0,043 522 2	1,71	0,007 796 5	2,21	0,000 887 8	2,71	0,000 063 42
0,22	0,377 852 1	0,72	0,154 283 5	1,22	0,042 233 0	1,72	0,007 498 6	2,22	0,000 846 0	2,72	0,000 059 87
0,23	0,372 488 7	0,73	0,150 948 1	1,23	0,040 974 9	1,73	0,007 210 7	2,23	0,000 806 1	2,73	0,000 056 51

0,24 0,367 150 0	0,74 0,147 661 0	1,24 0,039 747 4	1,74 0,006 932 7	2,24 0,000 767 9	2,74 0,000 053 32
0,25 0,361 836 8	0,75 0,144 422 2	1,25 0,038 549 9	1,75 0,006 664 5	2,25 0,000 731 3	2,75 0,000 050 31
0,26 0,356 550 1	0,76 0,141 231 6	1,26 0,037 382 0	1,76 0,006 404 8	2,26 0,000 696 4	2,76 0,000 047 46
0,27 0,351 290 9	0,77 0,138 089 2	1,27 0,036 243 2	1,77 0,006 154 5	2,27 0,000 663 0	2,77 0,000 044 76
0,28 0,346 060 0	0,78 0,134 994 8	1,28 0,035 132 9	1,78 0,005 912 9	2,28 0,000 631 1	2,78 0,000 042 20
0,29 0,340 858 3	0,79 0,131 948 2	1,29 0,034 050 6	1,79 0,005 679 7	2,29 0,000 600 7	2,79 0,000 039 79
0,30 0,335 686 6	0,80 0,128 949 5	1,30 0,032 996 0	1,80 0,005 454 7	2,30 0,000 571 6	2,80 0,000 037 50
0,31 0,330 545 9	0,81 0,125 998 3	1,31 0,031 968 4	1,81 0,005 237 7	2,31 0,000 543 8	2,81 0,000 035 34
0,32 0,325 437 0	0,82 0,123 094 6	1,32 0,030 967 4	1,82 0,005 028 4	2,32 0,000 517 2	2,82 0,000 033 30
0,33 0,320 360 7	0,83 0,120 238 1	1,33 0,029 992 5	1,83 0,004 826 6	2,33 0,000 491 9	2,83 0,000 031 37
0,34 0,315 317 8	0,84 0,117 428 6	1,34 0,029 043 1	1,84 0,004 632 0	2,34 0,000 467 7	2,84 0,000 029 55
0,35 0,310 309 5	0,85 0,114 666 0	1,35 0,028 118 9	1,85 0,004 444 5	2,35 0,000 444 6	2,85 0,000 027 83
0,36 0,305 335 2	0,86 0,111 949 9	1,36 0,027 219 3	1,86 0,004 263 7	2,36 0,000 422 6	2,86 0,000 026 20
0,37 0,300 397 0	0,87 0,109 280 1	1,37 0,026 343 8	1,87 0,004 089 7	2,37 0,000 401 6	2,87 0,000 024 66
0,38 0,295 495 3	0,88 0,106 656 3	1,38 0,025 492 0	1,88 0,003 921 9	2,38 0,000 381 5	2,88 0,000 023 21
0,39 0,290 630 7	0,89 0,104 078 4	1,39 0,024 663 3	1,89 0,003 760 3	2,39 0,000 362 4	2,89 0,000 021 84
0,40 0,235 803 9	0,90 0,101 545 9	1,40 0,023 857 4	1,90 0,003 604 8	2,40 0,000 344 2	2,90 0,000 020 55
0,41 0,281 015 5	0,91 0,099 058 6	1,41 0,023 073 8	1,91 0,003 455 0	2,41 0,000 326 9	2,91 0,000 019 33
0,42 0,276 266 2	0,92 0,096 616 1	1,42 0,022 311 9	1,92 0,003 310 9	2,42 0,000 310 3	2,92 0,000 018 17
0,43 0,271 556 6	0,93 0,094 218 2	1,43 0,021 571 3	1,93 0,003 172 1	2,43 0,000 294 6	2,93 0,000 017 09
0,44 0,266 887 4	0,94 0,091 864 5	1,44 0,020 851 7	1,94 0,003 038 7	2,44 0,000 279 6	2,94 0,000 016 07
0,45 0,262 259 1	0,95 0,089 554 6	1,45 0,020 152 5	1,95 0,002 910 3	2,45 0,000 265 3	2,95 0,000 015 10
0,46 0,257 672 2	0,96 0,087 288 2	1,46 0,019 473 2	1,96 0,002 786 8	2,46 0,000 251 7	2,96 0,000 014 19
0,47 0,253 127 4	0,97 0,085 064 8	1,47 0,018 813 5	1,97 0,002 668 1	2,47 0,000 238 7	2,97 0,000 013 33
0,48 0,248 625 1	0,98 0,082 884 1	1,48 0,018 172 9	1,98 0,002 554 0	2,48 0,000 226 4	2,98 0,000 012 52
0,49 0,244 165 8	0,99 0,080 745 9	1,49 0,017 551 0	1,99 0,002 444 3	2,49 0,000 214 6	2,99 0,000 011 76

 $T(3) = 0,000\,011\,045$ $T(4) = 0,000\,000\,007\,709$ $T(5) = 0,000\,000\,000\,001$

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОГО ОБЩЕГО ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Предметом этой заметки будет доказательство следующего предложения:

Можно всегда назначить столь большое число испытаний, при котором будет сколь угодно близка к достоверности вероятность того, что отношение числа повторений некоторого события E к числу испытаний не уклонится от средней арифметической вероятностей события E свыше данных пределов, как бы ни были тесны эти пределы.

Это основное предложение теории вероятностей, заключающее как частный случай закон Якова Бернулли, было выведено г. Пуассоном из формулы, которую он получил, вычисляя по приближению величину одного довольно сложного определенного интеграла („Recherches sur les probabilités des jugements“, chap. IV).

Однако, как ни остроумен способ, употребленный знаменитым геометром, он не доставляет предела погрешности, которую допускает этот приближенный анализ, и вследствие такой неизвестности величины погрешности доказательство не имеет надлежащей строгости.

Я покажу здесь, как можно строго доказать это предложение вполне элементарными рассуждениями.

§ 2. Положим, что $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ представляют вероятности события E для μ последовательных испытаний, а P_m — вероятность, что E случится не менее m раз в эти μ испытаний. Как известно, выражение P_m можно получить, разлагая произведение

$$(p_1 t + 1 - p_1)(p_2 t + 1 - p_2)(p_3 t + 1 - p_3) \dots (p_\mu t + 1 - p_\mu)$$

по степеням t и составляя сумму коэффициентов при $t^m, t^{m+1}, \dots, t^\mu$.

Отсюда вытекают, очевидно, такие два свойства P_m :

1) это количество содержит $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ в степенях не выше первой; 2) оно симметрично относительно $p_1, p_2, \dots, p_\mu$.

В силу первого свойства P_m можно представить под видом

$$U + Vp_1 + V_1p_2 + Wp_1p_2,$$

где U, V, V_1, W не зависят от p_1 и p_2 ; в силу же второго, V и V_1 равны. Итак, форма выражения P_m будет

$$U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2,$$

где U, V, W не содержат ни p_1 , ни p_2 . На этом основании легко доказать относительно выражения P_m следующую теорему:

Теорема. Если p_1, p_2 не равны, то можно без изменения величин $p_1 + p_2, p_3, \dots, p_\mu$ увеличить P_m , принимая $p_1 = p_2$, или можно притти к одному из следующих уравнений:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1$$

без уменьшения величины P_m .

Доказательство. Мы видели, что выражение P_m можно представить под видом $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2$, где U, V, W не зависят от p_1 и p_2 .

Но в формуле $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2$ представляется всегда один из трех случаев:

$$W > 0, \quad W = 0, \quad W < 0.$$

В первом случае сумма $p_1 + p_2$ остается та же, а величина P_m увеличивается на $\frac{1}{4} W(p_1 - p_2)^2$, когда мы меняем p_1, p_2 на $\frac{1}{2}(p_1 + p_2), \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, ибо разность

$$U + V\left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\right] + W\frac{1}{2}(p_1 + p_2)\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - \\ - [U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2]$$

приводится к $\frac{1}{4} W(p_1 - p_2)^2$.

В двух же других случаях мы не изменим величины суммы $p_1 + p_2$ и не уменьшим величины $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2$, переменив p_1, p_2 на 0, $p_1 + p_2$ или на 1, $p_1 + p_2 - 1$, ибо

$$\begin{aligned} & U + V(0 + p_1 + p_2) + W \cdot 0 \cdot (p_1 + p_2) - \\ & - [U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2] = -Wp_1p_2, \\ & U + V(1 + p_2 + p_2 - 1) + W \cdot 1 \cdot (p_1 + p_2 - 1) - \\ & - [U + V(p_1 + p_2) + Wp_1p_2] = -W(1 - p_1)(1 - p_2). \end{aligned}$$

Но величины 0, $p_1 + p_2$ для p_1, p_2 могут быть допущены во всех случаях, когда $p_1 + p_2$ не превосходит 1, ибо они тогда положительны и не превосходят единицы; в противном случае, когда $p_1 + p_2 > 1$, мы можем заменить p_1 на 1, p_2 на $p_1 + p_2 - 1$, что и доказывает высказанную теорему.

Эта теорема приводит еще к следующей:

Теорема. *Наибольшая величина, которую может иметь P_m в случае, когда $p_1 + p_2 + \dots + p_\mu = S$, соответствует величинам $p_1, p_2, \dots, p_\mu$, данным уравнениями*

$$\begin{aligned} p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \dots, \quad p_\rho = 0, \quad p_{\rho+1} = 1, \quad p_{\rho+2} = 1, \quad \dots, \quad p_{\rho+\sigma} = 1, \\ p_{\rho+\sigma+1} = \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, \quad p_{\rho+\sigma+2} = \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, \quad \dots, \quad p_\mu = \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, \end{aligned}$$

где ρ, σ означают определенные числа.

Доказательство. Положим, что $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu$ представляет систему значений $p_1, p_2, \dots, p_\mu$, которые, удовлетворяя уравнению

$$p_1 + p_2 + \dots + p_\mu = S,$$

дают наибольшую величину для P_m и в то же время содержат возможно большее, при этих условиях, число значений, равных 1 и 0.

Пусть будут далее $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\rho$ те из количеств $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu$, которые равны нулю; $\pi_{\rho+1}, \pi_{\rho+2}, \dots, \pi_{\rho+\sigma}$ те, которые равны единице, все прочие $\pi_{\rho+\sigma+1}, \pi_{\rho+\sigma+2}, \dots, \pi_\mu$, отличные по предположению от 0 и 1, должны быть равны между собой, как мы сейчас докажем.

Действительно, если $\pi_{\rho+\sigma+1}$ не равно $\pi_{\rho+\sigma+2}$, то можно, по предыдущей теореме, или увеличить R_m без изменения суммы

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{\rho+\sigma+1} + \pi_{\rho+\sigma+2} + \dots + \pi_\mu,$$

принимая $\pi_{\rho+\sigma+1} = \pi_{\rho+\sigma+2}$, или сделать $\pi_{\rho+\sigma+1}$ равным 1 или 0 без уменьшения величины R_m . Но первое противоречит предположению, что система $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu$ дает наибольшую величину для R_m под условием

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_\mu = S,$$

второе же противно предположению, что из всех систем, обладающих этим свойством, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu$ представляет ту, которая содержит наибольшее число величин, равных 1 и 0.

Следовательно, необходимо должно быть

$$\pi_{\rho+\sigma+1} = \pi_{\rho+\sigma+2} = \dots = \pi_\mu.$$

Но кроме этих уравнений, мы имеем

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0, & \pi_2 &= 0, & \dots, & \pi_\rho &= 0, \\ \pi_{\rho+1} &= 1, & \pi_{\rho+2} &= 1, & \dots, & \pi_{\rho+\sigma} &= 1, \\ \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_\mu &= S, \end{aligned}$$

откуда вытекают уравнения предложенной теоремы.

§ 3. Перейдем теперь к разысканию значений выражения R_m , соответствующих значениям

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, & p_2 &= 0, & \dots, & p_\rho &= 0, \\ p_{\rho+1} &= 1, & p_{\rho+2} &= 1, & \dots, & p_{\rho+\sigma} &= 1 \\ p_{\rho+\sigma+1} &= \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, & p_{\rho+\sigma+2} &= \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, & \dots, & p_\mu &= \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}. \end{aligned}$$

Из замечания, которое мы сделали относительно выражения R_m , следует, что величина R_m , соответствующая

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, & p_2 &= 0, & \dots, & p_\rho &= 0, \\ p_{\rho+1} &= 1, & p_{\rho+2} &= 1, & \dots, & p_{\rho+\sigma} &= 1, \\ p_{\rho+\sigma+1} &= \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, & p_{\rho+\sigma+2} &= \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}, & \dots, & p_\mu &= \frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}. \end{aligned}$$

равна сумме коэффициентов при $t^m, t^{m+1}, \dots, t^\mu$ в разложении по степеням t произведения

$$t^\sigma \left(\frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma} t + \frac{\mu-S-\rho}{\mu-\rho-\sigma} \right)^{\mu-\rho-\sigma}$$

и, следовательно, она равна

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\mu - \rho - \sigma)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m - \sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\mu - m - \rho)} \left(\frac{S - \sigma}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{m - \sigma} \left(\frac{\mu - S - \rho}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{\mu - m - \rho} \left\{ 1 + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma + 1} \times \right. \\ \times \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma + 1} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \frac{\mu - m - \rho - 1}{m - \sigma + 2} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} + \dots \\ \left. + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma + 1} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \frac{\mu - m - \rho - 1}{m - \sigma + 2} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \dots \frac{1}{\mu - \rho - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right\}.$$

Таково выражение, которое, вследствие предыдущей теоремы, будет, при некоторых целых положительных ρ и σ , высшим пределом всех величин P_m в случае, когда $p_1 + p_2 + \dots + p_\mu = S$.

Замечая, что величина выражения

$$1 + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma + 1} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma + 1} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \frac{\mu - m - \rho - 1}{m - \sigma + 2} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} + \dots \\ + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma + 1} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \frac{\mu - m - \rho - 1}{m - \sigma + 2} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \dots \frac{1}{\mu - \rho - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho}$$

меньше величины выражения

$$1 + \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} + \left(\frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right)^2 + \dots \\ + \left(\frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right)^{\mu - m - \rho},$$

которое совпадает с разложением

$$\frac{1 - \left(\frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right)^{\mu - m - \rho + 1}}{1 - \frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho}},$$

или

$$\frac{(m - \sigma)(\mu - S - \rho)}{(m - S)(\mu - \rho - \sigma)} \left[1 - \left(\frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \right],$$

мы приходим к такой теореме:

Теорема. Для некоторых целых положительных чисел ρ и σ величина выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (\mu - \rho - \sigma)}{1 \cdot 2 \cdots (m - \sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m - \rho)} \left(\frac{S - \sigma}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{m - \sigma} \left(\frac{\mu - S - \rho}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \times \\ \times \left(\frac{m - \sigma}{m - S} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \right]$$

превосходит величину P_m вероятности, что событие E в μ испытаний, имея вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_\rho$, случится по меньшей мере m раз, где S равно сумме $p_1 + p_2 + \dots + p_\rho$.

§ 4. Остановимся на случае, когда m превосходит $S + 1$. Согласно последней теореме, мы имеем

$$P_m < \frac{1 \cdot 2 \cdots (\mu - \rho - \sigma)}{1 \cdot 2 \cdots (m - \sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m - \rho)} \left(\frac{S - \sigma}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{m - \sigma} \left(\frac{\mu - S - \rho}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \times \\ \times \left(\frac{m - \sigma}{m - S} \right) \left[1 - \left(\frac{\mu - m - \rho}{m - \sigma} \frac{S - \sigma}{\mu - S - \rho} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \right]$$

и тем более

$$P_m < \frac{1 \cdot 2 \cdots (\mu - \rho - \sigma)}{1 \cdot 2 \cdots (m - \sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m - \rho)} \left(\frac{S - \sigma}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{m - \sigma} \times \\ \times \left(\frac{\mu - S - \rho}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \left(\frac{m - \sigma}{m - S} \right). \quad (1)$$

Но при m большем, чем $S + 1$, величина выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (\mu - \rho - \sigma)}{1 \cdot 2 \cdots (m - \sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m - \rho)} \left(\frac{S - \sigma}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{m - \sigma} \left(\frac{\mu - S - \rho}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \left(\frac{m - \sigma}{m - S} \right)$$

увеличивается от уменьшения целых положительных чисел ρ и σ .

В самом деле, если разделим на это выражение то значение, которое оно примет по замене σ на $\sigma - 1$, мы найдем для их отношения

$$\frac{\mu - \rho - \sigma + 1}{m - \sigma} \frac{(S - \sigma + 1)^{m - \sigma + 1}}{(S - \sigma)^{m - \sigma}} \frac{(\mu - \rho - \sigma)^{\mu - \rho - \sigma + 1}}{(\mu - \rho - \sigma + 1)^{\mu - \rho - \sigma + 2}}$$

или

$$\frac{S - \sigma + 1}{m - \sigma} \left(\frac{S - \sigma + 1}{S - \sigma} \right)^{m - \sigma} \left(\frac{\mu - \rho - \sigma}{\mu - \rho - \sigma + 1} \right)^{\mu - \rho - \sigma + 1},$$

что, будучи представлено под видом

$$\frac{1}{1 + \frac{m-S-1}{S-\sigma+1}} e^{-(m-\sigma) \log \left(1 - \frac{1}{S-\sigma+1}\right) + (\mu-\rho-\sigma+1) \log \left(1 - \frac{1}{\mu-\rho-\sigma+1}\right)},$$

приводится к

$$\frac{1}{1 + \frac{m-S-1}{S-\sigma+1}} e^{\frac{m-S-1}{S-\sigma+1} + \frac{1}{2} \left[\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^2} - \frac{1}{\mu-\rho-\sigma+1} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3} - \frac{1}{(\mu-\rho-\sigma+1)^2} \right] + \dots}.$$

Но эта величина, очевидно, больше, чем 1, ибо

$$\frac{1}{1 + \frac{m-S-1}{S-\sigma+1}} e^{\frac{m-S-1}{S-\sigma+1}}$$

равняется

$$\frac{1 + \frac{m-S-1}{S-\sigma+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{m-S-1}{S-\sigma+1} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{m-S-1}{S-\sigma+1} \right)^3 + \dots}{1 + \frac{m-S-1}{S-\sigma+1}},$$

а это выражение превышает единицу, так как, по предположению, m больше $S+1$, и, следовательно, $m-S-1$ величина положительная.

Что же касается величин

$$\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^2} - \frac{1}{\mu-\rho-\sigma+1}, \quad \frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3} - \frac{1}{(\mu-\rho-\sigma+1)^2}, \quad \dots,$$

то они все положительны; ибо, по предположению, $m-\sigma$ превосходит $S-\sigma+1$, а $S-\sigma+1$ не может превосходить $\mu-\rho-\sigma+1$, так как иначе дробь $\frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}$, которая представляет величину вероятности (см. § 2), была бы больше единицы.

Так мы убеждаемся, что с уменьшением σ значение выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots (\mu-\rho-\sigma)}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m-\sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots (\mu-m-\sigma)} \left(\frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma} \right)^{m-\sigma} \left(\frac{\mu-S-\rho}{\mu-\rho-\sigma} \right)^{\mu-m-\rho+1} \left(\frac{m-\sigma}{m-S} \right)$$

увеличивается. То же имеет место относительно ρ .

Отсюда мы заключаем, что при $m > S + 1$ величина выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (\mu - \rho - \sigma)}{1 \cdot 2 \cdots (m - \sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m - \rho)} \left(\frac{S - \sigma}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{m - \sigma} \left(\frac{\mu - S - \rho}{\mu - \rho - \sigma} \right)^{\mu - m - \rho + 1} \left(\frac{m - \sigma}{m - S} \right)$$

в неравенстве (1) не может превышать величины, которая соответствует $\rho = 0$, $\sigma = 0$, и равна

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots \mu}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m)} \left(\frac{S}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu} \right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S}.$$

Итак, из неравенства (1) мы можем вывести следующее:

$$P_m < \frac{1 \cdot 2 \cdots \mu}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m)} \left(\frac{S}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu} \right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S}, \quad (2)$$

где m предположено бóльшим, чем $S + 1$.

§ 5. Но известно, что величина произведения $1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x$ меньше, чем $2,53x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}$, и больше, чем $2,50x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}$ *.

* Вот как очень просто можно прийти к этому результату.

Деля соответственно величины выражений $\frac{1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x}{x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}}$, $\frac{1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x}{x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}}$

при $x = n + 1$ на их величины при $x = n$, находим отношения

$$\left(\frac{n}{n + 1} \right)^{n + \frac{1}{2}} e^{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)}, \quad \left(\frac{n}{n + 1} \right)^{n + \frac{1}{2}} e,$$

которые приводятся к

$$e^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \log \frac{n}{n + 1} + 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)}, \quad e^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \log \frac{n}{n + 1} + 1}$$

и, наконец, к

$$e^{\left(\frac{1}{12} - \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \right) \frac{1}{(n + 1)^4} + \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{2 \cdot 5 \cdot 6} \right) \frac{1}{(n + 1)^5} + \cdots}, \quad e^{-\frac{1}{12(n + 1)^2} - \frac{1}{12(n + 1)^3} - \cdots}.$$

Так как первое количество больше единицы, а второе меньше ее, то, очевидно,

с увеличением x величина $\frac{1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x}{x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}}$ также увеличивается, а величина

$\frac{1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x}{x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}}$ уменьшается.

Согласно этому величина выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots \mu}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (\mu - m)} \left(\frac{S}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu} \right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S}$$

меньше, чем

$$\frac{2,53 e^{\frac{1}{12\mu}}}{(2,50)^2} \frac{\mu^{\mu + \frac{1}{2}}}{m^{m + \frac{1}{2}} (\mu - m)^{\mu - m + \frac{1}{2}}} \left(\frac{S}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu} \right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S},$$

а потому и подавно меньше, чем

$$\frac{\frac{1}{2} \mu^{\mu + \frac{1}{2}}}{m^{m + \frac{1}{2}} (\mu - m)^{\mu - m + \frac{1}{2}}} \left(\frac{S}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu} \right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S},$$

ибо при наибольшей величине $e^{\frac{1}{12\mu}}$, которая равна $e^{\frac{1}{12}}$, произведение $\frac{2,53}{(2,50)^2} e^{\frac{1}{12\mu}}$ все еще меньше $\frac{1}{2}$.

Поэтому для всех значений x , меньших s , будем иметь

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x}{x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}} < \frac{1 \cdot 2 \cdots (s - 1) s}{s^{s + \frac{1}{2}} e^{-s + \frac{1}{12s}}}, \quad \frac{1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x}{x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}} > \frac{1 \cdot 2 \cdots (s - 1) s}{s^{s + \frac{1}{2}} e^{-s}},$$

и, следовательно,

$$1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x < T e^{-\frac{1}{12s}} x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}, \quad 1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x > T x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}, \quad (A)$$

где T величина выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (s - 1) s}{s^{s + \frac{1}{2}} e^{-s}}.$$

Положим $s = \infty$ и назовем T_0 величину $\frac{1 \cdot 2 \cdots (s - 1) s}{s^{s + \frac{1}{2}} e^{-s}}$ при $s = \infty$; из (A) сле-

дует, что для всех конечных величин x будет

$$1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x < T_0 x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}, \quad 1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x > T_0 x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x},$$

где T_0 — постоянное.

Делая в этих неравенствах $x = 10$, найдем, что T_0 больше 2,50 и меньше 2,53; следовательно, предыдущие неравенства дают

$$1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x < 2,53 x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x + \frac{1}{12x}}, \quad 1 \cdot 2 \cdots (x - 1) x > 2,50 x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}.$$

Итак, имеем, на основании (2),

$$P_m < \frac{\frac{1}{2} \mu^{\mu + \frac{1}{2}}}{m^{\mu + \frac{1}{2}} (\mu - m)^{\mu - m + \frac{1}{2}}} \left(\frac{S}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu} \right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S},$$

или, что все равно,

$$P_m < \frac{1}{2(m - S)} \sqrt{\frac{m(\mu - m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu - m} \right)^{\mu - m + 1}.$$

Это неравенство доставляет следующую теорему:

Теорема. Если вероятности события E в μ последовательных испытаниях суть $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ и их сумма равна S , то величина выражения

$$\frac{1}{2(m - S)} \sqrt{\frac{m(\mu - m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m} \right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu - m} \right)^{\mu - m + 1},$$

при m большем, чем $S + 1$, превзойдет всегда вероятность того, что E случится в эти μ испытаний по меньшей мере m раз.

Из этой теоремы через замену $m, p_1, p_2, \dots, p_\nu, S$ на $\mu - n, 1 - p_1, 1 - p_2, \dots, 1 - p_\nu, \mu - S$ следует, что, если сумма $1 - p_1 + 1 - p_2 + \dots + 1 - p_\nu$ равна $\mu - S$, то величина выражения

$$\frac{1}{2(S - n)} \sqrt{\frac{n(\mu - n)}{\mu}} \left(\frac{\mu - S}{\mu - n} \right)^{\mu - n} \left(\frac{S}{n} \right)^{n+1}$$

при $\mu - n > \mu - S + 1$ превосходит величину вероятности того, что событие, противоположное E , случится по меньшей мере $\mu - n$ раз в μ испытаний, где $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ вероятности E .

Замечая, что условия

$$1 - p_1 + 1 - p_2 + \dots + 1 - p_\nu = \mu - S, \quad \mu - n > \mu - S + 1$$

сводятся к

$$p_1 + p_2 + \dots + p_\nu = S, \quad n < S - 1$$

и что событие, противоположное E , случается не менее $\mu - n$ раз в μ испытаний, если E представляется в эти испытания не более n раз, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. Если вероятности события E для μ последовательных испытаний суть $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ и их сумма равна S , то величина выражения

$$\frac{1}{2(S-n)} \sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}} \left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n} \left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$$

при n меньшем $S-1$ превзойдет всегда величину вероятности, что E случится в эти испытания не более n раз.

§ 6. Но повторение события E может дать место только одному из таких трех случаев: или событие E случится по меньшей мере m раз, или не более n раз, или, наконец, более n , но менее m раз. Следовательно, вероятность последнего случая будет определена через вычитание из единицы вероятностей двух первых случаев.

Поэтому как следствие двух последних теорем выходит такая:

Теорема. Если вероятности события E для μ последовательных испытаний суть $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ и их сумма равна S , то вероятность, что число повторений события E в эти μ испытаний будет меньше m и больше n , превзойдет, при m большем $S+1$ и n меньшем $S-1$, величину выражения

$$1 - \frac{1}{2(m-S)} \sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m}\right)^m \left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1} - \\ - \frac{1}{2(S-n)} \sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}} \left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n} \left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}.$$

Чтобы вывести из этой теоремы предложение, высказанное в начале нашей заметки, заметим, что отношение числа повторений события E в μ испытаний к числу μ не достигает пределов

$$\frac{S}{\mu} + z \quad \text{и} \quad \frac{S}{\mu} - z,$$

если E в эти испытания случается менее $S + \mu z$ раз и более $S - \mu z$ раз.

Но вероятность, что это имеет место, превзойдет (по последней теореме) при $z > \frac{1}{\mu}$ величину выражения

$$1 - \frac{1}{2\mu z} \sqrt{\frac{(S + \mu z)(\mu - S - \mu z)}{\mu}} \left(\frac{S}{S + \mu z}\right)^{S + \mu z} \left(\frac{\mu - S}{\mu - S - \mu z}\right)^{\mu - S - \mu z + 1} - \\ - \frac{1}{2\mu z} \sqrt{\frac{(S - \mu z)(\mu - S + \mu z)}{\mu}} \left(\frac{\mu - S}{\mu - S + \mu z}\right)^{\mu - S + \mu z} \left(\frac{S}{S - \mu z}\right)^{S - \mu z + 1},$$

которое можно представить под видом

$$1 - \frac{1-p}{2z\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{p+z}{1-p-z}} H^\mu - \frac{p}{2z\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{1-p+z}{p-z}} H_1^\mu, \quad (3)$$

где положено для сокращения $\frac{S}{\mu} = p$ и

$$\left(\frac{p}{p+z}\right)^{p+z} \left(\frac{1-p}{1-p-z}\right)^{1-p-z} = H, \quad \left(\frac{1-p}{1-p+z}\right)^{1-p+z} \left(\frac{p}{p-z}\right)^{p-z} = H_1. \quad (4)$$

Уравнения (4) дают нам для натуральных логарифмов H и H_1 следующие ряды:

$$-\frac{z^2}{2p} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{z}{p}\right) - \frac{z^4}{12p^3} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{z}{p}\right) - \dots - \frac{z^2}{2(1-p)} - \frac{z^3}{6(1-p)^2} - \dots$$

и

$$-\frac{z^2}{2p} - \frac{z^3}{6p^2} - \dots - \frac{z^2}{2(1-p)} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{z}{1-p}\right) - \frac{z^4}{12(1-p)^3} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{z}{1-p}\right) - \dots,$$

откуда ясно, что H и H_1 имеют величины меньшие, чем 1.

Следовательно, выражение (3) приближается к пределу 1 при возрастании μ , так что разность между ним и 1 сделается меньше какого угодно числа Q , если за μ взять число большее, чем

$$\frac{\log \left[Q \frac{z}{1-p} \sqrt{\frac{1-p-z}{p+z}} \right]}{\log H} \quad \text{и} \quad \frac{\log \left[Q \frac{z}{p} \sqrt{\frac{p-z}{1-p+z}} \right]}{\log H_1}.$$

Итак, мы пришли к строгому доказательству предложения, которое составляет предмет этой заметки.

О СРЕДНИХ ВЕЛИЧИНАХ

Если мы примем называть вообще *математическим ожиданием* какой-либо величины сумму всех возможных для нее значений, умноженных на вероятности их, то нетрудно показать относительно пределов, в которых будет содержаться сумма каких-либо величин, такую весьма простую теорему:

Теорема. Если математические ожидания величин $x, y, z, \dots$ суть

$$a, b, c, \dots,$$

а математические ожидания квадратов $x^2, y^2, z^2, \dots$ суть

$$a_1, b_1, c_1, \dots,$$

то вероятность, что сумма

$$x + y + z + \dots$$

заклучается в пределах

$$\begin{aligned} a + b + c \dots + \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}, \\ a + b + c \dots - \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}, \end{aligned}$$

при всяком значении α остается больше $1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

Доказательство. Пусть будут

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, \dots, x_l, \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, \\ z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} p_1, & p_2, & p_3, & \dots, & p_l, & & \\ q_1, & q_2, & q_3, & \dots, & q_m, & & \\ r_1, & r_2, & r_3, & \dots, & r_n, & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$
$$\begin{array}{l} x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_l, \\ y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_m, \\ z = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \\ \vdots \end{array}$$
$$\begin{array}{l} x, y, z, \dots, \\ x^2, y^2, z^2, \dots \end{array}$$
$$\begin{aligned} a &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_l x_l, \\ b &= q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \dots + q_m y_m, \\ c &= r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3 + \dots + r_n z_n, \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \dots + p_l x_l^2, \\ b_1 &= q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \dots + q_m y_m^2, \\ c_1 &= r_1 z_1^2 + r_2 z_2^2 + r_3 z_3^2 + \dots + r_n z_n^2. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_l &= 1, \\ q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_m &= 1, \\ r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n &= 1, \\ \vdots & \\ \vdots & \end{aligned} \quad (3)$$

через a , a_1 , 1, мы получаем такую формулу:

$$\begin{aligned} & a_1 q_\mu r_\nu \cdots + q_\mu r_\nu \cdots y_\mu^2 + q_\mu r_\nu \cdots z_\nu^2 + \cdots \\ & + 2a q_\mu r_\nu \cdots y_\mu + 2a q_\mu r_\nu \cdots z_\nu + \cdots + 2q_\mu r_\nu \cdots y_\mu z_\nu + \cdots \\ & - 2(a + b + c + \cdots) a q_\mu r_\nu \cdots - 2(a + b + c + \cdots) q_\mu r_\nu \cdots y_\mu - \\ & - 2(a + b + c + \cdots) q_\mu r_\nu \cdots z_\nu - \cdots + (a + b + c + \cdots)^2 q_\mu r_\nu \cdots \end{aligned}$$

Давая здесь числу μ значения

$$\mu = 1, 2, 3, \dots, m$$

и складывая получаемые при этом выражения, мы находим по замене сумм

$$\begin{aligned} & q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 \cdots + q_m y_m, \\ & q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 \cdots + q_m y_m^2, \\ & q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_m, \end{aligned}$$

на основании (1), (2), (3), через b , b_1 , 1 такой результат:

$$\begin{aligned} & a_1 r_\nu \cdots + b_1 r_\nu \cdots + r_\nu \cdots z_\nu^2 + \cdots \\ & + 2a b r_\nu \cdots + 2a r_\nu \cdots z_\nu + 2b r_\nu \cdots z_\nu + \cdots \\ & - 2(a + b + c + \cdots) a r_\nu \cdots - 2(a + b + c + \cdots) b r_\nu \cdots \\ & - 2(a + b + c + \cdots) r_\nu \cdots z_\nu - \cdots + (a + b + c + \cdots)^2 r_\nu \cdots \end{aligned}$$

Поступая таким же образом со всеми числами λ , μ , ν , $\dots$, мы находим, что сумма всех значений выражения

$$(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \cdots - a - b - c - \cdots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \cdots,$$

получаемых при

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, l; \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, m; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, n; \dots,$$

равна

$$\begin{aligned} & a_1 + b_1 + c_1 + \cdots \\ & + 2ab + 2ac + 2bc + \cdots \\ & - 2(a + b + c + \cdots) a - 2(a + b + c + \cdots) b - \\ & - 2(a + b + c + \cdots) c - \cdots \\ & + (a + b + c + \cdots)^2, \end{aligned}$$

а это, по раскрытии скобок и сокращении, приводится к следующему:

$$a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots$$

Из этого мы заключаем, что сумма значений выражения

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots - a - b - c - \dots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots)} p_\lambda q_\mu r_\nu \dots,$$

получаемых при

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, l; \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, m; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, n; \quad \dots,$$

будет равна $\frac{1}{\alpha^2}$. Выкидывая же из этой суммы все члены, в которых множитель

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots - a - b - c - \dots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots)}$$

не превосходит 1, и заменяя его единицею там, где он больше 1, мы, очевидно, сумму эту уменьшим и, следовательно, получим сумму меньше

$$\frac{1}{\alpha^2}.$$

Но эта уменьшенная сумма, состоя из одних значений произведения

$$p_\lambda q_\mu r_\nu \dots,$$

соответствующих тем величинам $x_\lambda, y_\mu, z_\nu, \dots$, для которых

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \dots - a - b - c - \dots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots)} > 1,$$

будет представлять вероятность, что $x, y, z, \dots$ имеют значения, удовлетворяющие условию

$$\frac{(x + y + z + \dots - a - b - c - \dots)^2}{\alpha^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots)} > 1. \quad (4)$$

Эта же вероятность может быть заменена разностью

$$1 - P,$$

если через P означим вероятность, что условие (4) не выполняется, или, что одно и то же, что $x, y, z, \dots$ имеют значения, при которых отношение

$$\frac{(x + y + z + \dots - a - b - c - \dots)^2}{x^2 (a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots)}$$

не > 1 , и, следовательно, сумма

$$x + y + z + \dots$$

не выходит из пределов

$$\begin{aligned} a + b + c + \dots + \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}, \\ a + b + c + \dots - \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}, \end{aligned}$$

откуда видно, что для вероятности P будет иметь место такое неравенство:

$$1 - P < \frac{1}{x^2},$$

которое дает

$$P > 1 - \frac{1}{x^2},$$

в чем и заключается предложенная теорема.

Если мы изобразим через N число величин $x, y, z, \dots$, и, полагая в доказанной сейчас теореме

$$\alpha = \frac{\sqrt{N}}{t},$$

разделим на N как сумму

$$x + y + z + \dots,$$

так и пределы ее

$$\begin{aligned} a + b + c + \dots + \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}, \\ a + b + c + \dots - \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}, \end{aligned}$$

то из этой теоремы получим следующую относительно средних величин:

Теорема. Если математические ожидания величин

$$x, y, z, \dots, x^2, y^2, z^2, \dots$$

суть

$$a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots,$$

то вероятность, что среднее арифметическое N величин $x, y, z, \dots$ **от** среднего арифметического математических ожиданий этих величин разнится не более как на

$$\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}},$$

при всяком значении t , будет превосходить $1 - \frac{t^2}{N}$.

Так как дроби

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N},$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}$$

означают средние величины количеств

$$a_1, b_1, c_1, \dots,$$

$$a^2, b^2, c^2, \dots,$$

то всякий раз, когда математические ожидания

$$a, b, c, \dots,$$

$$a_1, b_1, c_1, \dots$$

не превосходят какого-либо конечного предела, выражение

$$\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}}$$

будет иметь конечную величину, как бы велико ни было число N , и, следовательно, в этом случае, принимая за t величину достаточно большую, мы можем сделать количество

$$\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}}$$

по желанию малым. А так как при всяком t , с увеличением числа N до ∞ , дробь $\frac{t^2}{N}$ приводится к нулю, то, на основании предыдущей теоремы, получается следующая:

Теорема. Если математические ожидания величин

$$\begin{aligned} U_1, U_2, U_3, \dots, \\ U_1^2, U_2^2, U_3^2, \dots \end{aligned}$$

не превосходят какого-либо конечного предела, то вероятность, что среднее арифметическое N таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа N до ∞ , приводится к единице.

В частном предположении, что величины

$$U_1, U_2, U_3, \dots$$

приводятся к 1 или 0, смотря по тому, имеет ли место какое-нибудь событие E или нет в 1-м, 2-м, 3-м, ... испытании, мы замечаем, что сумма

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N$$

будет давать число повторений события E в N испытаний, а среднее арифметическое

$$\frac{U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N}{N}$$

представит отношение числа повторений события E к числу испытаний. Чтобы приложить к этому случаю последнюю теорему, изобразим через

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$$

вероятности события E в 1-е, 2-е, 3-е, ..., N -е, ... испытание. При таком знакоположении для определения математических ожиданий величин

$$\begin{aligned} U_1, U_2, U_3, \dots, U_N, \dots, \\ U_1^2, U_2^2, U_3^2, \dots, U_N^2, \dots \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} P_1 \cdot 1 + (1 - P_1) \cdot 0; & \quad P_2 \cdot 1 + (1 - P_2) \cdot 0; & \quad P_3 \cdot 1 + (1 - P_3) \cdot 0; & \quad \dots, \\ P_1 \cdot 1^2 + (1 - P_1) \cdot 0^2; & \quad P_2 \cdot 1^2 + (1 - P_2) \cdot 0^2; & \quad P_3 \cdot 1^2 + (1 - P_3) \cdot 0^2; & \quad \dots, \end{aligned}$$

откуда видно, что эти математические ожидания равны

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

и что среднее арифметическое первых N ожиданий есть

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N}{N},$$

т. е. среднее арифметическое вероятностей $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$.

Вследствие этого, на основании предыдущей теоремы, мы приходим к такому заключению: *вероятность, что отношение числа повторений события к числу испытаний разнится от средней арифметической величины вероятностей события в эти испытания менее чем на какую-нибудь данную величину, с увеличением числа испытаний до бесконечности приводится к единице.*

В частном случае, где вероятность события во все испытания одна и та же, отсюда получается теорема Бернулли.

О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. В записке под заглавием „О средних величинах“* мы показали, как получаются неравенства, из которых легко выводится теорема относительно вероятностей, заключающая в себе как частные случаи и *теорему Бернулли* и *закон больших чисел*.

Теорема эта была нами так формулирована:

Если математические ожидания величин

$$\begin{array}{c} u_1, u_2, u_3, \dots, \\ u_1^2, u_2^2, u_3^2, \dots \end{array}$$

не превосходят какого-либо конечного предела, вероятность, что средняя арифметическая n таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа n до ∞ приводится к единице.

Это мы вывели, отыскивая предельные величины одного интеграла по данным величинам других интегралов, заключающих под своими знаками вместе с некоторыми известными функциями одну неизвестную функцию, сохраняющую положительный знак. Развивая употребленную при этом методу, мы в последнем из наших сообщений Академии Наук** показали, что она в приложении к одному частному случаю доставляет такую теорему относительно интегралов:

* См. стр. 202—210.— *Ред.*

** «Об интегральных вычетах, доставляющих приближенные величины интегралов», см. Полн. собр. соч., М.—Л., АН СССР, 1945, т. III, стр. 191—225.— *Ред.*

Если функция $f(x)$, оставаясь положительною, дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{q^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 0,$$

.....

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-3)}{q^{2m-2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx = 0,$$

то величина интеграла

$$\int_{-\infty}^v f(x) dx$$

заключается в пределах

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx - \frac{3\sqrt{3} (m^2 - 2m + 3)^{3/2} (q^2 v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3 \sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx + \frac{3\sqrt{3} (m^2 - 2m + 3)^{3/2} (q^2 v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3 \sqrt{m-1}}.$$

Мы теперь покажем, как при помощи этой теоремы относительно интегралов получается теорема относительно вероятностей, которая в приложении к определению благонадежнейших величин неизвестных на основании большого числа уравнений, заключающих случайные, более или менее значительные погрешности, приводит к способу наименьших квадратов. Теорема эта может быть так формулирована:

Если математические ожидания величин

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела,

вероятность, что сумма n величин

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

деленная на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t' , с возрастанием числа n до ∞ имеет пределом величину интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx.$$

§ 2. Чтобы доказать эту теорему в самом общем ее виде, мы примем $-\infty$ и $+\infty$ за пределы, в которых заключаются все возможные значения величин

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Изображая через

$$\varphi_1(x) dx, \quad \varphi_2(x) dx, \quad \varphi_3(x) dx, \dots$$

вероятности, что величины

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

имеют значения, заключающиеся в бесконечно узком промежутке

$$x, \quad x + dx,$$

мы замечаем: 1) что функции

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \dots$$

не будут иметь значений отрицательных; 2) что интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(u_1) du_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(u_2) du_2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_3(u_3) du_3, \dots$$

представляющие вероятности, что

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

имеют какие-либо значения в пределах $-\infty, +\infty$, будут равны единице; 3) что интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \varphi_1(u_1) du_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \varphi_2(u_2) du_2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_3 \varphi_3(u_3) du_3, \quad \dots,$$

как представляющие математические ожидания величин

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

по сделанному предположению, должны привести к нулю; 4) что все вообще величины $a_i^{(\nu)}$, определяемые равенством,

$$a_i^{(\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i^\nu \varphi_i(u_i) du_i,$$

как представляющие математические ожидания величин

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

возведенных в какие-либо степени, будут, по положению, заключаться в некоторых конечных пределах.

С другой стороны, изображая через

$$f(x) dx$$

вероятность, что величина дроби

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$$

заключается в бесконечно узком промежутке

$$x, x + dx,$$

мы знаем, что эта вероятность получится из равенства

$$f(x) dx = \int \dots \int \varphi_1(u_1) \varphi_2(u_2) \dots \varphi_n(u_n) du_1 du_2 \dots du_n,$$

когда интегрирование относительно $u_1, u_2, \dots, u_n$ будет распространено на все величины их, при которых дробь

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$$

не выходит за пределы, бесконечно близкие между собою $x, x + dx$.

Перемножая же это равенство почленно с равенством

$$e^{sx} = e^{\frac{s(u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{\sqrt{n}}},$$

где s есть произвольное постоянное, и интегрируя от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx = \int \dots \int e^{\frac{s(u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) \varphi_2(u_2) \dots \varphi_n(u_n) du_1 du_2 \dots du_n.$$

Так как в последнем интеграле переменные

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

будут принимать все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то он приведет к такому произведению простых интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n,$$

вследствие чего предыдущее равенство нам даст

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Разлагая обе части этого равенства по степеням s и сравнивая в них коэффициенты при одинаковых степенях s , мы найдем величины интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx, \quad \dots,$$

представляющих математические ожидания величины

$$x = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}},$$

возведенной в различные степени, и которые на основании выше приведенной теоремы послужат нам для определения предельных величин интеграла

$$\int_{-\infty}^v f(x) dx,$$

представляющего вероятность, что

$$x = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$$

не превосходит какой-либо величины v .

§ 3. Ограничиваясь определением $2m$ интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx, \quad \dots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx,$$

мы замечаем, что первая часть уравнения (1), разложенная по степеням s до члена с s^{2m-1} , дает такой ряд:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \frac{s}{1} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx + \frac{s^2}{1 \cdot 2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx + \dots \\ & + \frac{s^{2m-1}}{1 \cdot 2 \dots (2m-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Чтобы найти соответствующие члены во второй части этого уравнения, мы ее представляем под таким видом:

$$\log_e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1 + \log_e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2 + \dots + \log_e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n,$$

откуда получится разложение этой части, точное до s^{2m-1} включительно, когда логарифмы, здесь заключающиеся, заменятся их разложениями в ряды, продолженные до членов с s^{2m-1} .

Для определения такого разложения логарифма

$$\log_e \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i) du_i,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, мы замечаем, что, с точностью до s^{2m-1} , интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i) du_i$$

равен сумме

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(u_i) du_i + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i \varphi_i(u_i) du_i}{1 \cdot \sqrt{n}} s + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^2 \varphi_i(u_i) du_i}{1 \cdot 2n} s^2 + \\ & + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^3 \varphi_i(u_i) du_i}{1 \cdot 2 \cdot 3n \sqrt{n}} s^3 + \dots + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^{2m-1} \varphi_i(u_i) du_i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2m-1) n^{m-1} \sqrt{n}} s^{2m-1}, \end{aligned}$$

а эта сумма, по сказанному в предыдущем параграфе относительно интегралов, в ней заключающихся, приводится к следующему:

$$1 + \frac{a_i^{(2)}}{2n} s^2 + \frac{a_i^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 n \sqrt{n}} s^3 + \dots + \frac{a_i^{(2m-1)}}{1 \cdot 2 \dots (2m-1) n^{m-1} \sqrt{n}} s^{2m-1}.$$

Разлагая же логарифм этого выражения по степеням s , мы находим ряд, который, будучи остановлен на члене с s^{2m-1} , может быть

так представлен:

$$\frac{a_i^{(2)}}{2n} s^2 + \frac{V_i^{(3)}}{n \sqrt{n}} s^3 + \dots + \frac{V_i^{(2m-1)}}{n^{m-1} \sqrt{n}} s^{2m-1},$$

где

$$V_i^{(3)}, \dots, V_i^{(2m-1)}$$

целые функции количеств

$$a_i^{(2)}, a_i^{(3)}, \dots, a_i^{(2m-1)},$$

не содержащие числа n .

Полагая в этой формуле

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

мы получаем разложение логарифмов

$$\log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1, \quad \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2, \quad \dots, \quad \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n,$$

откуда через сложение получается равенство:

$$\begin{aligned} & \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1 + \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2 + \dots + \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n = \\ & = \frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s^3 + \dots + \frac{M^{(2m-1)}}{n^{m-2} \sqrt{n}} s^{2m-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2} &= \frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(2)}}{n}, \\ M^{(3)} &= \frac{V_1^{(3)} + V_2^{(3)} + \dots + V_n^{(3)}}{n}, \\ &\dots \dots \dots \\ M^{(2m-1)} &= \frac{V_1^{(2m-1)} + V_2^{(2m-1)} + \dots + V_n^{(2m-1)}}{n}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx = e^{\frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{V_n} s^3 + \dots + \frac{M^{(2m-1)}}{n^{m-2} V_n} s^{2m-1}}. \quad (2)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad \dots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad \dots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx,$$
$$\begin{array}{ccccccc} V_1^{(3)}, & V_2^{(3)}, & \dots, & V_n^{(3)}, \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_1^{(2m-1)}, & V_2^{(2m-1)}, & \dots, & V_n^{(2m-1)}, \end{array}$$
$$M^{(3)}, \dots, M^{(2m-1)},$$
$$\begin{array}{c} V_1^{(3)}, V_2^{(3)}, \dots, V_n^{(3)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ V_1^{(2m-1)}, V_2^{(2m-1)}, \dots, V_n^{(2m-1)}. \end{array}$$

В том же случае, когда числовая величина количеств

$$M^{(3)}, \dots, M^{(2m-1)}$$

при всяком n остается ниже некоторого конечного предела, уравнение (2) при $n = \infty$ приводится к следующему:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}}.$$

По этому уравнению значение интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx, \dots, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx$$

при n бесконечно большом найдется через сравнение членов с

$$s^0, s, s^2, s^3, s^4, \dots, s^{2m-2}, s^{2m-1}$$

в разложении по степеням s интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx$$

и функции

$$e^{\frac{s^2}{2q^2}}.$$

Таким образом находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{q^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 0, \\ \dots \dots \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-3)}{q^{2m-2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx = 0.$$

Замечая, что функция $f(x)$ не может иметь отрицательных значений, мы из этих равенств на основании теоремы относительно интегралов, приведенной в § 1, заключаем, что при $n = \infty$ и m какою-нибудь величина интеграла

$$\int_{-\infty}^v f(x) dx$$

будет заключаться между такими двумя величинами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx - \frac{3\sqrt{3} (m^2 - 2m + 3)^{3/2} (q^2 v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3 \sqrt{m-1}}, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx + \frac{3\sqrt{3} (m^2 - 2m + 3)^{3/2} (q^2 v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3 \sqrt{m-1}}. \end{aligned}$$

Это же может иметь место только в случае равенства

$$\int_{-\infty}^v f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx,$$

так как при увеличении числа m до ∞ выражение

$$\frac{3\sqrt{3} (m^2 - 2m + 3)^{3/2} (q^2 v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3 \sqrt{m-1}}$$

имеет пределом 0. Убедясь таким образом, что при $n = \infty$ должно иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^v f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx,$$

мы из него, полагая последовательно

$$v = \frac{\sqrt{2}}{q} t, \quad v = \frac{\sqrt{2}}{q} t',$$

выводим

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q} t} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q} t'} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t'} e^{-x^2} dx,$$

откуда через вычитание получается

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{q} t}^{\frac{\sqrt{2}}{q} t'} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx.$$

Так как, по сказанному в § 2 относительно функции $f(x)$, интеграл

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{q} t}^{\frac{\sqrt{2}}{q} t'} f(x) dx$$

представляет вероятность, что величина дроби

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$$

заключается между пределами

$$\frac{\sqrt{2}}{q} t, \quad \frac{\sqrt{2}}{q} t'$$

и, следовательно, что дробь

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}}$$

заключается между

$$t, \quad t',$$

равенство этого интеграла при $n = \infty$ с интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx$$

и дает выше приведенную теорему относительно дроби

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(2)})}},$$

к которой приводится дробь

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}}$$

при внесении в нее величины $\frac{1}{q^2}$ по § 3.

Выведенное нами выражение вероятности, что величина дроби

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(2)})}}$$

заключается между t и t' , будет иметь место только при $n = \infty$.

При n конечном эта вероятность будет более или менее разниться от своей предельной величины

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx,$$

смотря по величине числа n и количеств

$$q, M^{(3)}, \dots, M^{(2^m-1)},$$

зависящих, как видели, от математических ожиданий величин

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

возведенных в различные степени.

Не останавливаясь на определении высшего предела этой разности при n большом, заметим, что по формулам, данным нами в записке под заглавием „О разложении функций одной переменной“*, при n каком-нибудь получается такое выражение для этой вероятности:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} \left[1 - K_3 \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right)^3 \psi_3(x) + K_4 \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right)^4 \psi_4(x) + \dots \right] e^{-x^2} dx,$$

где

$$K_3, K_4, \dots$$

суть коэффициенты при

$$s^3, s^4, \dots$$

в разложении функции

$$e^{\frac{M(3)}{\sqrt{n}} s^2 + \frac{M(4)}{n} s^4 + \dots}$$

по степеням s , а

$$\psi_3(x), \psi_4(x), \dots$$

полиномы, получаемые по формуле

$$\psi_l(x) = e^{x^2} \frac{d^l e^{-x^2}}{dx^l}.$$

* Полн. собр. соч., 1945, т. II, стр. 335—341.— *Ред.*

АНАЛИЗ



ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

§ I

Если дифференциал $\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, составленный из рациональной дроби $\frac{f_0(x)}{F_0(x)}$ и корня целой функции $\theta(x)$, интегрируется при помощи алгебраических и логарифмических знаков, то, как мы знаем на основании остроумных изысканий Абеля и Лиувилля, интеграл $\int \frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ имеет следующий вид:

$$U + A^0 \log V^0 + A' \log V' + A'' \log V'' + \dots,$$

где $U, V^0, V', V'', \dots$ — рациональные функции от x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$; $A^0, A', A'', \dots$ — постоянные величины*.

Определение алгебраического члена U не представляет затруднений.

Известно, что он имеет вид $\frac{P}{Q} [\theta(x)]^{\frac{m-1}{m}}$, где P и Q — целые функции, находящиеся при помощи следующих действий**.

* См., например, доказательство этой теоремы в книге В. В. Немыцкий, М. И. Слудская, А. Н. Черкасов. Курс математического анализа, т. I, 1940, стр. 374. — *Ред.*

** Мы предполагаем, что дифференциал $\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ приведен так, что $\theta(x)$ не содержит множителей степени выше $m - 1$.

1°. Знаменатель Q алгебраической части находится как общий наибольший делитель функций $F_0(x)\theta(x)$ и $\frac{d(F_0(x)\theta(x))}{dx}$ *.

2°. Если степени функций **

$$\frac{Qf_0(x)}{F_0(x)\theta(x)}, \quad \frac{Q}{x[\theta(x)]^{\frac{m-1}{m}}},$$

ниже -1 , то алгебраический член равен 0. В противном случае, обозначая через n наименьшее целое число, превышающее степени этих функций, можно найти числитель P по формуле

$$P = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n,$$

где $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ — постоянные коэффициенты, значения которых определяются из условий, что полином

$$f_0(x) - \frac{F_0(x)\theta(x)}{Q}(B_1 + 2B_2x + \dots + nB_nx^{n-1}) - \\ - \left[\frac{m-1}{m} \frac{F_0(x)\theta'(x)}{Q} - \frac{F_0(x)\theta(x)}{Q^2} \frac{dQ}{dx} \right] (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n)$$

делится на $\frac{Q}{D}$, и притом степень частного не выше степени $\frac{F_0(x)\sqrt[m]{\theta(x)} \cdot D}{xQ}$, где D — общий наибольший делитель функций $\theta(x)$ и $\theta'(x)$.

* Это следует из того, что в знаменатель алгебраической части интеграла могут входить только множители вида $x - a$, где a — кратные корни $F_0(x)$ или $\theta(x)$, совершенно так же, как это имеет место в случае аналогичной формулы, получаемой при интегрировании рациональных функций; ее естественным обобщением и является формула Абеля. Далее дается подробный разбор частного примера на выделение алгебраической части интеграла в частном случае, когда $m=2$. — *Ред.*

** Степенью алгебраической функции $F(x)$ Чебышев, следуя Абелю (см. N. H. A b e l. Oeuvres, I, 1881, p. 108), называет такое число δ , при котором

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x^\delta}$$

есть конечное, отличное от нуля число. Например, степень $\frac{x^5 + x}{x^3 + 1}$ равна 2. — *Ред.*

Если нельзя удовлетворить этим условиям, то заключаем, что интегрирование дифференциала $\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ при помощи алгебраических и логарифмических знаков невозможно. В противном случае мы находим алгебраический член и, вычитая его дифференциал из $\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, получаем выражение, которое должно интегрироваться при помощи одних логарифмических членов. Этим-то интегрированием мы теперь и займемся.

В этом мемуаре мы даем решение следующих вопросов:

1°. Определить число логарифмических членов в выражении данного интеграла.

Решение этого вопроса дает как частный случай доказательство теоремы, высказанной Абелем следующим образом:

«... существует следующая замечательная теорема:

Если интеграл вида $\int \frac{pdx}{\sqrt{R}}$, в котором p и R — целые функции от x , выражается через логарифмы, то его всегда можно представить следующим образом:

$$\int \frac{pdx}{\sqrt{R}} = A \lg \frac{p + q \sqrt{R}}{p - q \sqrt{R}},$$

где A — постоянная, а p и q — целые функции от x » (Oeuvres complètes, I, 1839, p. 65).

2°. Найти аналитические условия, определяющие каждый член в отдельности. Решение этих вопросов покажет между прочим, что известные случаи интегрируемости биномиальных дифференциалов вида

$$x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx$$

единственные, в которых интегрирование этих дифференциалов при рациональных s, s', s'' выполнимо посредством алгебраических и логарифмических знаков.

§ II

Мы видели, что логарифмические члены в значении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ имеют вид $A \log V$, где V — рациональная функция от x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$.

Следовательно, полагая для краткости

$$\sqrt[m]{\theta(x)} = \Delta$$

и обозначая через

$$\varphi_0(\Delta), \varphi_1(\Delta), \varphi_2(\Delta), \varphi_3(\Delta), \dots$$

рациональные функции от x и Δ , мы будем иметь следующее уравнение:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A^0 \log \varphi_0(\Delta) + A' \log \varphi_1(\Delta) + A'' \log \varphi_2(\Delta) + \dots,$$

если значение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ не содержит более алгебраических членов.

Заменяя в этом уравнении Δ последовательно через $\alpha\Delta, \alpha^2\Delta, \dots, \alpha^{m-1}\Delta$ и умножая его соответственно на $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{m-1}$, где α — первообразный корень уравнения

$$x^m - 1 = 0,$$

мы получаем ряд уравнений, сумма которых дает

$$\begin{aligned} m \int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = & A^0 \log [\varphi_0(\Delta) \cdot \varphi_0^\alpha(\alpha\Delta) \cdot \varphi_0^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \cdot \dots \cdot \varphi_0^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)] + \\ & + A' \log [\varphi_1(\Delta) \cdot \varphi_1^\alpha(\alpha\Delta) \cdot \varphi_1^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \cdot \dots \cdot \varphi_1^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)] + \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots, \quad (1)$$

где $W_0, W_1, W_2, \dots$ — функции вида

$$\varphi(\Delta) \varphi^\alpha(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \cdot \dots \cdot \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

а $A_0, A_1, A_2, \dots$ — постоянные. Именно в этом виде мы будем исследовать значение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$.

Мы начнем с доказательства того, что когда выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ приведено к наименьшему числу членов, коэффициенты $A_0, A_1,$

$A_2, \dots$ не могут удовлетворять уравнению

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \dots = 0,$$

в котором $N_0, N_1, N_2, \dots$ — комплексные числа, зависящие от α .

Действительно, если это уравнение имеет место, мы находим из него

$$A_0 = -\frac{N_1}{N_0} A_1 - \frac{N_2}{N_0} A_2 - \dots$$

и, подставляя это значение A_0 в выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, преобразовываем его в такое:

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}} + A_2 \log W_2 W_0^{-\frac{N_2}{N_0}} + \dots,$$

которое содержит менее членов, чем уравнение (1); и каждый из этих членов, как мы сейчас покажем, может быть приведен к виду

$$A \log [\phi(\Delta) \cdot \phi^\alpha(\alpha\Delta) \cdot \phi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \dots \phi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)],$$

где $\phi(\Delta)$ — рациональная функция от x и Δ .

Чтобы привести к этому виду член

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}},$$

мы представим $\frac{N_1}{N_0}$ так:

$$\frac{n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \dots}{n},$$

где $n, n^0, n', n'', \dots$ — целые рациональные числа, что всегда возможно*. Тогда член

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}}$$

можно представить так:

$$\frac{A_1}{n} \log [W_1^n W_0^{-n^0} W_0^{-n'\alpha} W_0^{-n''\alpha^2} \dots],$$

* См. ниже § III.—Ред.

где выражение под знаком $\log$ разлагается на множители и делители вида

$$W^{\alpha^l} = \varphi^{\alpha^l}(\Delta) \varphi^{\alpha^{l+1}}(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^{l+2}}(\alpha^2\Delta) \dots,$$

которые приводятся к

$$\varphi(\Delta) \varphi^{\alpha}(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \dots,$$

когда заменим $\varphi(\Delta)$ через $\varphi(\alpha^l\Delta)$.

Тот же вид сохраняется и по перемножении и делении этих величин. Следовательно, при помощи уравнения

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \dots = 0$$

можно уменьшить число членов в выражении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, не изменяя их вида, и потому это уравнение не может иметь места, если выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ приведено к наименьшему числу членов, что мы всегда будем предполагать в наших изысканиях.

§ III

Пусть x' будет значение x , обращающее W_0 в 0 или в ∞ . Нетрудно убедиться, что существует степень $x - x'$, отношение которой к W_0 конечно при $x = x'$ и что показатель этой степени, вообще говоря, комплексное число, зависящее от α . Действительно, функция W_0 , как мы видели, равна произведению

$$\varphi_0(\Delta) \varphi_0^{\alpha}(\alpha\Delta) \varphi_0^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \dots,$$

в котором φ_0 — функция алгебраическая. Но если разложить множители

$$\varphi_0(\Delta), \varphi_0(\alpha\Delta), \varphi_0(\alpha^2\Delta), \dots$$

по возрастающим степеням $x - x'$ и обозначить через $n^0, n', n'', \dots$ показатели $x - x'$ в первых членах этих разложений, то эти показатели будут рациональны, а сумма

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \dots$$

будет показателем $x - x'$ в первом члене разложения W_0 . Отсюда следует, что если N'_0 равно комплексному числу

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \dots,$$

то отношение $\frac{W_0}{(x - x')^{N'_0}}$ остается конечным при $x = x'$.

Пусть $N'_1, N'_2, \dots$ будут комплексные числа, играющие ту же роль по отношению к $W_1, W_2, \dots$. Взяв равенство

$$\begin{aligned} & \int \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \dots}{x - x'} dx = \\ & = A_0 \log (x - x')^{N'_0} + A_1 \log (x - x')^{N'_1} + A_2 \log (x - x')^{N'_2} + \dots \end{aligned}$$

и вычтя его почленно из

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots,$$

мы находим

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{f(x)}{F(x) \Delta} - \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \dots}{x - x'} \right] dx = \\ & = A_0 \log \frac{W_0}{(x - x')^{N'_0}} + A_1 \log \frac{W_1}{(x - x')^{N'_1}} + A_2 \log \frac{W_2}{(x - x')^{N'_2}} + \dots \end{aligned}$$

Так как вторая часть этого уравнения остается конечною при $x = x'$, мы заключаем, что это значение x не обращает в бесконечность интеграл

$$\int \left[\frac{f(x)}{F(x) \Delta} - \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \dots}{x - x'} \right] dx,$$

а это предполагает, что предел

$$(x - x') \left[\frac{f(x)}{F(x) \Delta} - \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \dots}{x - x'} \right]$$

при $x = x'$ равен нулю и, следовательно,

$$N'_0 A_0 + N'_1 A_1 + N'_2 A_2 + \dots = \lim_{x=x'} \left[\frac{(x-x') f(x)}{F(x) \Delta} \right].$$

Это уравнение нам показывает, что члены в выражении интеграла $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$ делаются бесконечно большими только для значения x , равного одному из корней уравнения

$$F(x) = 0;$$

ибо, по § II, сумма

$$N'_0 A_0 + N'_1 A_1 + N'_2 A_2 + \dots$$

отлична от нуля, тогда как $\lim_{x=x'} \frac{(x-x') f(x)}{F(x) \Delta}$ не равен нулю только в том случае, если $F(x)$ содержит множителем $x - x'$, так как множитель Δ может содержать $x - x'$ только в степени ниже 1 (§ I, примечание).

Это уравнение показывает также, что предел $\frac{(x-x') f(x)}{F(x) \Delta}$ при $x = x'$ не может быть бесконечным.

Положим теперь, что $x', x'', x''', \dots, x^{(l)}$ обозначают все корни уравнения

$$F(x) = 0,$$

а $K', K'', K''', \dots, K^{(l)}$ — значения

$$\lim_{x=z} \frac{(x-z) f(x)}{F(x) \Delta}$$

при $z = x', x'', x''', \dots, x^{(l)}$.

Только что найденное нами уравнение и те, которые мы найдем таким же образом, исследуя случаи $x = x'', x''', \dots, x^{(l)}$, можно написать так:

$$\sum_{i=0}^t N'_i A_i = K', \quad \sum_{i=0}^t N''_i A_i = K'', \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^t N^{(l)}_i A_i = K^{(l)}, \quad (2)$$

где $t + 1$ — число членов в выражении интеграла $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$, $N'_0, N''_0, \dots, N^{(l)}_0, N'_1, N''_1, \dots, N^{(l)}_1$ и т. д. — комплексные числа, выбранные так,

что отношения

$$\frac{W_0}{(x-x')^{N_0'} (x-x'')^{N_0''} \dots (x-x^{(l)})^{N_0^{(l)}}},$$

$$\frac{W_1}{(x-x')^{N_1'} (x-x'')^{N_1''} \dots (x-x^{(l)})^{N_1^{(l)}}},$$

$$\dots$$

остаются конечными для $x = x', x'', x''', \dots, x^{(l)}$ и, следовательно, для всех конечных значений x ; ибо, как мы заметили, корни уравнения

$$F(x) = 0$$

— единственные конечные значения x , обращающие функции

$$W_0, W_1, W_2, \dots$$

в 0 или в ∞ .

Заменяя в уравнении

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots$$

x на $\frac{1}{z}$ и рассматривая случай $z=0$, мы таким же образом найдем уравнение

$$\sum_{i=0}^t \mu_i A_i = K^0, \quad (3)$$

в котором K^0 — предел $\frac{x f(x)}{F(x) \Delta}$ при $x = \infty$, а $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ — степени функций $W_0, W_1, W_2, \dots$.

Это уравнение нам показывает, между прочим, что функция $\frac{f(x)}{F(x) \Delta}$ не может быть степени высшей — 1; ибо тогда число

$$K^{(0)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{F(x) \Delta}$$

было бы бесконечным, чего не может быть, как видно из найденного нами уравнения.

§ IV

Положим теперь, что, обозначая через $M^0, M', M'', \dots$ комплексные числа, зависящие от α , мы стараемся удовлетворить уравнению

$$M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \dots = 0$$

и что существует только λ уравнений этого вида, не тождественных между собою относительно $K^0, K', K'', \dots, K^{(l)}$.

При помощи этих уравнений, очевидно, можно выразить λ величин из ряда

$$K^0, K', K'', \dots, K^{(l)}$$

линейными функциями от остальных; и эти функции будут иметь коэффициентами комплексные числа, зависящие от α .

Положим, что мы нашли

$$\begin{aligned} K^0 &= \sum_{i=0}^{l-\lambda} M_i^0 K^{(\lambda+i)}, & K' &= \sum_{i=0}^{l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)}, \\ \dots, & K^{(\lambda-1)} &= \sum_{i=0}^{l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} K^{(\lambda+i)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как величины $K^0, K', K'', \dots, K^{(l)}$ могут удовлетворять не более как λ различным уравнениям вида

$$M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \dots = 0, \quad (5)$$

то количества

$$K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \dots, K^{(l)},$$

взятые отдельно от

$$K^0, K', K'', \dots, K^{(\lambda-1)},$$

не могут удовлетворить подобному уравнению; иначе это последнее уравнение и λ уравнений (4), очевидно, не тождественные между собою, составили бы $\lambda + 1$ уравнение вида (5), что противно предположению.

Из этого нетрудно убедиться, что число членов в выражении интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ не может быть менее $l - \lambda + 1$; ибо в противном случае число коэффициентов

$$A_0, A_1, A_2, \dots$$

было бы меньше $l - \lambda + 1$; а тогда последние $l - \lambda + 1$ уравнения в ряду (2) дали бы по исключении этих коэффициентов по крайней мере одно уравнение между $K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \dots, K^{(l)}$, которое было бы вида (5), что невозможно.

Тот же результат имел бы место, если бы одно из $l - \lambda + 1$ последних уравнений (2) было тождественно с другими относительно величин $A_0, A_1, A_2, \dots$. Следовательно, при помощи этих уравнений, можно найти $l - \lambda + 1$ количеств из ряда

$$A_0, A_1, A_2, \dots$$

как функции других и количеств $K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \dots, K^{(l)}$; эти функции будут линейными, а коэффициенты их будут комплексные числа, зависящие от α .

Положим, что таким образом найдены величины

$$A_0, A_1, \dots, A_{l-\lambda+1}$$

и что их значения подставлены в уравнение

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots$$

После этой подстановки выражение интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$ будет содержать различные члены с коэффициентами

$$K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \dots, K^{(l)}, \\ A_{l-\lambda+1}, A_{l-\lambda+2}, \dots, A_l.$$

Но если мы соберем в один член все, что содержит один и тот же коэффициент, то получим только l членов, которых общий вид будет

$$K^{(i)} \log Z \quad \text{или} \quad A_i \log Z,$$

где

$$Z = W_0^{P_0} W_1^{P_1} W_2^{P_2} \dots,$$

а $P_0, P_1, P_2, \dots, Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ комплексные числа, зависящие от α . Но из доказанного в § II следует, что, как бы ни был сложен вид **этих**

членов, их всегда можно привести к такому виду:

$$\frac{K^{(i)}}{n} \log W \quad \text{или} \quad \frac{A_i}{n} \log W,$$

где n — целое вещественное число, а W — функция вида

$$\phi(\Delta) \phi^x(\alpha\Delta) \phi^{x^2}(\alpha^2\Delta) \cdots \phi^{x^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta).$$

Следовательно, после подстановки, о которой мы только что говорили, главный вид членов не изменится, но $l - \lambda + 1$ из коэффициентов

$$A_0, A_1, \dots, A_{l-\lambda}$$

окажутся замещенными через

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}, \quad \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}, \quad \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}, \quad \dots, \quad \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}},$$

где $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{l-\lambda}$ — целые вещественные числа.

В последующем мы будем предполагать это преобразование сделанным, и, следовательно, в уравнении

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots$$

мы примем

$$A_0 = \frac{K^{(\lambda)}}{n_0}, \quad A_1 = \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}, \quad A_2 = \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}, \quad \dots, \quad A_{l-\lambda} = \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}, \quad (6)$$

где $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{l-\lambda}$ — целые рациональные числа.

До сих пор мы ничего не говорили о виде функций $\varphi_0(\Delta), \varphi_1(\Delta), \dots$, входящих в состав $W_0, W_1, \dots$ и рациональных относительно x и Δ ; в последующем мы будем считать их приведенными к простейшему виду, т. е. к

$$\frac{X_0 + X_1\Delta + X_2\Delta^2 + \dots + X_{m-1}\Delta^{m-1}}{Y},$$

где $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, Y$ — целые функции от x . Кроме того, так

как знаменатель Y пропадает в выражении

$$W = \varphi(\Delta) \varphi^x(\alpha\Delta) \varphi^{x^2}(\alpha^2\Delta) \dots \varphi^{x^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

вследствие равенства

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1} = 0,$$

мы можем считать $Y = 1$.

§ V

Уравнения (2), (3), (4) и (6), по исключении из них

$$K^0, K', K'', \dots, K^{(l)},$$

дают

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-\lambda} M_i^0 n_i A_i &= \sum_{i=0}^t \mu_i A_i, \\ \sum_{i=0}^{l-\lambda} M_i' n_i A_i &= \sum_{i=0}^t N_i' A_i, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^{l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} n_i A_i &= \sum_{i=0}^t N_i^{(\lambda-1)} A_i, \\ n_0 A_0 &= \sum_{i=0}^t N_i^{(\lambda)} A_i, \\ n_1 A_1 &= \sum_{i=0}^t N_i^{(\lambda+1)} A_i, \\ &\dots \dots \dots \\ n_{l-\lambda} A_{l-\lambda} &= \sum_{i=0}^t N_i^{(l)} A_i. \end{aligned}$$

В этих равенствах комплексные числа $M_i^{(\lambda)}$ определены уравнениями (4), которые дают $K^0, K', K'', \dots, K^{(\lambda-1)}$ в функциях $K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \dots, K^{(l)}$; комплексные числа N_i' неизвестны и обладают, как мы видели, свойством, что отношение

$$\frac{W_i}{(x-x')^{N_i'} (x-x'')^{N_i''} \dots}$$

остается конечным для всех конечных значений x ; число, обозначенное через μ_i , определяет степень функции W_i . Количества же $n_0, n_1, \dots, n_{l-\lambda}$ суть вещественные числа, также нам не известные.

Так как коэффициенты

$$A_0, A_1, A_2, \dots$$

не могут удовлетворять уравнениям вида

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \dots = 0,$$

где $N_0, N_1, N_2, \dots$ — комплексные числа, зависящие от α , то найденные нами уравнения должны быть тождественными относительно $A_0, A_1, A_2, \dots$, что влечет за собой существование следующих равенств:

$$\begin{aligned} \mu_i &= M_i^0 n_i, & N_i' &= M_i' n_i, & N_i'' &= M_i'' n_i, & \dots, & N_i^{(\lambda-1)} &= M_i^{(\lambda-1)} n_i, \\ N_i^{(\lambda)} &= 0, & N_i^{(\lambda+1)} &= 0, & \dots, & N_i^{(\lambda+i-1)} &= 0, & N_i^{(\lambda+i)} &= n_i, \\ & & N_i^{(\lambda+i+1)} &= 0, & \dots, & N_i^l &= 0 \end{aligned}$$

для $i=0, 1, 2, \dots, l-\lambda$, и

$$\mu_i = 0, \quad N_i' = 0, \quad N_i'' = 0, \quad N_i''' = 0, \quad \dots$$

для $i > l-\lambda$.

Из этих равенств, имея в виду соотношения, существующие между функциями W_i и числами $\mu_i, N_i', N_i'', \dots$, заключаем:

1°. Все функции $W_{l-\lambda+1}, W_{l-\lambda+2}, W_{l-\lambda+3}, \dots$ степени 0, и ни одно из значений x не обращает их ни в 0 ни в ∞ .

2°. При $i=0, 1, 2, \dots, l-\lambda$ степень W_i равна $M_i^0 n_i$; функция же, отношение которой к W_i остается конечным для всех конечных значений x , представляется в виде:

$$[(x-x')^{M_i'} (x-x'')^{M_i''} (x-x''')^{M_i'''} \dots (x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}} (x-x^{(\lambda+i)})]^{n_i},$$

где остается неизвестным только целое вещественное число n_i .

Таковы свойства функций

$$W_0, W_1, W_2, W_3, \dots,$$

входящих в уравнение

$$\int \frac{f(x) dx}{F(x)\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots,$$

если оно преобразовано по способу, указанному в § IV. Прибавим, что уравнения (6) дают равенства

$$A_i = \frac{K^{(\gamma+i)}}{n_i},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, l - \lambda$.

§ VI

Из найденного нами о функциях

$$W_{l-\gamma+1}, \quad W_{l-\gamma+2}, \quad W_{l-\gamma+3}, \dots$$

нетрудно убедиться, что они приводятся к постоянным количествам.

Действительно, если функция W не делается ни 0, ни ∞ при $x = a$, то показатель при $x - a$ в первом члене разложения W по степеням $x - a$ равен нулю. Но для

$$W = \varphi(\Delta) \varphi'(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)$$

этот показатель (§ II) равен сумме

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \dots + n^{(m-1)}\alpha^{m-1},$$

в которой $n^0, n', n'', \dots, n^{(m-1)}$ — рациональные вещественные числа обозначающие степени первых членов в

$$\varphi(\Delta), \varphi(\alpha\Delta), \varphi(\alpha^2\Delta), \dots, \varphi(\alpha^{m-1}\Delta),$$

а α — первообразный корень уравнения

$$x^m - 1 = 0.$$

Эта сумма приводится к нулю только в случае, если

$$n^0 = n' = n'' = \dots = n^{(m-1)},$$

т. е. только в том случае, если разложения

$$\varphi(\Delta), \varphi(\alpha\Delta), \varphi(\alpha^2\Delta), \dots, \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

содержат в первых членах одну и ту же степень $x - a$; но тогда мы найдем, что при $x = a$ остается конечным отношение $\frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(x^q\Delta)}$, где p и q — числа целые.

Следовательно, если функция W остается конечною для всех конечных значений x , тем же свойством обладает и дробь $\frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(x^q\Delta)}$.

Таким же образом мы придем к заключению, что степень функции $\frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(x^q\Delta)}$ равна нулю и что, следовательно, она остается конечною при $x \rightarrow \infty$.

Из этого мы находим, что произведение

$$\frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(\Delta)} \cdot \frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(\alpha\Delta)} \cdot \frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(\alpha^2\Delta)} \cdots \frac{\varphi(x^p\Delta)}{\varphi(\alpha^{m-1}\Delta)}$$

остается конечным для всех значений x .

Но это произведение приводится к $\frac{\varphi^m(x^p\Delta)}{S}$, где S — целая функция x , не зависящая от α , ибо

$$S = \varphi(\Delta) \varphi(\alpha\Delta) \varphi(\alpha^2\Delta) \cdots \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

— симметрическая функция корней уравнения

$$\Delta^m = \text{целой функции,}$$

а $\varphi(\Delta)$, как мы видели, — целая функция x и Δ . Что же касается $\varphi^m(\alpha^p\Delta)$, то эта функция того же вида, как и $\varphi(\Delta)$ (см. § IV).

Следовательно, полагая

$$\frac{\varphi^m(x^p\Delta)}{S} = \psi(\alpha^p\Delta), \quad (7)$$

мы найдем, что функция $\psi(\alpha^p\Delta)$ определяется уравнением

$$\psi(\alpha^p\Delta) = \frac{X_0}{S} + \frac{X_1}{S} \Delta + \frac{X_2}{S} \Delta^2 + \cdots + \frac{X_{m-1}}{S} \Delta^{m-1},$$

где $S, X_0, X_1, X_2, \dots, X_{m-1}$ — целые функции от x , и что она остается конечною для всех значений x . Последнее же, как мы сейчас покажем, может иметь место только в том случае, если все члены в выражении $\phi(\alpha^p \Delta)$ постоянны.

Действительно, из выражения $\phi(\alpha^p \Delta)$ мы находим для всех $i < m$

$$\phi(\alpha^p \Delta) + \alpha^{-i} \phi(\alpha^{p+1} \Delta) + \alpha^{-2i} \phi(\alpha^{p+2} \Delta) + \dots + \alpha^{-(m-1)i} \phi(\alpha^{p+m-1} \Delta) = m \frac{X_i}{S} \Delta^i,$$

и, следовательно,

$$[\phi(\alpha^p \Delta) + \alpha^{-i} \phi(\alpha^{p+1} \Delta) + \alpha^{-2i} \phi(\alpha^{p+2} \Delta) + \dots + \alpha^{-(m-1)i} \phi(\alpha^{p+m-1} \Delta)]^m = \\ = m^m \left(\frac{X_i}{S} \right)^m \Delta^{mi}.$$

Первая часть этого равенства остается конечною для всех значений x так как она составлена из функции ϕ . Вторая же часть $m^m \left(\frac{X_i}{S} \right)^m \Delta^{mi}$, если не предположим ее постоянною, будет бесконечна или для некоторых конечных значений x , или для $x \rightarrow \infty$, смотря по тому, приводится ли рациональная функция $m^m \left(\frac{X_i}{S} \right)^m \Delta^{mi}$ к дроби или к целой функции.

Из этого ясно, что ни одного члена в функции $\phi(\alpha^p \Delta)$ нельзя считать переменным; но тогда из (7) следует, что

$$\phi(\alpha^p \Delta) = C_p \sqrt[m]{S},$$

где C_p — величина постоянная, а S — функция, не зависящая от α^p . Если мы теперь, пользуясь последним уравнением, возьмем значения функций

$$\phi(\Delta), \phi(\alpha \Delta), \phi(\alpha^2 \Delta), \dots, \phi(\alpha^{m-1} \Delta)$$

и внесем их в формулу

$$W = \phi(\Delta) \phi^2(\alpha \Delta) \phi^3(\alpha^2 \Delta) \dots \phi^{m-1}(\alpha^{m-1} \Delta),$$

то получим

$$W = C_0 C_1^2 C_2^3 \dots C_{m-1}^{m-1} S^{\frac{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1}}{m}}.$$

Но сумма

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1}$$

равна нулю; следовательно, W имеет постоянное значение

§ VII

Доказав, что в выражении интеграла $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$ все функции

$$W_{l-\lambda+1}, \quad W_{l-\lambda+2}, \quad \dots$$

могут быть только постоянными, мы выводим отсюда, что единственные переменные члены суть

$$A_0 \log W_0, \quad A_1 \log W_1, \quad \dots, \quad A_{l-\lambda} \log W_{l-\lambda};$$

а так как, по (6), коэффициенты их имеют вид

$$\frac{K^{(i+i)}}{n_i},$$

где n_i — число целое, то заключаем, что число их не может превзойти числа отличных от нуля членов ряда

$$K^0, K', K'', \dots, K^{(l)}.$$

Замечая, что l есть число корней уравнения

$$F(x) = 0$$

и что

$$K^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{F(x) \Delta}$$

приводится к нулю, если степень $\frac{f(x)}{F(x) \cdot \Delta}$ ниже -1 , мы приходим к следующим теоремам*:

Теорема I. Пусть будет $\frac{f(x)}{F(x)}$ рациональная дробь, а $\theta(x)$ — полином, множители которого степени ниже t . Если выражение интеграла

* О содержании теоремы I и дальнейших с точки зрения современной теории алгебраических функций см., например, В. В. Голубев. Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций, § 4 („Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. I). — *Ред.*

$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ содержит только логарифмические члены, то интеграл $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ равен сумме членов следующего вида:

$$A \log [\varphi(\sqrt[m]{\theta(x)}) \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{\theta(x)}) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{\theta(x)}) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta(x)})],$$

где $\varphi(\sqrt[m]{\theta(x)})$ — целая функция x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$, а α — первообразный корень уравнения

$$x^m - 1 = 0.$$

Число таких членов, достаточное для доставления выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, не превзойдет степени $F(x)$, если степень функции $\frac{f(x)}{F(x) \sqrt[m]{\theta(x)}}$ ниже — 1; в противном случае число таких членов превзойдет степень $F(x)$ только на единицу.

В случае $F(x) = 1$ предыдущая теорема приводится к следующей:

Теорема II. Если $f(x)$ и $\theta(x)$ — целые функции и $\theta(x)$ содержит множители степеней не выше m и если интеграл $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$ выражается только логарифмическими членами, то он может быть приведен к виду

$$A \log [\varphi(\sqrt[m]{\theta(x)}) \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{\theta(x)}) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{\theta(x)}) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta(x)})],$$

где $\varphi(\sqrt[m]{\theta(x)})$ — целая функция от x и $\sqrt[m]{\theta(x)}$, а α — первообразный корень уравнения

$$x^m - 1 = 0.$$

В случае $m = 2$ мы получаем упомянутую в § I теорему Абеля:

Теорема III. Интеграл $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$ не приводится к функциям алгебраической и логарифмической, если $\theta(x)$ не имеет кратных множителей степени выше $m - 1$ и если степень функции $f(x)$ ниже степени $\frac{\sqrt[m]{\theta(x)}}{x}$.

Действительно, если предположим, что $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$ приводится к функциям алгебраической и логарифмической, то, по § I, приходим к заключению, что его выражение не содержит алгебраического члена. То же самое имеет место и относительно логарифмических членов, ибо дифференциал $\frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$ имеет знаменателем только $\sqrt[m]{\theta(x)}$ и степень $\frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$ ниже -1 , а в этом случае, по теореме I, число логарифмических членов, достаточное для доставления выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$, равно 0. Поэтому, если предположим, что интеграл $\int \frac{f(x)}{\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$ приводится к функциям алгебраической и логарифмической, то будем вынуждены заключить, что его значение постоянно.

При $m=2$ это сводится к теореме, данной Лиувиллем.

§ VIII

Посредством доказанных нами теорем можно вполне решить вопрос об интегрировании, при помощи одних алгебраических и логарифмических знаков, биномиальных дифференциалов

$$x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx,$$

где s, s', s'' — рациональные числа.

Интеграл этих дифференциалов легко приводится к виду

$$\int x^{p-1} (1 + x^q)^{\frac{m'}{m}} dx,$$

где p, q, m, m_1 — целые числа и $q > 0$, а значение этого интеграла находится по известным методам, если одно из двух количеств $\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ — число целое. В противном случае интеграл приводится

к виду

$$U_0 + \int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m'}{m}}} dx,$$

где U_0 — алгебраическая функция, p' — наименьшее положительное число, сравнимое с p по модулю q , а m'' — наименьшее число, сравнимое с m' по модулю m , что предполагает

$$p' < q, \quad m'' < m^*.$$

Чтобы найти алгебраический член в выражении интеграла $\int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx$, следует, согласно § I, искать общий наибольший делитель функций $(1+x^q)^{m''}$ и $\frac{d(1+x^q)^{m''}}{dx}$. Так как этот делитель равен $(1+x^q)^{m''-1}$, то заключаем, что алгебраический член имеет знаменателем функцию $(1+x^q)^{m''-1}$.

Но, рассматривая функции

$$\frac{x^{p'-1}(1+x^q)^{m''-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}, \quad \frac{(1+x^q)^{m''-1}}{x(1+x^q)^{\frac{m''}{m} \frac{m-1}{m}}},$$

в которых, как мы видели, $p' < q$, $m'' < m$, $p' > 0$, находим, что их степени ниже -1 , что, в силу § 1, свидетельствует, что в выражении

$\int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx$ нет алгебраического члена. Поэтому остается искать его

выражение только через логарифмические члены.

* При помощи интегрирования по частям или при помощи метода неопределенных коэффициентов дифференциальный бином можно всегда преобразовать таким образом, что при целых m и n можно сделать $m \leq \frac{n}{2}$ и $p < \frac{1}{2}$, т. е., в обозначениях Чебышева, $p-1 < \frac{q}{2}$ и $\frac{m'}{m} < \frac{1}{2}$, откуда получаем условия Чебышева: $p' < q$ и $m'' < m$. Вывод формул приведения см., например, в книге К. Поссе, И. Привалов. Курс интегрального исчисления. 1939, стр. 46. — *Ред.*

Но из сказанного в § III следует, что подобное выражение его возможно только в том случае, когда степень $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ не выше -1 , а вследствие последней из доказанных нами теорем, эта степень не должна быть ниже -1 ; следовательно, интегрирование $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ при помощи алгебраических и логарифмических знаков невозможно, если степень функции $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ не равна в точности -1 , что и влечет за собою такое соотношение между показателями p' , q , $\frac{m''}{m}$:

$$\frac{p'}{q} - \frac{m''}{m} = 0.$$

Переходя к числам p и m' , из которых первое сравнимо с p' по модулю q , а второе с $-m''$ по модулю m , мы находим, что последнее соотношение требует, чтобы $\frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ было целым числом. Следовательно, кроме этого случая и случая, когда p делится на q , интеграл

$$\int x^{p-1} (1+x^q)^{\frac{m'}{m}} dx$$

представляет особенную трансцендентную функцию, что и требовалось доказать, чтобы быть уверенным, что обыкновенные методы интегрирования биномиальных дифференциалов с рациональными показателями обнимают все случаи, когда это интегрирование выполнимо при помощи алгебраических и логарифмических знаков.

§ IX

Из найденного в § IV, V и VI заключаем, что вообще число логарифмических членов, достаточное для выражения интеграла $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\Delta}$, равно $l - \lambda + 1$, где l обозначает степень функции $F(x)$, а λ — число

уравнений (4). Кроме того, мы видели, что интеграл $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$ может быть приведен таким образом, чтобы в уравнении

$$\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \dots$$

все члены имели вид

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} \log W_i,$$

где n_i — целое вещественное число, а

$$W_i = \varphi_i(\Delta) \varphi_i^\alpha(\alpha\Delta) \varphi_i^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \dots \varphi_i^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)$$

представляет функцию, степень которой равна $M_i^0 \cdot n_i$ и которая для всех конечных значений x остается в конечном отношении с функцией

$$[(x-x')^{M_i'} (x-x'')^{M_i''} (x-x''')^{M_i'''} \dots (x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}} (x-x^{(\lambda+i)})]^{n_i},$$

числа же $M_i^0, M_i', M_i'', M_i''', \dots, M_i^{(\lambda-1)}$ известны из уравнений (4).

Нетрудно убедиться, что по этим данным вполне определяется каждый член в выражении интеграла $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$, т. е. если найдены числа

$$n_0, n_1, n_2, \dots, n_{l-\lambda}$$

и функции

$$W_0, W_1, W_2, \dots, W_{l-\lambda},$$

выполняющие выше приведенные условия, то сумма

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0} \log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1} \log W_1 + \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2} \log W_2 + \dots + \frac{K^{(\lambda)}}{n_{l-\lambda}} \log W_{l-\lambda}$$

будет выражением интеграла $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$, если последний может быть выражен при помощи логарифмических членов.

Действительно, если эта сумма не представляет значения интеграла $\int \frac{f(x) dx}{F(x) \Delta}$, то пусть

$$B_0 \log W^0, B_1 \log W', B_2 \log W'', \dots, B_s \log W^{(s)}$$

$$\begin{aligned}
K'' &= \sum_{i=0}^{l-\lambda} N_i'' \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}, \\
&\dots \dots \dots \\
K^{(l)} &= \sum_{i=0}^{l-\lambda} N_i^{(l)} \frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}.
\end{aligned}$$

Следовательно, предыдущие уравнения дают равенства

$$\sum_{i=0}^s \nu_i B_i = 0, \quad \sum_{i=0}^s P_i' B_i = 0, \quad \sum_{i=0}^s P_i'' B_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^s P_i^{(l)} B_i = 0,$$

которые должны быть тождественны относительно $B_0, B_1, B_2, \dots, B_s$, если сумма

$$B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \dots + B_s \log W^{(s)}$$

приведена к наименьшему числу членов (§ II). Следовательно,

$$\nu_i = 0, \quad P_i' = 0, \quad P_i'' = 0, \quad \dots, \quad P_i^{(l)} = 0,$$

что, на основании § VI, приводит нас к заключению, что каждый из членов

$$B_0 \log W_0, \quad B_1 \log W_1, \quad B_2 \log W_2, \quad \dots, \quad B_s \log W_s$$

— величина постоянная.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

В силу того, что нами было показано в мемуаре об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из полинома третьей или четвертой степени, интегрирование в конечном виде дифференциала

$$\frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}},$$

каковы бы ни были целые функции $f(x)$ и $F(x)$, окончательно приводится к разысканию интегралов вида

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx,$$

где l, m, n, p суть известные постоянные, а L — постоянное, определяемое условием, что интеграл способен выражаться в конечном виде. Всякий раз, когда условие это может быть выполнено, мы найдем интеграл

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx,$$

согласно методу Абеля, разлагая в непрерывную дробь выражение

$$\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}$$

и продолжая это разложение до тех знаменателей, в которых начинает обнаруживаться их периодичность. Но так как эта периодичность не

имеет места в случае, если интеграл

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx$$

в конечном виде не берется ни при каком значении для L , то понятно, что ряд операций, к которому ведет эта метода, может продолжаться до бесконечности, не доставляя какого-либо решительного вывода. Это затруднение не может быть устранено рассмотрением интегралов, определяющих природу функции

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx,$$

и позволяющих узнать, возможно ли ее выражение в конечном виде, ибо для этого последнего необходимо иметь точные величины этих интегралов, между тем как они могут быть вычисляемы только приближенно. Для интересующего нас интегрирования нужно иметь способ, который мог бы обнаруживать возможность или невозможность взятия интеграла

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx$$

в конечном виде на основании природы величин l , m , n , p и при помощи одних алгебраических действий, число которых было бы конечно. Это именно мы и пытались сделать и этого достигли, поскольку дело касается случая, когда l , m , n , p суть числа рациональные, а полином

$$x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p$$

неразложим на линейные множители при помощи одних квадратных радикалов. Найденная нами метода интегрирования соответствующих этому случаю дифференциалов позволяет, при помощи ряда однообразных операций, или убедиться в невозможности этого интегрирования в конечном виде, или выполнить его до конца. Во всех случаях процесс оканчивается, и для числа операций, которые приходится произвести, всегда можно назначить предел. Откладывая изложение этой методы до обстоятельного об этом предмете мемуара, мы ограничимся теперь замечанием, что для разобранного нами случая рассматриваемая метод

дает непогрешимое средство определять, на каком месте всегда можно остановить разложение в непрерывную дробь при разыскании интеграла по способу Абеля.

Принимая для упрощения, что дифференциал $\frac{x+L}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}} dx$ приведен к виду

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}} dx,$$

где p, q, r — числа целые, мы можем следующим образом дополнить методу Абеля в приложении к рассматриваемому случаю.

Если в дифференциале

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}} dx$$

полином x^4+px^2+qx+r имеет коэффициентами целые числа и неразложим на линейные множители при помощи одних квадратных радикалов, то этот дифференциал не может быть интегрирован в конечном виде, каково бы ни было значение A , коль скоро в непрерывной дроби, происходящей от разложения радикала

$$\sqrt{x^4+px^2+qx+r},$$

ни один из $2N-1$ первых знаменателей не будет второй степени, причем N означает число целых решений уравнений

$$\begin{aligned} y^2 - 3xz &= p^2 + 12r, \\ z^2(4x^3z - x^2y^2 - 18xyz + 4y^3 + 27z^2) &= \\ &= (4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r. \end{aligned}$$

В противном случае, при некотором значении A , дифференциал

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}} dx$$

проинтегрируется в конечном виде, и интеграл его найдется по формуле

$$\frac{1}{2\lambda} \log \frac{\varphi(x) + \sqrt{x^4+px^2+qx+r}}{\varphi(x) - \sqrt{x^4+px^2+qx+r}},$$

где $\varphi(x)$ есть подходящая дробь, которую получим, когда при разложении в непрерывную дробь радикала

$$\sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}$$

остановимся на первом знаменателе второй степени, а λ — степень числителя этой подходящей дроби.

Дополненная таким образом метода Абеля дает все, что нужно для интегрирования рассматриваемых дифференциалов, ибо всегда можно определить число N , изображающее, сколько целых решений допускается уравнениями

$$\begin{aligned} y^2 - 3xz &= p^2 + 12r, \\ z^2(4x^3z - x^2y^2 - 18xyz + 4y^3 + 27z^2) &= \\ &= (4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r. \end{aligned}$$

В самом деле, последнее уравнение предполагает, что квадрат z делит число

$$(4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r.$$

Поэтому, разыскивая квадратные делители этого числа, мы получим все значения, которые может иметь неизвестная z . С другой стороны, принимая для z каждое из этих значений со знаком $+$ или $-$, мы получаем для определения x и y два уравнения, которые вполне определяют эти неизвестные и по самому виду не могут иметь более шести решений. Вследствие этого нетрудно перечислить все целые решения этих уравнений, и мы видим, что число их никогда не превзойдет взятого 12 раз числа квадратных делителей выражения

$$(4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r.$$

О НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЯХ

В октябре прошлого года я имел честь представить Академии Наук один из результатов моих изысканий об интерполировании: формулу, которая дает приблизительные выражения искомой функции по ее частным значениям, и притом с коэффициентами, определяемыми условием *способа наименьших квадратов*. Такая формула, как видно из записки моей, напечатанной в Бюллетене Академии под заглавием «Note sur une formule d'analyse»*, получается при помощи разложения некоторой функции в непрерывную дробь. Оставляя исследование этой формулы по отношению ее к интерполированию до окончания изысканий моих об этом предмете, мы рассмотрим здесь эту формулу в отношении ее к непрерывным дробям, как выражение особенного свойства их.

Мы начнем с вывода этой формулы, предложенной нами в вышеупомянутой записке без доказательства, и потом покажем, что из нее можно вывести относительно свойств подходящих дробей, получаемых через разложение некоторых функций в непрерывную дробь.

§ I

Началом наших изысканий будет решение следующей задачи:

Известны значения $F(x)$ при $n+1$ различных величинах переменной $x=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$; найти значение этой функции при $x=X$, предполагая, что она выражается такою формулою:

$$a + bx + cx^2 + \dots + gx^{m-1} + hx^m,$$

* См. Полн. собр. соч., М.—Л., АН СССР, 1945, т. II, стр. 99—100. — *Ред.*

где t не превосходит n , и притом так, чтобы погрешности значений $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ имели наименьшее влияние на искомую величину $F(X)$.

Выражения $F(x)$ при $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ дают нам такой ряд уравнений:

$$\begin{aligned} F(x_0) &= a + bx_0 + cx_0^2 + \dots + gx_0^{m-1} + hx_0^m, \\ F(x_1) &= a + bx_1 + cx_1^2 + \dots + gx_1^{m-1} + hx_1^m, \\ F(x_2) &= a + bx_2 + cx_2^2 + \dots + gx_2^{m-1} + hx_2^m, \\ &\dots \dots \dots \\ F(x_n) &= a + bx_n + cx_n^2 + \dots + gx_n^{m-1} + hx_n^m. \end{aligned}$$

Чтобы вывести отсюда значение $F(X)$, мы умножаем эти уравнения на неопределенные множители $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и потом берем их сумму

$$\begin{aligned} \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n) &= \\ &= a(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \\ &+ b(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + \\ &+ c(\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2) + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ g(\lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \dots + \lambda_n x_n^{m-1}) + \\ &+ h(\lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \dots + \lambda_n x_n^m). \end{aligned}$$

Сличая это с величиною $F(X) = a + bX + cX^2 + \dots + gX^{m-1} + hX^m$, мы находим, что для равенства

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n)$$

множители $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ должны удовлетворять таким уравнениям:

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= 1, \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n &= X, \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 &= X^2, \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \dots + \lambda_n x_n^{m-1} &= X^{m-1}, \\ \lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \dots + \lambda_n x_n^m &= X^m. \end{aligned}$$

Этими уравнениями вполне определяются значения множителей $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, если $m = n$; ибо тогда число их равно числу уравнений, и в этом случае для коэффициентов формулы

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n),$$

определяющей значение $F(X)$, возможна одна только система величин $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. В противном случае, если $m < n$, эти уравнения могут быть удовлетворены бесконечным множеством различных величин $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, и каждая система таких величин по формуле

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n)$$

нам доставит особенное выражение величины $F(X)$. Но, по условию задачи, из этих различных выражений величины $F(X)$ мы должны выбрать ту, в которой погрешности значений $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ имели бы наименее влияния на искомую величину $F(X)$; а для этого, как известно из теории вероятностей, значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в формуле

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n)$$

должны быть выбраны под условием *наименьшей* величины суммы

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \dots + k_n^2 \lambda_n^2,$$

где через $k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2$ обозначаем количества, пропорциональные средним величинам квадратов погрешностей значений $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$. Для большей общности мы предполагаем, что вообще законы погрешностей в величинах $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ различны между собой. Что касается до случая, когда для всех величин $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ закон погрешностей один и тот же, мы будем иметь

$$k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_n$$

и можем взять эти количества равными 1.

Итак, при $m < n$ решение нашей задачи приводится к определению $F(X)$ по формуле

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n),$$

где множители $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= 1, \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n &= X, \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 &= X^2, \\ &\vdots \\ \lambda_0 x_0^{m-1} + \lambda_1 x_1^{m-1} + \lambda_2 x_2^{m-1} + \dots + \lambda_n x_n^{m-1} &= X^{m-1}, \\ \lambda_0 x_0^m + \lambda_1 x_1^m + \lambda_2 x_2^m + \dots + \lambda_n x_n^m &= X^m \end{aligned} \tag{1}$$

и условием *наименьшей* величины суммы

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \dots + k_n^2 \lambda_n^2.$$

Заметим, что это же может быть отнесено и к случаю $m=n$, ибо тогда значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ вполне определяются уравнениями (1) и условие *наименьшей* величины

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \dots + k_n^2 \lambda_n^2$$

ничего не прибавляет, что согласно со сказанным выше об этом случае.

Приступая к определению величин $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, положим, что $\theta(x)$ есть такая целая функция, значения которой при $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ равны $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \dots, \frac{1}{k_n}$, вследствие чего сумма

$$k_0^2 \lambda_0^2 + k_1^2 \lambda_1^2 + k_2^2 \lambda_2^2 + \dots + k_n^2 \lambda_n^2$$

напишется так:

$$\frac{\lambda_0^2}{\theta^2(x_0)} + \frac{\lambda_1^2}{\theta^2(x_1)} + \frac{\lambda_2^2}{\theta^2(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{\theta^2(x_n)}.$$

Отыскивая условие *minimum'a* этой суммы при величинах $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, связанных между собою уравнениями (1), мы, по обыкновенному способу *наибольших и наименьших величин*, берем дифференциал этой суммы и приравниваем его сумме дифференциалов уравнений (1), умноженных на вспомогательные множители $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, откуда, сравнивая между собою члены с $d\lambda_0, d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n$, находим

$$\begin{aligned}\theta^2(x_0)\varphi(x_0)x_0^{m-1} + \theta^2(x_1)\varphi(x_1)x_1^{m-1} + \dots + \theta^2(x_n)\varphi(x_n)x_n^{m-1} &= X^{m-1}, \\ \theta^2(x_0)\varphi(x_0)x_0^m + \theta^2(x_1)\varphi(x_1)x_1^m + \dots + \theta^2(x_n)\varphi(x_n)x_n^m &= X^m,\end{aligned}$$

где, как нетрудно заметить, первые части суть коэффициенты при $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\dots$, $\frac{1}{x^m}$, $\frac{1}{x^{m+1}}$ в ряде, получаемом через разложение функции

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x-x_1} + \dots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x-x_n}$$

по нисходящим степеням x ; вторые же — подобные коэффициенты в разложении

$$\frac{1}{x-X}.$$

А потому эти уравнения могут быть заменены условием, что разность функций

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x-x_1} + \dots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x-x_n} \text{ и } \frac{1}{x-X},$$

разложенная по нисходящим степеням x , не содержит членов с $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\dots$, $\frac{1}{x^m}$, $\frac{1}{x^{m+1}}$ и, следовательно, что она приводится к дроби $\frac{M}{N}$, где степень знаменателя N превосходит степень числителя M по крайней мере на $m+2$. Итак, предыдущие уравнения заменяются таким равенством:

$$\frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x-x_1} + \dots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x-x_n} - \frac{1}{x-X} = \frac{M}{N}.$$

С другой стороны, полагая для сокращения

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = f(x)$$

и называя через U целую функцию, заключающуюся в дроби $\frac{\theta^2(x)\varphi(x)f'(x)}{f(x)}$, по теории разложения сложных дробей на простые, приходим

$$\frac{\theta^2(x)\varphi(x)f'(x)}{f(x)} = U + \frac{\theta^2(x_0)\varphi(x_0)}{x-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)\varphi(x_1)}{x-x_1} + \dots + \frac{\theta^2(x_n)\varphi(x_n)}{x-x_n},$$

вследствие чего предыдущее уравнение приводится к такому:

$$\frac{\theta^2(x) \varphi(x) f'(x)}{f(x)} - U - \frac{1}{x - X} = \frac{M}{N},$$

или, что одно и то же,

$$\frac{(x - X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)} = \frac{(x - X) M}{\varphi(x) N}.$$

На основании этого уравнения нетрудно найти значение функции $\varphi(x)$.

Для этого мы замечаем, что функция $\frac{(x - X) M}{\varphi(x) N}$ степени ниже, чем $\frac{1}{\varphi^2(x)}$, ибо $\varphi(x)$, которая означает у нас

$$\frac{\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots + \mu_m x^m}{2},$$

не может быть степени выше m , между тем как степень N превосходит степень M по крайней мере на $m + 2$ и, следовательно, дробь $\frac{(x - X) M}{N}$ степени ниже, чем $\frac{1}{\varphi(x)}$. А потому, на основании предыдущего

уравнения, заключаем, что дробь $\frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)}$ дает величину функции $\frac{(x - X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ верно до членов степени $\frac{1}{\varphi^2(x)}$ включительно, т. е. до

единицы, деленной на квадрат знаменателя. Но такая степень точности, как известно, принадлежит исключительно подходящим дробям, получаемым через разложение $\frac{(x - X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь. При-

том в ряду таких дробей за дробью $\frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)}$ должна следовать дробь со знаменателем, степень которого выше m , ибо иначе разность

$$\frac{(x - X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)}$$

не была бы степени ниже $\frac{1}{\varphi(x) x^m}$, как предполагает наше уравнение

$$\frac{(x - X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)} - \frac{U(x - X) + 1}{\varphi(x)} = \frac{(x - X) M}{\varphi(x) N},$$

где дробь $\frac{(x - X) M}{N}$, как видели, степени не выше $-(m + 1)$.

Итак, дробь $\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$ найдется в ряду подходящих дробей, получаемых разложением $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{\varphi(x)}$ в непрерывную дробь, и в этом ряду за нею должна следовать дробь со знаменателем степени выше m ; а так как в дроби $\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)}$ знаменатель $\varphi(x)$ степени не выше m , то эта дробь в ряду подходящих дробей выражения $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ должна быть последнею, в которой знаменатель степени не выше m . Отыскивая такую дробь в ряду подходящих дробей выражения $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ и изображая ее через $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$, мы будем иметь уравнение

$$\frac{U(x-X)+1}{\varphi(x)} = \frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)},$$

откуда выходит

$$U(x-X)+1 = \frac{\varphi^0(x)\varphi(x)}{\varphi_0(x)}.$$

Это уравнение предполагает, что произведение $\varphi^0(x)\varphi(x)$ делится на $\varphi_0(x)$, а как, по свойству подходящих дробей, функции $\varphi^0(x)$ и $\varphi_0(x)$ простые между собою то $\varphi_0(x)$ не иначе может делить произведение $\varphi^0(x)\varphi(x)$, как деля множители $\varphi(x)$. Называя же через q частное, получаемое при этом делении, находим

$$\varphi(x) = q\varphi_0(x),$$

что, по внесении в предыдущее уравнение, дает

$$U(x-X)+1 = q\varphi^0(x).$$

Чтобы вывести отсюда значение функции $\varphi(x)$, мы замечаем, что она, как видели, не может быть степени выше m ; а потому множитель q должен быть постоянною величиною, если $\varphi_0(x)$ степени m . Эту постоянную величину множителя q легко найти: полагая в последнем уравнении $x=X$, имеем

$$1 = q\varphi^0(X),$$

откуда

$$q = \frac{1}{\varphi^0(X)},$$

что, по внесении в найденное нами выражение функции $\varphi(x)$, дает

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi^0(X)}.$$

Так найдется значение функции $\varphi(x)$ при $\varphi_0(x)$ степени m . В случае же низшей степени $\varphi_0(x)$ множитель q в формуле

$$\varphi(x) = q\varphi_0(x)$$

может быть какою-нибудь целою функциею x , лишь бы только произведение $q\varphi_0(x)$ не выходило степени выше m . Следовательно, в этом случае для искомой функции $\varphi(x)$ найдется бесконечное множество величин. Но если согласимся из всех возможных величин $\varphi(x)$ употреблять ту, у которой степень наименьшая, то опять в формуле

$$\varphi(x) = q\varphi_0(x)$$

должны взять за q постоянное количество, и попрежнему для определения $\varphi(x)$ найдется

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi^0(X)}.$$

Так определяется функция $\varphi(x)$, которая, по (3), дает

$$\lambda_0 = \theta^2(x_0) \varphi(x_0), \quad \lambda_1 = \theta^2(x_1) \varphi(x_1), \quad \dots, \quad \lambda_n = \theta^2(x_n) \varphi(x_n),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ суть коэффициенты формулы

$$F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \dots + \lambda_n F(x_n),$$

определяющей значение $F(X)$ через $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$, откуда выходит такое окончательное выражение величины $F(X)$:

$$F(X) = \frac{\theta^2(x_0) \varphi_0(x_0)}{\varphi^0(X)} F(x_0) + \frac{\theta^2(x_1) \varphi_0(x_1)}{\varphi^0(X)} F(x_1) + \dots + \frac{\theta^2(x_n) \varphi_0(x_n)}{\varphi^0(X)} F(x_n).$$

Что касается функций $\varphi_0(x), \varphi^0(x)$, то, как видели, для определения их должны найти в ряду подходящих дробей выражения

$$\frac{(x - X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$$

последнюю дробь со знаменателем степени не выше m ; числитель этой дроби будет $\varphi^0(x)$, а знаменатель $\varphi_0(x)$.

Так решается задача, предложенная нами в начале первого параграфа.

§ III

Рассматривая найденную нами формулу для определения $F(X)$, мы приходим к убеждению, что в ней должны произойти значительные сокращения; ибо, по сущности задачи, искомая величина $F(X)$ должна выражаться целою функциею X , между тем как в найденной нами формуле есть делитель $\varphi^0(X)$, и по составу ее не видно, чтобы здесь количество X сокращалось. Это происходит оттого, что функции $\varphi^0(x)$, $\varphi_0(x)$, определяясь разложением в непрерывную дробь выражения $\frac{(x - X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, содержат величину X в своих коэффициентах. Чтобы привести найденную нами величину $F(X)$ к такому виду, где бы яснее был ее состав, мы покажем, каким образом от подходящих дробей выражения $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ можно перейти к подходящим дробям выражения $\frac{(x - X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ и, следовательно, к дроби $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$.

Для простоты мы предположим, что в непрерывной дроби

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

происходящей от разложения $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, все знаменатели $q_1, q_2, \dots$ содержат переменную x в первой степени и, следовательно, подходящие дроби ее

$$\frac{q_0}{1}, \quad \frac{q_0q_1 + 1}{q_1}, \quad \frac{q_0q_1q_2 + q_2 + q_0}{q_1q_2 + 1}, \dots,$$

которые будем изображать так:

$$\frac{\pi_0(x)}{\psi_0(x)}, \quad \frac{\pi_1(x)}{\psi_1(x)}, \quad \frac{\pi_2(x)}{\psi_2(x)}, \quad \dots,$$

имеют в знаменателе функции степени 0, 1, 2, ... и так далее.

Заметим, что для функции $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, где степень числителя может быть меньше степени знаменателя только на единицу, разложение в непрерывную дробь всегда будет такого вида, исключая некоторые частные случаи, обусловливаемые особенными уравнениями между коэффициентами функций $\theta(x)$ и $f(x)$, вследствие которых знаменатели $q_1, q_2, \dots$ могут быть степени 2, 3, ... и пр. Притом нетрудно убедиться, что такие неправильности в непрерывной дроби

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

совершенно невозможны в случаях, представляющихся при обыкновенном интерполировании, где $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, корни уравнения $f(x)=0$, имеют действительные значения и различны между собою, функция же $\theta(x)$ не включает мнимых коэффициентов и при $x=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет конечные значения $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \dots, \frac{1}{k_n}$. В самом деле, в этом случае, употребляя знакоположение Коши (Journ. de l'École Polytechnique, cahier 25), имеем такое уравнение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} \right) \right) = n + 1;$$

а по способу определения величины $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} \right) \right)$ видно, что она для $f(x)$ степени $n+1$ остается всегда меньше $n+1$, если в дроби

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

происходящей от разложения $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, какой-либо из знаменателей $q_1, q_2, \dots$ степени выше первой.

Убедясь таким образом, что ограничения, сделанные нами относительно вида непрерывной дроби, происходящей от разложения $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$,

не имеют особенной важности, мы переходим теперь к определению $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$, последней дроби в ряду подходящих дробей выражения $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ с знаменателем степени не выше m , и докажем, что такая дробь выражается формулой

$$\frac{\frac{\phi_m(X)\pi_{m+1}(x) - \phi_{m+1}(X)\pi_m(x)}{\frac{1}{x-X}[\phi_m(X)\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(X)]}},$$

где $\frac{\pi_m(x)}{\phi_m(x)}$, $\frac{\pi_{m+1}(x)}{\phi_{m+1}(x)}$ означают подходящие дроби выражения $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, которых знаменатели суть степени m и $m+1$.

В самом деле, по составу формулы

$$\frac{\phi_m(X)\pi_{m+1}(x) - \phi_{m+1}(X)\pi_m(x)}{\frac{1}{x-X}[\phi_m(X)\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(X)]}$$

видно, что ее знаменатель приводится к целой функции степени не выше m . С другой стороны, определяя разность этой дроби с дробью $\frac{(x-X)f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$, находим

$$\frac{\left[\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_m(x)}{\phi_m(x)}\right]\phi_{m+1}(X)\phi_m(x) - \left[\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_{m+1}(x)}{\phi_{m+1}(x)}\right]\phi_m(X)\phi_{m+1}(x)}{\frac{1}{x-X}[\phi_m(X)\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(X)]},$$

что будет степени ниже, чем

$$\frac{1}{\frac{1}{x-X}[\phi_m(X)\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(X)]} \cdot \frac{1}{x^m},$$

ибо, по свойству подходящих дробей, выражения

$$\left(\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_{m+1}(x)}{\phi_{m+1}(x)}\right)\phi_{m+1}(x), \quad \left(\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)} - \frac{\pi_m(x)}{\phi_m(x)}\right)\phi_m(x)$$

степени ниже, чем $\frac{1}{\phi_m(x)}$, и, следовательно, $\frac{1}{x^m}$.

Итак, дробь

$$\frac{\frac{\psi_m(X) \pi_{m+1}(x) - \psi_{m+1}(X) \pi_m(x)}{\frac{1}{x-X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x) - \psi_m(x) \psi_{m+1}(X)]}},$$

имея знаменатель степени не выше m , дает величину

$$\frac{(x-X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$$

верно до членов степени, одинаковой с функцией

$$\frac{1}{\frac{1}{x-X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x) - \psi_m(x) \psi_{m+1}(X)]} \cdot \frac{1}{x^m}.$$

С такою же степенью точности функция $\frac{(x-X) f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ может выражаться только своими подходящими дробями, и из них лишь теми, за которыми следуют подходящие дроби с знаменателем степени выше m . Следовательно, наша дробь принадлежит к числу таких дробей, а как ее знаменатель степени не выше m , то она должна быть последнею с таким знаменателем, и потому она равна дроби, которую мы обозначали через $\frac{\varphi^0(x)}{\varphi_0(x)}$.

На основании этого заключаем, что в формуле предыдущего параграфа

$$F(X) = \frac{\theta^2(x_0) \varphi_0(x_0)}{\varphi^0(X)} F(x_0) + \frac{\theta^2(x_1) \varphi_0(x_1)}{\varphi^0(X)} F(x_1) + \dots + \frac{\theta^2(x_n) \varphi_0(x_n)}{\varphi^0(X)} F(x_n)$$

выражения

$$\frac{\varphi_0(x_0)}{\varphi^0(X)}, \frac{\varphi_0(x_1)}{\varphi^0(X)}, \dots, \frac{\varphi_0(x_n)}{\varphi^0(X)}$$

могут быть заменены такими:

$$\frac{\frac{1}{x_0-X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_0) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_0)]}{\frac{\psi_m(X) \pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X) \pi_m(X)}{\frac{1}{x_1-X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_1)]}},$$

$$\frac{\frac{1}{x_1-X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_1)]}{\frac{\psi_m(X) \pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X) \pi_m(X)}{\frac{1}{x_1-X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_1)]}},$$

$$\frac{1}{x_n - X} [\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_n) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_n)] \\ \frac{\psi_m(X) \pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X) \pi_m(X)}{\psi_m(X) \pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X) \pi_m(X)},$$

где знаменатель

$$\psi_m(X) \pi_{m+1}(X) - \psi_{m+1}(X) \pi_m(X),$$

как знаем из теории непрерывных дробей, приводится к $(-1)^m$, вследствие чего предыдущее выражение $F(X)$ приводится к такому виду:

$$F(X) = (-1)^m \frac{\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_0) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_0)}{x_0 - X} \theta^2(x_0) F(x_0) + \\ + (-1)^m \frac{\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_1) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_1)}{x_1 - X} \theta^2(x_1) F(x_1) + \\ \dots + (-1)^m \frac{\psi_m(X) \psi_m(x_n) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_n)}{x_n - X} \theta^2(x_n) F(x_n),$$

что короче будем писать так:

$$F(X) = (-1)^m \sum_{i=0}^n \frac{\psi_m(X) \psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X) \psi_m(x_i)}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i).$$

Вот новая формула для определения величины $F(X)$ по значениям $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$. Она составляется из функций $\psi_m(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, знаменателей двух подходящих дробей выражения $\frac{f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$, получаемых через разложение его в непрерывную дробь, и по составу этой формулы видно, что она приводится к целой функции от X .

§ IV

Теперь мы покажем, каким образом из этой формулы получается ряд, о котором говорили в записке, представленной Академии в прошедшем году, и который теперь послужит нам к раскрытию некоторых свойств функций $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., определяемых разложением $\frac{f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь.

Найденная нами формула дает величину $F(X)$ в предположении, что $F(x)$ выражается так:

$$F(X) = a + bx + cx^2 + \dots + gx^{m-1} + hx^m.$$

Изображая такую величину $F(X)$ через Y_m и величину той же функции $F(X)$, находимую в предположении

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \dots + gx^{m-1},$$

через Y_{m-1} , мы находим по предыдущей формуле

$$Y_m = (-1)^m \sum_{i=0}^n \frac{\phi_m(X) \phi_{m+1}(x_i) - \phi_{m+1}(X) \phi_m(x_i)}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i), \quad (4)$$

$$Y_{m-1} = (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^n \frac{\phi_{m-1}(X) \phi_m(x_i) - \phi_m(X) \phi_{m-1}(x_i)}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i),$$

откуда, вычитая Y_{m-1} из Y_m , выводим

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m \sum_{i=0}^n \frac{\phi_m(X) [\phi_{m+1}(x_i) - \phi_{m-1}(x_i)] - \phi_m(x_i) [\phi_{m+1}(X) - \phi_{m-1}(X)]}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i),$$

что значительно сокращается по свойству функций $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m-1}(x)$. Эти функции суть знаменатели подходящих дробей, получаемых разложением $\frac{f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m+1} + \dots}}}}$$

где, по сделанному нами предположению, знаменатели

$$q_1, q_2, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots$$

должны быть линейными функциями x и, следовательно, выражаться так:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 x + B_1, \\ q_2 &= A_2 x + B_2, \\ &\dots \dots \dots \\ q_{m+1} &= A_{m+1} x + B_{m+1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

По общему правилу составления подходящих дробей находим

$$\psi_{m+1}(x) = q_{m+1} \psi_m(x) + \psi_{m-1}(x) = (A_{m+1}x + B_{m+1}) \psi_m(x) + \psi_{m-1}(x),$$

откуда выходит

$$\psi_{m+1}(x) - \psi_{m-1}(x) = (A_{m+1}x + B_{m+1}) \psi_m(x).$$

Заменяя здесь x через x_i и X , имеем

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i) &= (A_{m+1}x_i + B_{m+1}) \psi_m(x_i), \\ \psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X) &= (A_{m+1}X + B_{m+1}) \psi_m(X); \end{aligned}$$

внося же эти величины разностей

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m-1}(x_i), \\ \psi_{m+1}(X) - \psi_{m-1}(X) \end{aligned}$$

в формулу, найденную нами для определения $Y_m - Y_{m-1}$, получаем

$$\begin{aligned} Y_m - Y_{m-1} &= \\ &= (-1)^m \sum_{i=0}^n \frac{\psi_m(X) \psi_m(x_i) [A_{m+1}x_i + B_{m+1}] - \psi_m(x_i) \psi_m(X) [A_{m+1}X + B_{m+1}]}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i), \end{aligned}$$

что, по сокращении, дает

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^n \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i).$$

Делая здесь $m = 1, 2, \dots, m-1, m$, находим такой ряд уравнений:

$$Y_1 - Y_0 = -A_2 \phi_1(X) \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

$$Y_2 - Y_1 = A_3 \phi_2(X) \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

.....

$$Y_{m-1} - Y_{m-2} = (-1)^{m-1} A_m \phi_{m-1}(X) \sum_{i=0}^n \phi_{m-1}(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

$$Y_m - Y_{m-1} = (-1)^m A_{m+1} \phi_m(X) \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

и, складывая их, получаем

$$\begin{aligned} Y_m - Y_0 = & -A_2 \phi_1(X) \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + A_3 \phi_2(X) \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \dots \\ & + (-1)^{m-1} A_m \phi_{m-1}(X) \sum_{i=0}^n \phi_{m-1}(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \\ & + (-1)^m A_{m+1} \phi_m(X) \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i), \end{aligned}$$

откуда для определения Y_m выходит такая формула:

$$\begin{aligned} Y_m = & Y_0 - A_2 \phi_1(X) \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \\ & + A_3 \phi_2(X) \sum_{i=0}^n \phi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \dots \\ & + (-1)^m A_{m+1} \phi_m(X) \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i). \end{aligned}$$

Что касается величины Y_0 , то по формуле (4), делая в ней $m = 0$, находим

$$Y_0 = \sum_{i=0}^n \frac{\phi_0(X) \phi_1(x_i) - \phi_1(X) \phi_0(x_i)}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i),$$

где $\phi_0(x)$, $\phi_i(x)$ означают знаменателей первых двух подходящих дробей выражения $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f'(x)}$, определяемых разложением его в непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}} = q_0 + \frac{1}{A_1x + B_1} + \frac{1}{A_2x + B_2} + \dots$$

Откуда выходит

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = A_1x + B_1.$$

А потому функция Y_0 определится формулою

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sum_{i=0}^n \frac{A_1x_i + B_1 - A_1X - B_1}{x_i - X} \theta^2(x_i) F(x_i) = \\ &= A_1 \sum_{i=0}^n \theta^2(x_i) F(x_i), \end{aligned}$$

что можем представить так:

$$Y_0 = A_1 \phi_0(X) \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

замечая, что $\phi_0(x) = 1$.

Внося эту величину Y_0 в предыдущее выражение Y_m , находим для определения Y_m величины $F(X)$ в предположении

$$F(x) = a + bx + cx^2 + \dots + gx^{m-1} + hx^m$$

такую формулу:

$$\begin{aligned} Y_m &= A_1 \phi_0(X) \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) - A_2 \phi_1(X) \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \dots \\ &\quad + (-1)^m A_{m+1} \phi_m(X) \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i), \end{aligned}$$

где, как видели, функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... и постоянные A_1 , A_2 , A_3 , ... определяются разложением функции $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь вида

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}$$

Функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... суть знаменатели подходящих дробей, получаемых из этой непрерывной дроби, а постоянные A_1 , A_2 , A_3 , ... суть коэффициенты при x в знаменателях q_1 , q_2 , q_3 , ...

В частном случае, когда закон погрешностей для всех величин $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ... один и тот же и, следовательно, по § 1, величины k_0 , k_1 , k_2 , ... могут быть приняты за 1, функция $\theta(x)$, определяемая уравнениями

$$\theta(x_0) = \frac{1}{k_0}, \quad \theta(x_1) = \frac{1}{k_1}, \quad \theta(x_2) = \frac{1}{k_2}, \quad \dots,$$

приводится сама к 1, вследствие чего найденная нами формула принимает такой вид:

$$Y_m = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) F(x_i) + \dots \\ + (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^n \psi_m(x_i) F(x_i),$$

где $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., A_1 , A_2 , A_3 , ... определяются разложением в непрерывную дробь выражения $\frac{f'(x)}{f(x)}$; об этом-то ряде мы говорили в вышеупомянутой записке. Но здесь мы не будем ограничиваться частным предположением, при котором функция $\theta(x)$ приводится к единице, а будем рассматривать наш ряд в общем его виде. Это приведет нас к любопытным предложениям относительно функций $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ...

Итак, по формуле предыдущего параграфа, в случае целой функции $F(x)$ степени не выше m , она может быть представлена так:

$$\begin{aligned} F(X) = & A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) - \\ & - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \dots + \\ & + (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^n \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i). \end{aligned}$$

Делая здесь $F(x) = \psi_m(x)$, мы находим

$$\begin{aligned} \psi_m(X) = & A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) \psi_m(x_i) - \\ & - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) \psi_m(x_i) + \dots + \\ & + (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i), \end{aligned}$$

что, по перенесении всех членов в одну часть уравнения, дает

$$\begin{aligned} A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) + \dots + \\ + \psi_m(X) [(-1)^m A_{m+1} \sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i) - 1] = 0. \end{aligned}$$

Но так как функции $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... суть степеней 0, 1, 2, ..., то это тождество предполагает уничтожение отдельно каждого из членов, содержащих $\psi_0(X)$, $\psi_1(X)$, $\psi_2(X)$, ..., а потому должно быть

$$(-1)^m A_{m+1} \sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i) - 1 = 0,$$

$$A_m \sum_{i=0}^n \psi_{m-1}(x_i) \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_2 = \frac{-1}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)},$$

$$\dots$$

$$A_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)}.$$

Внося же эти значения количеств $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$ в формулу

$$F(X) = A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i) + \dots$$

$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^n \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i),$$

мы приводим ее к такому виду:

$$F(X) = \frac{\sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_1(X) + \dots$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^n \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_m(X). \quad (6)$$

По составу этой формулы видно, что она не меняет своей величины от введения каких-либо постоянных множителей в функциях $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \dots$; а потому здесь, при определении этих функций, можно брать разложение $\frac{f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь вида

$$q_0 + \frac{L'}{q_1} + \frac{L''}{q_2} + \dots,$$

какие бы ни были постоянные количества $L', L'', \dots$, ибо члены подходящих дробей какого-либо выражения, получаемых от разложения его в непрерывные дроби таких двух видов

$$q_0 + \frac{L'}{q_1 + \frac{L''}{q_2 + \dots}}, \quad q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

как известно, разнятся между собою только постоянными множителями.

Точно так же для функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, определяемых разложением $\frac{f'(x)\theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь вида

$$q_0 + \frac{L'}{q_1 + \frac{L''}{q_2 + \dots}},$$

остаются справедливыми уравнения (5); ибо они не нарушаются введением каких-либо постоянных множителей в функции $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$. А потому теперь, приступая к приложениям формулы (6) и уравнений (5), мы не будем ограничиваться предположением, что в непрерывной дроби

$$q_0 + \frac{L'}{q_1 + \frac{L''}{q_2 + \dots}},$$

определяющей значения функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, числители $L', L'', \dots$, равны 1, как делали в предыдущих параграфах.

Кроме уравнений (5), между функциями $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ существуют еще замечательные соотношения, которые легко вывести из формулы (6), сличая ее, при $m=n$, с формулой интерполирования Лагранжа.

В самом деле, при $m=n$, формула (6) дает такое выражение функции степени n по значениям ее при $x=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$F(X) = \frac{\sum_{i=0}^n \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^n \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_1(X) + \dots$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^n \psi_n(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_n^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_n(X).$$

Но та же функция, по формуле Лагранжа, представляется так:

$$\sum_{i=0}^n \frac{(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\cdots}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots} F(x_i).$$

Для тождества этих двух формул, независимо от значений $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$, они должны иметь одинаковые члены с множителями $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$. На основании этого, сличая в них члены с $F(x_1)$, находим такое уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\cdots}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots} = \\ & = \frac{\psi_0(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_0(X) + \frac{\psi_1(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_1(X) + \cdots + \frac{\psi_n(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_n^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_n(X), \end{aligned}$$

откуда, делая $X=x_\eta$, где η не равно i , имеем

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\psi_0(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_0(x_\eta) + \frac{\psi_1(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_1(x_\eta) + \cdots + \\ & + \frac{\psi_n(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_n^2(x_i) \theta^2(x_i)} \psi_n(x_\eta), \end{aligned}$$

что, по умножении на $\frac{\theta(x_\eta)}{\theta(x_i)}$, может быть представлено так:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\psi_0(x_i) \theta(x_i) \psi_0(x_\eta) \theta(x_\eta)}{\sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} + \frac{\psi_1(x_i) \theta(x_i) \psi_1(x_\eta) \theta(x_\eta)}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} + \cdots + \\ & + \frac{\psi_n(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_\eta) \theta(x_\eta)}{\sum_{i=0}^n \psi_n^2(x_i) \theta^2(x_i)}. \end{aligned}$$

Делая же $X = x_i$, находим

$$1 = \frac{\psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} + \frac{\psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} + \dots + \frac{\psi_n^2(x_i) \theta^2(x_i)}{\sum_{i=0}^n \psi_n^2(x_i) \theta^2(x_i)}.$$

§ VI

Эти уравнения вместе с уравнениями (5) представляют замечательное свойство функций, определяемых формулою

$$\frac{\psi_m(x) \theta(x)}{\sqrt{\sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)}}.$$

Изображая эти функции через $\Phi_m(x)$, мы, на основании уравнений, сейчас выведенных, имеем

$$\sum_{m=0}^n \Phi_m(x_1) \Phi_m(x_{\eta}) = 0,$$

если η не равно i , и

$$\sum_{m=0}^n \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_{\eta}) = 1$$

в случае $\eta = i$.

По виду же функций $\Phi_m(x)$ и уравнениям (5) нетрудно заметить, что

$$\sum_{i=0}^n \Phi_m(x_i) \Phi_{m_1}(x_i) = 0 \text{ или } 1,$$

смотря по тому, будет ли m_1 различно с m , или $m_1 = m$; ибо сумма

$$\sum_{i=0}^n \Phi_m(x_i) \Phi_{m_1}(x_i),$$

по вставке значений $\Phi_m(x_i)$, $\Phi_{m_1}(x_i)$, приводится к такому выражению:

$$\frac{\sum_{i=0}^n \psi_m(x_i) \psi_{m_1}(x_i) \theta^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)} \sqrt{\sum_{i=0}^n \psi_{m_1}^2(x_i) \theta^2(x_i)}},$$

где, по (5), числитель обращается в 0, если m_1 не равно m ; в случае же $m_1 = m$ числитель становится равным знаменателю, и эта формула приводится к единице.

Итак, функция $\Phi_m(x)$, определяемая уравнением

$$\Phi_m(x) = \frac{\psi_m(x) \theta(x)}{\sqrt{\sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)}},$$

где $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... означают знаменатели в подходящих дробях, получаемых разложением $\frac{f'(x) \theta^2(x)}{f(x)}$ в непрерывную дробь вида

$$q_0 + \frac{L'}{q_1 + \frac{L''}{q_2 + \dots}},$$

имеет такое свойство: в квадрате

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_0(x_0), & \Phi_0(x_1), & \Phi_0(x_2), & \dots, & \Phi_0(x_n), \\ \Phi_1(x_0), & \Phi_1(x_1), & \Phi_1(x_2), & \dots, & \Phi_1(x_n), \\ \Phi_2(x_0), & \Phi_2(x_1), & \Phi_2(x_2), & \dots, & \Phi_2(x_n), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_n(x_0), & \Phi_n(x_1), & \Phi_n(x_2), & \dots, & \Phi_n(x_n), \end{array}$$

составленном из значений $\Phi_m(x)$ при $m = 0, 1, 2, \dots, n$, $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, члены каждой из строк как горизонтальных, так и вертикальных, в сумме квадратов дают 1; перемножая же соответственные члены в двух строках, вертикальных или горизонтальных, в сумме этих произведений находим 0.

Составление подобных квадратов было предметом мемуара Эйлера под заглавием „Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile“ (N. Comm., т. XV).

§ VII

На основании уравнений (5) нетрудно показать особенное значение функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots$$

между всеми функциями тех же степеней и с теми же коэффициентами

при высших степенях x : для этих функций суммы

$$\sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i), \quad \sum_{i=0}^n \psi_2^2(x_i) \theta^2(x_i), \quad \sum_{i=0}^n \psi_3^2(x_i) \theta^2(x_i), \dots$$

имеют наименьшую величину.

В самом деле, так как степени функций $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_m(x)$ суть 0, 1, 2, ..., m , то всякую целую функцию V степени m можно представить так:

$$V = A\psi_0(x) + B\psi_1(x) + C\psi_2(x) + \dots + H\psi_m(x),$$

где последний коэффициент H должны взять равным 1, если предполагаем в функции V коэффициент при x^m тот же самый, как и в $\psi_m(x)$.

Итак, в этом предположении будет

$$V = A\psi_0(x) + B\psi_1(x) + C\psi_2(x) + \dots + \psi_m(x).$$

Отыскивая значение коэффициентов A , B , C , ..., при которых сумма

$$\sum_{i=0}^n V^2 \theta^2(x_i) = \sum_{i=0}^n [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \dots + \psi_m(x_i)]^2 \theta^2(x_i)$$

имеет наименьшую величину, мы для определения их, по известному приему дифференциального исчисления, находим такие уравнения:

$$2 \sum_{i=0}^n [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \dots + \psi_m(x_i)] \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=0}^n [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \dots + \psi_m(x_i)] \psi_1(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=0}^n [A\psi_0(x_i) + B\psi_1(x_i) + C\psi_2(x_i) + \dots + \psi_m(x_i)] \psi_2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

...

что, вследствие (5), дает

$$2A \sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2B \sum_{i=0}^n \psi_1^2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2C \sum_{i=0}^n \psi_2^2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

...

откуда выходит

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad \dots$$

Итак, наименьшая величина суммы $\sum_{i=0}^n V^2 \theta^2(x_i)$, при V вида

$$A\phi_0(x) + B\phi_1(x) + C\phi_2(x) + \dots + \phi_m(x),$$

соответствует

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad \dots,$$

и, следовательно,

$$V = \phi_m(x).$$

Также нетрудно показать, что, употребляя формулу (6),

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_1(X) + \dots + \\ & + \frac{\sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_m(X) \end{aligned}$$

для определения по приближению какой-либо функции $F(X)$, мы получаем для выражения ее такую целую функцию степени m , которая от всех других той же степени отличается наименьшею величиною суммы квадратов ее разностей с $F(X)$ при $X = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, умноженных на $\theta^2(x_0), \theta^2(x_1), \theta^2(x_2), \dots$

В самом деле, представляя искомую функцию под видом

$$A\phi_0(X) + B\phi_1(X) + C\phi_2(X) + \dots + H\phi_m(X)$$

и отыскивая значение коэффициентов $A, B, C, \dots, H$, при которых сумма

$$\sum_{i=0}^n [F(x_i) - A\phi_0(x_i) - B\phi_1(x_i) - C\phi_2(x_i) - \dots - H\phi_m(x_i)]^2 \theta^2(x_i)$$

имеет наименьшую величину, мы находим уравнения

$$2 \sum_{i=0}^n [F(x_i) - A\phi_0(x_i) - B\phi_1(x_i) - C\phi_2(x_i) - \dots - H\phi_m(x_i)] \phi_0(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=0}^n [F(x_i) - A\phi_0(x_i) - B\phi_1(x_i) - C\phi_2(x_i) \dots - H\phi_m(x_i)] \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=0}^n [F(x_i) - A\phi_0(x_i) - B\phi_1(x_i) - C\phi_2(x_i) \dots - H\phi_m(x_i)] \phi_2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

.....

$$2 \sum_{i=0}^n [F(x_i) - A\phi_0(x_i) - B\phi_1(x_i) - C\phi_2(x_i) \dots - H\phi_m(x_i)] \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

которые, по (5), приводятся к такому виду:

$$2 \sum_{i=0}^n F(x_i) \psi_0(x_i) \theta^2(x_i) - 2A \sum_{i=0}^n \psi_0^2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=0}^n F(x_i) \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) - 2B \sum_{i=0}^n \phi_1^2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

$$2 \sum_{i=0}^n F(x_i) \phi_2(x_i) \eta^2(x_i) - 2C \sum_{i=0}^n \phi_2^2(x_i) \eta^2(x_i) = 0,$$

.....

$$2 \sum_{i=0}^n F(x_i) \psi_m(x_i) \theta^2(x_i) - 2H \sum_{i=0}^n \psi_m^2(x_i) \theta^2(x_i) = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)},$$

$$B = \frac{\sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)},$$

$$C = \frac{\sum_{i=0}^n \phi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_2^2(x_i) \theta^2(x_i)},$$

• • • • •

$$H = \frac{\sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)}.$$

Внося же эти величины в формулу

$$A\phi_0(X) + B\phi_1(X) + C\phi_2(X) + \dots + H\phi_m(X),$$

находим, согласно со сказанным выше, что искомое выражение функции $F(X)$ есть следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_0^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_0(X) + \frac{\sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_1^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_1(X) + \\ & + \frac{\sum_{i=0}^n \phi_2(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_2^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_2(X) + \dots + \frac{\sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \theta^2(x_i) F(x_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_m^2(x_i) \theta^2(x_i)} \phi_m(X). \end{aligned}$$

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В мемуаре „О непрерывных дробях“ * я дал ряд, представляющий окончательный результат параболического интерполирования по *способу наименьших квадратов*. Так как этот ряд прямо дает выражение интерполируемой функции в форме полинома с коэффициентами, наиболее вероятными, и без определения наперед числа его членов, то понятно, что в теоретическом отношении он не оставляет ничего более желать для параболического интерполирования. Но чтобы сделать его вполне применимым на практике, оставалось указать удобный путь, которого следует держаться при вычислении отдельных членов. Это было нами сделано для простейшего случая, когда значения переменной, соответствующие известным значениям интерполируемой функции, суть равноотстоящие. Разбирая этот частный случай в заметке „Об одном новом ряде“ **, мы показали приведение нашего ряда к следующей формуле, очень удобной для приложений:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{n} \sum u_i \varphi_0(z) + \frac{3}{n(n^2-1^2)} \sum \frac{i}{1} \frac{n-i}{1} \Delta u_i \varphi_1(z) + \\
 & + \frac{5}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)} \sum \frac{l(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1 \cdot 2} \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_i \varphi_2(z) + \\
 & + \frac{7}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)} \sum \frac{i(i+1)(i+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \\
 & \times \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_i \varphi_3(z) + \dots
 \end{aligned}$$

* См. стр. 256—286.— *Ред.*

** См. Полн. собр. соч., М.—Л., АН СССР, 1945, т. II, стр. 237—239.— *Ред.*

где

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

обозначают данные значения u , соответствующие равноотстоящим значениям x

$$x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

и где принято для сокращения

$$z = \frac{x - \frac{1}{2}(x_1 + x_n)}{x_2 - x_1}.$$

В этом ряде знаки суммирований распространяются на все значения i от $i=1$ до $i=n$, и

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \dots$$

суть целые функции от z , выводимые из формулы

$$\Delta^l \left(z + \frac{n-1}{2} \right) \left(z + \frac{n-3}{2} \right) \dots \left(z + \frac{n-2l+1}{2} \right) \left(z - \frac{n+1}{2} \right) \times \\ \times \left(z - \frac{n+3}{2} \right) \dots \left(z - \frac{n+2l-1}{2} \right),$$

в которой нужно l давать значения

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Так как эти функции связаны между собою уравнением

$$\varphi_l(z) = 2(2l-1)z\varphi_{l-1}(z) - (l-1)^2[n^2 - (l-1)^2]\varphi_{l-2}(z)$$

и так как

$$\varphi_0(z) = \Delta^0 1 = 1, \\ \varphi_1(z) = \Delta \left(z + \frac{n+1}{2} \right) \left(z - \frac{n+1}{2} \right) = 2z,$$

то тотчас находим

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= 12z^2 - (n^2 - 1), \\ \varphi_3(z) &= 120z^3 - 6(3n^2 - 7)z, \\ \varphi_4(z) &= 1680z^4 - 120(3n^2 - 13)z^2 + 9(n^2 - 1)(n^2 - 9), \\ \varphi_5(z) &= 30240z^5 - 8400(n^2 - 7)z^3 + 30(15n^4 - 230n^2 + 407)z, \\ &\dots \end{aligned}$$

Это разложение u , которое вытекает из нашего ряда, как скоро

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

будут величины равноотстоящие, весьма удобно для вычисления выражения u ввиду того, что его члены, подобно членам интерполяционной формулы Ньютона, содержат разности

$$\Delta u_i, \Delta^2 u_i, \Delta^3 u_i, \dots$$

возрастающих порядков, а эти разности под знаками суммирования сопровождаются только множителями

$$\begin{aligned} & \frac{i}{1}, \quad \frac{n-i}{1}, \\ & \frac{i(i+1)}{1 \cdot 2}, \quad \frac{(n-i)(n-i-1)}{1 \cdot 2}, \\ & \frac{i(i+1)(i+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ & \dots \end{aligned}$$

которые, по известному свойству многоугольных чисел, вычисляются легко путем простого сложения. А так как этот ряд дает нам выражения u с коэффициентами наиболее вероятными, то понятно, что он ничего не оставляет желать для интерполирования в частном случае, когда значения независимой переменной, соответствующие данным значениям функции, суть равноотстоящие.

Но это не единственная выгода, которую можно извлечь из нашего ряда для приложений; его употребление весьма полезно во всех других случаях параболического интерполирования, как мы теперь покажем, указав путь, который легко приводит к последовательному определению его членов. При этом видно будет, что наш ряд доставляет очень удобное средство для вычисления почленно выражения интерполируемой функции u ; в то же время он дает сумму квадратов разностей между известными ее значениями

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

и теми, которые следуют из совокупности найденных членов для ее

выражения, из чего тотчас получается средняя ошибка, с которой найденные члены u представляют данные ее значения, а через это сейчас узнаем тот, на котором можно будет остановиться. Таким образом, при помощи нашего ряда найдутся сразу и число членов u , которые важны для интерполирования, и их коэффициенты, определенные по способу наименьших квадратов. Чтобы дать понятие превосходство этого способа интерполирования над теми, которые обыкновенно употребляются, заметим, что он с большею легкостью дает совершенно те же результаты, какие получаются через решение уравнений, доставляемых способом наименьших квадратов, который предполагает, что число членов в выражении u наперед определено. С другой стороны, определяя и число членов, которые нужно вычислить, и их значения, предписываемые способом наименьших квадратов, он будет, кроме некоторых исключительных случаев, быстрее способа интерполирования Коши, который далек от того, чтобы давать результаты наиболее вероятные, вытекающие из способа наименьших квадратов.

§ I

На основании того, что мы показали в упомянутом выше мемуаре, если данные значения функции u

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n,$$

соответствующие

$$x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

содержат погрешности одинакового рода, и ищется ее выражение по способу наименьших квадратов в виде полинома какой угодно степени, мы будем иметь *

$$u = K_0 \phi_0(x) + K_1 \phi_1(x) + K_2 \phi_2(x) + \dots,$$

где

$$K_0, K_1, K_2, \dots$$

* Мы заимствуем из нашего прежнего мемуара только вид этого ряда; все же, что важно для его применения, будет дано здесь.

суть постоянные коэффициенты, а

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$$

знаменатели подходящих дробей суммы

$$\sum \frac{1}{x-x_i} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \dots + \frac{1}{x-x_n},$$

которые находятся из ее разложения в непрерывную дробь

$$\frac{\alpha_1}{q_1} + \frac{\alpha_2}{q_2} + \frac{\alpha_3}{q_3} + \dots$$

В этой дроби постоянные

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

могут быть выбраны произвольно. Для определенности мы предположим, что они выбраны так, что коэффициенты при x в неполных частных

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

равны единице, и обозначим через

$$\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \dots$$

значения

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots,$$

удовлетворяющие этому условию. На основании этого, а также замечая, что знаменатели

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

будут функции первой степени, мы будем иметь для определения функций

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$$

такое разложение суммы

$$\sum \frac{1}{x-x_i}$$

в непрерывную дробь:

$$\sum \frac{1}{x - x_i} = \frac{a_1}{x - b_1} - \frac{a_2}{x - b_2} - \frac{a_3}{x - b_3} - \dots$$

Отсюда получим для вычисления ее подходящих дробей

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}, \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \dots, \frac{\varphi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(x)}, \dots,$$

следующие формулы:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 1, & \varphi_0(x) &= 0, \\ \psi_1(x) &= x - b_1, & \varphi_1(x) &= a_1, \\ \psi_2(x) &= (x - b_2)\psi_1(x) - a_2\psi_0(x), & \varphi_2(x) &= (x - b_2)\varphi_1(x) - a_2\varphi_0(x), \\ &\dots & & \\ \psi_\lambda(x) &= (x - b_\lambda)\psi_{\lambda-1}(x) - a_\lambda\psi_{\lambda-2}(x), & \varphi_\lambda(x) &= (x - b_\lambda)\varphi_{\lambda-1}(x) - a_\lambda\varphi_{\lambda-2}(x), \end{aligned} \quad (1)$$

при помощи которых, полагая

$$\begin{aligned} \psi_0(x) \sum \frac{1}{x - x_i} - \varphi_0(x) &= R_0, \\ \psi_1(x) \sum \frac{1}{x - x_i} - \varphi_1(x) &= R_1, \\ \psi_2(x) \sum \frac{1}{x - x_i} - \varphi_2(x) &= R_2, \\ &\dots \\ \psi_\lambda(x) \sum \frac{1}{x - x_i} - \varphi_\lambda(x) &= R_\lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

получим для функций

$$R_0, R_1, R_2, \dots, R_\lambda$$

такой ряд уравнений:

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum \frac{1}{x - x_i}, \\ R_1 &= (x - b_1)R_0 - a_1, \\ R_2 &= (x - b_2)R_1 - a_2R_0, \\ &\dots \\ R_\lambda &= (x - b_\lambda)R_{\lambda-1} - a_\lambda R_{\lambda-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Именно при помощи этих формул мы и достигнем определения всех количеств, которые необходимы для вычисления членов нашего ряда.

§ II

Так как подходящие дроби

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}, \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \dots, \frac{\varphi_\mu(x)}{\psi_\mu(x)}, \frac{\varphi_{\mu+1}(x)}{\psi_{\mu+1}(x)}, \dots$$

непрерывной дроби

$$\frac{a_1}{x-b_1} - \frac{a_2}{x-b_2} - \frac{a_3}{x-b_3} - \dots,$$

которая получается от разложения суммы

$$\sum \frac{1}{x-x_i},$$

имеют знаменателями функции

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_\mu(x), \psi_{\mu+1}(x), \dots$$

соответственно степеней

$$0, 1, 2, \dots, \mu, \mu+1, \dots,$$

то дробь

$$\frac{\varphi_\mu(x)}{\psi_\mu(x)}$$

представит значение суммы

$$\sum \frac{1}{x-x_i}$$

с точностью до $\frac{1}{x^{2\mu}}$ и, следовательно, разность

$$\sum \frac{1}{x-x_i} - \frac{\varphi_\mu(x)}{\psi_\mu(x)}$$

будет степени низшей — 2μ . Но так как функция $\psi_\mu(x)$ степени μ , то

дает нам

$$\frac{\sum x_i^0}{x} + \frac{\sum x_i}{x^2} + \frac{\sum x_i^2}{x^3} + \dots = \frac{(0, 0)}{x} + \frac{(0, 1)}{x^2} + \frac{(0, 2)}{x^3} + \dots,$$

откуда следует

$$(0, 0) = \sum x_i^0, \quad (0, 1) = \sum x_i, \quad (0, 2) = \sum x_i^2, \dots$$

Из второй получим, приравнявая коэффициенты одинаковых степеней x ,

$$\begin{aligned} 0 &= (0, 0) - a_1, & 0 &= (0, 1) - b_1(0, 0), & (1, 1) &= (0, 2) - b_1(0, 1), \\ (1, 2) &= (0, 3) - b_1(0, 2), & (1, 3) &= (0, 4) - b_1(0, 3), \dots \end{aligned}$$

что доставляет

$$a_1 = (0, 0), \quad b_1 = \frac{(0, 1)}{(0, 0)},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) &= (0, 2) - b_1(0, 1), \quad (1, 2) = (0, 3) - b_1(0, 2), \quad (1, 3) = \\ &= (0, 4) - b_1(0, 3), \dots \end{aligned}$$

Поступая точно так же со всеми прочими формулами, увидим, что вообще, в случае $\lambda > 1$, количества a_λ и b_λ определяются так:

$$a_\lambda = \frac{(\lambda - 1, \lambda - 1)}{(\lambda - 2, \lambda - 2)}, \quad b_\lambda = \frac{(\lambda - 1, \lambda)}{(\lambda - 1, \lambda - 1)} - \frac{(\lambda - 2, \lambda - 1)}{(\lambda - 2, \lambda - 2)}$$

и что все количества

$$(\lambda, \lambda), (\lambda, \lambda + 1), (\lambda, \lambda + 2), \dots,$$

в зависимости от

$$\begin{aligned} &(\lambda - 2, \lambda - 2), (\lambda - 2, \lambda - 1), (\lambda - 2, \lambda), \dots, \\ &(\lambda - 1, \lambda - 1), (\lambda - 1, \lambda), (\lambda - 1, \lambda + 1), \dots \end{aligned}$$

содержатся в такой формуле:

$$(\lambda, \mu) = (\lambda - 1, \mu + 1) - b_\lambda(\lambda - 1, \mu) - (\lambda - 2, \mu),$$

Таким образом последовательно найдутся количества

$$\begin{array}{cc} a_1, & b_1, \\ a_2, & b_2, \\ a_3, & b_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

а при помощи этих количеств, по (1), легко получатся функции

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots,$$

которые входят в состав членов нашего ряда.

§ IV

Переходя к определению коэффициентов нашего ряда, мы покажем, что, в силу формул (2) и (4), будет

$$\sum x_i^\mu \psi_\lambda(x_i) = 0, \quad (5)$$

если $\mu < \lambda$, и

$$\sum x_i^\mu \psi_\lambda(x_i) = (\lambda, \mu), \quad (6)$$

если $\mu \geq \lambda$.

Чтобы прийти к этому, заметим, что по (2)

$$R_\lambda = \sum \frac{\psi_\lambda(x)}{x - x_i} - \varphi_\lambda(x),$$

и так как остаток от деления $\psi_\lambda(x)$ на $x - x_i$ равен $\psi_\lambda(x_i)$, то эта формула приводится к следующей:

$$R_\lambda = \sum \left[F(x, x_i) + \frac{\psi_\lambda(x_i)}{x - x_i} \right] - \varphi_\lambda(x),$$

где $F(x, x_i)$ есть целая функция, получающаяся в частном при делении $\psi_\lambda(x)$ на $x - x_i$. Если же разбить сумму

$$\sum \left[F(x, x_i) + \frac{\psi_\lambda(x_i)}{x - x_i} \right]$$

на две части

$$\sum F(x, x_i), \quad \sum \frac{\psi_\lambda(x_i)}{x - x_i}$$

и разложить в сумме

$$\sum \frac{\phi_\lambda(x_i)}{x - x_i}$$

дробь

$$\frac{1}{x - x_i}$$

в ряд

$$\frac{1}{x} + \frac{x_i}{x^2} + \frac{x_i^2}{x^3} + \dots,$$

то эта формула даст нам

$$R_\lambda = \sum F(x, x_i) - \varphi_\lambda(x) + \frac{\sum \phi_\lambda(x_i)}{x} + \frac{\sum x_i \phi_\lambda(x_i)}{x^2} + \frac{\sum x_i^2 \phi_\lambda(x_i)}{x^3} + \dots,$$

что предполагает, по (4), тождество таких двух рядов:

$$\begin{aligned} \sum F(x, x_i) - \varphi_\lambda(x) + \frac{\sum \phi_\lambda(x_i)}{x} + \frac{\sum x_i \phi_\lambda(x_i)}{x^2} + \frac{\sum x_i^2 \phi_\lambda(x_i)}{x^3} + \dots, \\ \frac{(\lambda, \lambda)}{x^{\lambda+1}} + \frac{(\lambda, \lambda+1)}{x^{\lambda+2}} + \frac{(\lambda, \lambda+2)}{x^{\lambda+3}} + \dots \end{aligned}$$

Но так как

$$\sum F(x, x_i), \quad \varphi_\lambda(x)$$

суть целые функции, то может это быть не иначе, как только тогда, когда члены с знаменателями

$$x, x^2, x^3, \dots, x^\lambda, x^{\lambda+1}, x^{\lambda+2}, \dots$$

в этих двух рядах соответственно равны. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum \phi_\lambda(x_i) = 0, \quad \sum x_i \phi_\lambda(x_i) = 0, \quad \sum x_i^2 \phi_\lambda(x_i) = 0, \quad \dots, \quad \sum x_i^{\lambda-1} \phi_\lambda(x_i) = 0, \\ \sum x_i^\lambda \phi_\lambda(x_i) = (\lambda, \lambda), \quad \sum x_i^{\lambda+1} \phi_\lambda(x_i) = (\lambda, \lambda+1), \quad \dots, \end{aligned}$$

что и доказывает уравнения (5) и (6).

На основании этого легко определить коэффициенты

$$K_0, K_1, K_2, \dots$$

ряда

$$u = K_0 \phi_0(x) + K_1 \phi_1(x) + K_2 \phi_2(x) + \dots$$

Для этого помножим ряд на x_i^μ , где μ — какое угодно число, и просуммируем его члены для всех значений

$$x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

Мы получим таким способом

$$\sum x_i^\mu u_i = K_0 \sum x_i^\mu \phi_0(x_i) + K_1 \sum x_i^\mu \phi_1(x_i) + K_2 \sum x_i^\mu \phi_2(x_i) + \dots,$$

где u_i представляет значение u , соответствующее $x = x_i$; а так как, в силу (5) и (6), будет

$$\begin{aligned} \sum x_i^\mu \phi_0(x_i) &= (0, \mu), & \sum x_i^\mu \phi_1(x_i) &= (1, \mu), & \dots, & \sum x_i^\mu \phi_\mu(x_i) &= (\mu, \mu), \\ \sum x_i^\mu \phi_{\mu+1}(x_i) &= 0, & \sum x_i^\mu \phi_{\mu+2}(x_i) &= 0 & \sum x_i^\mu \phi_{\mu+3}(x_i) &= 0, & \dots, \end{aligned}$$

то отсюда следует

$$\sum x_i^\mu u_i = (0, \mu) K_0 + (1, \mu) K_1 + \dots + (\mu - 1, \mu) K_{\mu-1} + (\mu, \mu) K_\mu.$$

Отсюда для определения коэффициента K_μ посредством коэффициентов $K_0, K_1, \dots, K_{\mu-1}$ получается такая очень простая формула:

$$K_\mu = \frac{\sum x_i^\mu u_i - (0, \mu) K_0 - (1, \mu) K_1 - \dots - (\mu - 1, \mu) K_{\mu-1}}{(\mu, \mu)}.$$

Давая здесь значку μ значения $0, 1, 2, 3, \dots$, получим для последовательного определения коэффициентов

$$K_0, K_1, K_2, K_3, \dots$$

такой ряд уравнений:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{\sum u_i}{(0, 0)}, \\ K_1 &= \frac{\sum x_i u_i - (0, 1) K_0}{(1, 1)}, \\ K_2 &= \frac{\sum x_i^2 u_i - (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1}{(2, 2)}, \\ K_3 &= \frac{\sum x_i^3 u_i - (0, 3) K_0 - (1, 3) K_1 - (2, 3) K_2}{(3, 3)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

§ V

Нам остается доказать, каким образом легче всего находится сумма квадратов разностей между данными значениями u

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n,$$

соответствующими

$$x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

и теми, которые получаются для тех же значений x с помощью нашего ряда, остановленного на члене $K_\lambda \phi_\lambda(x)$, где λ — какое угодно число.

Чтобы прийти к этому, покажем, что должно быть

$$\sum \phi_\mu(x_i) \phi_\nu(x_i) = 0 \quad (7)$$

пока $\nu < \mu$ и

$$\sum \phi_\mu(x_i) \phi_\nu(x_i) = (\mu, \mu) \quad (8)$$

в случае $\mu = \nu$.

В самом деле, на основании (1), функция $\phi_\nu(x)$ будет такого вида:

$$x^\nu + A_1 x^{\nu-1} + A_2 x^{\nu-2} + \dots,$$

и, следовательно, мы будем иметь

$$\sum \phi_\mu(x_i) \phi_\nu(x_i) = \sum x_i^\nu \phi_\mu(x_i) + A_1 \sum x_i^{\nu-1} \phi_\mu(x_i) + A_2 \sum x_i^{\nu-2} \phi_\mu(x_i) + \dots \quad (9)$$

Но, в силу (5), в случае $\nu < \mu$ все суммы

$$\sum x_i^\nu \phi_\mu(x_i), \quad \sum x_i^{\nu-1} \phi_\mu(x_i), \quad \sum x_i^{\nu-2} \phi_\mu(x_i), \quad \dots$$

приводятся к нулю, и через это, по предыдущей формуле, найдем

$$\sum \phi_\mu(x_i) \phi_\nu(x_i) = 0,$$

что доказывает уравнение (7).

Точно так же в случае

$$\mu = \nu$$

мы найдем, по (5) и (6), что сумма

$$\sum x_i^\nu \phi_\mu(x_i)$$

равна (μ, μ) и что суммы

$$\sum x_i^{\nu-1} \phi_{\mu}(x_i), \quad \sum x_i^{\nu-2} \phi_{\mu}(x_i), \quad \dots$$

обращаются в нуль, в силу чего для $\mu = \nu$ формула (9) дает нам уравнение (8)

$$\sum \phi_{\mu}(x_i) \phi_{\nu}(x_i) = (\mu, \mu).$$

С помощью уравнений (7) и (8), которые мы только что доказали легко показать, что всегда будет

$$\sum u_i \phi_{\mu}(x_i) = (\mu, \mu) K_{\mu}. \quad (10)$$

Чтобы в этом убедиться, заметим, что ряд наш

$$u = K_0 \phi_0(x) + K_1 \phi_1(x) + K_2 \phi_2(x) + \dots,$$

продолженный до последнего члена, представляет точно все данные значения u

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n,$$

а поэтому должно быть

$$\begin{aligned} \sum u_i \phi_{\mu}(x_i) &= K_0 \sum \phi_0(x_i) \phi_{\mu}(x_i) + K_1 \sum \phi_1(x_i) \phi_{\mu}(x_i) + \\ &+ K_2 \sum \phi_2(x_i) \phi_{\mu}(x_i) + \dots \end{aligned}$$

Но по (7) суммы

$$\begin{aligned} \sum \phi_0(x_i) \phi_{\mu}(x_i), \quad \sum \phi_1(x_i) \phi_{\mu}(x_i), \quad \dots, \quad \sum \phi_{\mu-1}(x_i) \phi_{\mu}(x_i), \\ \sum \phi_{\mu+1}(x_i) \phi_{\mu}(x_i), \quad \dots \end{aligned}$$

обращаются в нуль, и по (8) находим

$$\sum \phi_{\mu}(x_i) \phi_{\mu}(x_i) = (\mu, \mu).$$

Следовательно, предыдущее разложение $\sum u_i \phi_{\mu}(x_i)$ приведет к одному члену

$$(\mu, \mu) K_{\mu},$$

что нам и дает уравнение (10).

Но по (10) мы будем иметь

$$\sum u_i \phi_0(x_i) = (0, 0) K_0, \quad \sum u_i \phi_1(x_i) = (1, 1) K_1, \quad \sum u_i \phi_2(x_i) = (2, 2) K_2, \dots,$$

а по (7) и (8)

$$\begin{aligned} \sum \phi_0(x_i) \phi_0(x_i) &= (0, 0), & \sum \phi_1(x_i) \phi_1(x_i) &= (1, 1), & \sum \phi_2(x_i) \phi_2(x_i) &= (2, 2), \dots, \\ \sum \phi_1(x_i) \phi_0(x_i) &= 0, & \sum \phi_2(x_i) \phi_0(x_i) &= 0, & \dots, \\ \sum \phi_0(x_i) \phi_1(x_i) &= 0, & \sum \phi_2(x_i) \phi_1(x_i) &= 0, & \dots, \\ \sum \phi_0(x_i) \phi_2(x_i) &= 0, & \sum \phi_1(x_i) \phi_2(x_i) &= 0, & \dots, \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

в силу чего предыдущая формула обращается в такую:

$$\begin{aligned} & \sum [u_i - K_0 \phi_0(x_i) - K_1 \phi_1(x_i) - K_2 \phi_2(x_i) - \dots - K_\lambda \phi_\lambda(x_i)]^2 = \\ &= \sum u_i^2 - 2(0, 0) K_0^2 - 2(1, 1) K_1^2 - 2(2, 2) K_2^2 - \dots - 2(\lambda, \lambda) K_\lambda^2 + \\ & \quad + (0, 0) K_0^2 + (1, 1) K_1^2 + (2, 2) K_2^2 + \dots + (\lambda, \lambda) K_\lambda^2 \end{aligned}$$

и затем приводится к следующей:

$$\begin{aligned} & \sum [u_i - K_0 \phi_0(x_i) - K_1 \phi_1(x) - K_2 \phi_2(x_i) - \dots - K_\lambda \phi_\lambda(x_i)]^2 = \\ &= \sum u_i^2 - (0, 0) K_0^2 - (1, 1) K_1^2 - (2, 2) K_2^2 - \dots - (\lambda, \lambda) K_\lambda^2. \end{aligned}$$

Такова формула, дающая сумму квадратов разностей между данными значениями u и вычисленными с помощью ряда

$$u = K_0 \phi_0(x) + K_1 \phi_1(x) + K_2 \phi_2(x) + \dots,$$

остановленного на члене $K_\lambda \phi_\lambda(x)$. Изображая для краткости эту сумму через

$$\sum d_\gamma^2,$$

мы будем иметь

$$\sum d_\lambda^2 = \sum u_i^2 - (0, 0) K_0^2 - (1, 1) K_1^2 - (2, 2) K_2^2 - \dots - (\lambda, \lambda) K_\lambda^2,$$

откуда для последовательного определения сумм

$$\sum d_0^2, \quad \sum d_1^2, \quad \sum d_2^2, \quad \dots,$$

которые соответствуют по порядку случаям, когда наш ряд останавливается на членах 1, 2, 3, ..., получается такой ряд уравнений:

$$\begin{aligned}\sum d_0^2 &= \sum u_1^2 - (0, 0) K_0^2, \\ \sum d_1^2 &= \sum d_0^2 - (1, 1) K_1^2, \\ \sum d_2^2 &= \sum d_1^2 - (2, 2) K_2^2, \\ &\dots\end{aligned}$$

§ VI

Сопоставим теперь все окончательные формулы, с помощью которых вычисляется почленно выражение u на основании ряда

$$u = K_0 \phi_0(x) + K_1 \phi_1(x) + K_2 \phi_2(x) + \dots$$

и определяется в то же время сумма квадратов погрешностей в представлении данных значений u , когда останавливаемся на членах 1, 2, 3, ..., λ .

В этих формулах, согласно употребленному нами обозначению, данные значения функции u и независимой переменной x представляются через

$$\begin{aligned}u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.\end{aligned}$$

Суммирования распространяются на все значения указателя i от $i=1$ до $i=n$, и $\sum d_\lambda^2$ обозначает сумму квадратов погрешностей в представлении данных значений u нашим рядом, остановленным на члене $K_\lambda \phi_\lambda(x)$; из этой суммы находится средняя ошибка по формуле

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum d_\lambda^2}.$$

Формулы, относящиеся к определению члена $K_0 \phi_0(x)$:

$$\begin{aligned}(0, 0) &= \sum x_i^0 = n, \\ K_0 &= \frac{\sum u_i}{(0, 0)}, \\ \phi_0(x) &= 1, \\ \sum d_0^2 &= \sum u_i^2 - (0, 0) K_0^2.\end{aligned}$$

Формулы, относящиеся к определению члена $K_1\phi_1(x)$:

$$\begin{aligned}(0, 1) &= \sum x_i, & (0, 2) &= \sum x_i^2, \\ a_1 &= (0, 0) \\ b_1 &= \frac{(0, 1)}{(0, 0)}, & (1, 1) &= (0, 2) - b_1(0, 1), \\ K_1 &= \frac{\sum x_i u_i - (0, 1) K_0}{(1, 1)}, \\ \phi_1(x) &= x - b_1, \\ \sum d_1^2 &= \sum d_0^2 - (1, 1) K_1^2.\end{aligned}$$

Формулы, относящиеся к определению члена $K_2\phi_2(x)$:

$$\begin{aligned}(0, 3) &= \sum x_i^3, & (0, 4) &= \sum x_i^4, \\ (1, 2) &= (0, 3) - b_1(0, 2), & (1, 3) &= (0, 4) - b_1(0, 3), \\ a_2 &= \frac{(1, 1)}{(0, 0)}, \\ b_2 &= \frac{(1, 2)}{(1, 1)} - \frac{(0, 1)}{(0, 0)}, & (2, 2) &= (1, 3) - b_2(1, 2) - a_2(0, 2) \\ K_2 &= \frac{\sum x_i^2 u_i - (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1}{(2, 2)}, \\ \phi_2(x) &= (x - b_2)\phi_1(x) - a_2\phi_0(x), \\ \sum d_2^2 &= \sum d_1^2 - (2, 2) K_2^2. \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Формулы, относящиеся к определению члена $K_\lambda\phi_\lambda(x)$:

$$\begin{aligned}(0, 2\lambda - 1) &= \sum x_i^{2\lambda - 1}, & (0, 2\lambda) &= \sum x_i^{2\lambda}, \\ (1, 2\lambda - 2) &= (0, 2\lambda - 1) - b_1(0, 2\lambda - 2), & (1, 2\lambda - 1) &= (0, 2\lambda) - \\ && &- b_1(0, 2\lambda - 1), \\ (2, 2\lambda - 3) &= (1, 2\lambda - 2) - b_2(1, 2\lambda - 3) - a_2(0, 2\lambda - 3), & (2, 2\lambda - 2) &= \\ &= (1, 2\lambda - 1) - b_2(1, 2\lambda - 2) - a_2(0, 2\lambda - 2), \\ (3, 2\lambda - 4) &= (2, 2\lambda - 3) - b_3(2, 2\lambda - 4) - a_3(1, 2\lambda - 4), & (3, 2\lambda - 3) &= \\ &= (2, 2\lambda - 2) - b_3(2, 2\lambda - 3) - a_3(1, 2\lambda - 3) \\ &\dots\dots\dots \\ (\lambda - 1, \lambda) &= (\lambda - 2, \lambda + 1) - b_{\lambda - 1}(\lambda - 2, \lambda) - a_{\lambda - 1}(\lambda - 3, \lambda), \\ (\lambda - 1, \lambda + 1) &= (\lambda - 2, \lambda + 2) - b_{\lambda - 1}(\lambda - 2, \lambda + 1) - a_{\lambda - 1}(\lambda - 3, \lambda + 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_\lambda &= \frac{(\lambda - 1, \lambda - 1)}{(\lambda - 2, \lambda - 2)}, \\
b_\lambda &= \frac{(\lambda - 1, \lambda)}{(\lambda - 1, \lambda - 1)} - \frac{(\lambda - 2, \lambda - 1)}{(\lambda - 2, \lambda - 2)}, \quad (\lambda, \lambda) = (\lambda - 1, \lambda + 1) - b_\lambda (\lambda - 1, \lambda) - \\
&\quad - a_\lambda (\lambda - 2, \lambda), \\
K_\lambda &= \frac{\sum x_i^\lambda u_i - (0, \lambda) K_0 - (1, \lambda) K_1 - (2, \lambda) K_2 - \dots - (\lambda - 1, \lambda) K_{\lambda-1}}{(\lambda, \lambda)}, \\
\phi_\lambda(x) &= (x - b_\lambda) \phi_{\lambda-1}(x) - a_\lambda \phi_{\lambda-2}(x), \\
\sum d_\lambda^2 &= \sum d_{\lambda-1}^2 - (\lambda, \lambda) K_\lambda^2.
\end{aligned}$$

§ VII

Формулы, которые мы только что дали для последовательного определения членов

$$K_0 \phi_0(x), \quad K_1 \phi_1(x), \quad K_2 \phi_2(x), \dots, \quad K_\lambda \phi_\lambda(x)$$

в разложении u по нашему ряду и для вычисления в то же время суммы квадратов погрешностей, с которыми найденные члены u представляют все данные значения, доставляют нам способ параболического интерполирования, важный во многих отношениях. В силу замечательного свойства нашего ряда, этот способ дает выражение u в форме полинома с коэффициентами наиболее вероятными. Без предварительного задания числа его членов мы их найдем по этому способу последовательно один за другим, и вместе с тем по сумме квадратов погрешностей, с которыми найденные члены u представляют данные значения (которая дает сразу среднюю ошибку их представления), узнаем, на котором члене можно остановиться. Сверх того, легко видеть из состава наших формул, что, когда число данных значений u и число членов его выражения значительны, в нашем способе интерполирования вычисления *менее продолжительны*, чем в употребляемых в настоящее время.

Эта продолжительность вычислений происходит почти всецело благодаря различным *умножениям и делениям*, число которых возрастает более или менее быстро с числом данных значений u и также с числом членов в его выражении. В этом-то отношении мы и покажем преимущества нашего способа интерполирования, оставляя в стороне *сложения и вычитания*, которые при выполнении этих вычислений немного

значат, и по отношению к которым точно так же легко можно обнаружить выгоду нашего способа.

Чтобы найти с помощью наших формул выражение u с $\lambda + 1$ членами, нужно вычислить $3\lambda + 1$ сумм

$$\begin{array}{ccccccc} \sum x_i, & \sum x_i^2, & \sum x_i^3, & \dots, & \sum x_i^{2\lambda}, \\ \sum u_i, & \sum x_i u_i, & \sum x_i^2 u_i, & \dots, & \sum x_i^\lambda u_i, \end{array}$$

и с помощью этих сумм отыскивать члены

$$K_0\phi_0(x), \quad K_1\phi_1(x), \quad K_2\phi_2(x), \quad \dots, \quad K_\lambda\phi_\lambda(x).$$

На основании того, что мы видели, приводя их к окончательному виду

$$A + Bx + Cx^2 + \dots,$$

придется сделать не более как $4\lambda^2 + 2$ умножений или делений.

Но если искать это выражение u , как обыкновенно, по способу наименьших квадратов, приходится вычислять те же суммы

$$\begin{array}{ccccccc} \sum x_i, & \sum x_i^2, & \sum x_i^3, & \dots, & \sum x_i^{2\lambda}, \\ \sum u_i, & \sum x_i u_i, & \sum x_i^2 u_i, & \dots, & \sum x_i^\lambda u_i \end{array}$$

для составления уравнений, определяющих коэффициенты u , а при решении этих уравнений с $\lambda + 1$ неизвестными приходится иметь дело с умножениями и делениями, число которых растет с возрастанием λ , как известно, гораздо быстрее, чем $4\lambda^2 + 2$.

По способу Коши для отыскивания в разложении u членов

$$A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^\lambda$$

нужно при $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ вычислить много функций, степени которых достигают λ , и составить их суммы, называемые подчиненными (subordonnées). А это требует, очевидно, гораздо более умножений, чем сколько их нужно для вычисления сумм

$$\begin{array}{ccccccc} \sum x_i, & \sum x_i^2, & \sum x_i^3, & \dots, & \sum x_i^{2\lambda}, \\ \sum u_i, & \sum x_i u_i, & \sum x_i^2 u_i, & \dots, & \sum x_i^\lambda u_i, \end{array}$$

которые представляются при вычислении нашего ряда, а также чтобы найти сумму

$$\sum u_i^2,$$

входящую в определение сумм

$$\sum d_0^2, \sum d_1^2, \sum d_2^2, \dots,$$

по которым в нашем способе узнается число членов, важных для интерполирования.

С другой стороны, чтобы найти функции, заключающиеся в подчиненных суммах, и чтобы вычислить их коэффициенты $A, B, C, \dots, H$ в выражении

$$u = A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^\lambda,$$

в способе Коши необходимо выполнить много умножений и делений, общее число которых с возрастанием λ растет быстрее, чем $4\lambda^2 + \lambda + 3$, число тех же действий, которые представляются, когда по нашему способу по значениям сумм

$$\begin{aligned} & \sum x_i, \sum x_i^2, \sum x_i^3, \dots, \sum x_i^{2\lambda}, \\ & \sum u_i, \sum x_i u_i, \sum x_i^2 u_i, \dots, \sum x_i^\lambda u_i, \sum u_i^2, \end{aligned}$$

ищутся $\lambda + 1$ членов и определяются последовательно суммы

$$\sum d_0^2, \sum d_1^2, \sum d_2^2, \dots, \sum d_\lambda^2.$$

Отсюда несомненно, что по числу действий способ Коши далеко не столь прост, как тот, который вытекает из нашего ряда. Но так как многие из этих действий в способе Коши упрощаются более и более, по мере того как увеличивается сходимость ряда

$$u = A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^\lambda,$$

то нет сомнения, что встречаются частные случаи, когда этот способ будет быстрее нашего.

§ VIII

Чтобы показать на примере употребление нашего способа интерполирования, мы приложим его к такому ряду значений x и u *:

$x_1 = 0,15411$	$u_1 = 19,47$
$x_2 = 0,19516$	$u_2 = 21,83$
$x_3 = 0,22143$	$u_3 = 23,11$
$x_4 = 0,28802$	$u_4 = 26,11$
$x_5 = 0,32808$	$u_5 = 27,60$
$x_6 = 0,38183$	$u_6 = 28,89$
$x_7 = 0,45517$	$u_7 = 33,17$
$x_8 = 0,57012$	$u_8 = 33,38$
$x_9 = 0,75930$	$u_9 = 32,31$
$x_{10} = 0,91075$	$u_{10} = 31,88$
$x_{11} = 1,13895$	$u_{11} = 25,46$

Пробуя выразить одним членом

$$K_0 \phi_0(x),$$

возьмем

$$(0, 0) = \sum x_i^0 = 11,$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 19,47 \\ u_2 &= 21,83 \\ u_3 &= 21,11 \\ u_4 &= 26,11 \\ u_5 &= 27,60 \\ u_6 &= 28,89 \\ u_7 &= 33,17 \\ u_8 &= 33,38 \\ u_9 &= 32,31 \\ u_{10} &= 31,88 \\ u_{11} &= 25,46 \end{aligned}$$

$$\sum u_i = 303,21$$

* Эти значения представляют результаты первой серии наблюдений г. Мари-Деви над сопротивлением при перемене проводников, которые он дает в своем мемуаре, озаглавленном „Recherches expérimentales sur l'électricité voltaïque (Ann. de chimie et de physique, III serie, XIX). Через x мы обозначаем обратную величину напряжения тока, приведенную к одной сотой части ее, а через u сопротивление.

$$K_0 = \frac{\sum u_i}{(0, 0)} = 27,5645,$$

$$\phi_0(x) = 1,$$

что дает с точностью до 0,001

$$K_0 \phi_0(x) = 27,564.$$

Чтобы найти сумму квадратов погрешностей, с которыми найденный член представляет данные значения, делаем следующие вычисления:

$$\begin{array}{r} u_1^2 = 379,08 \\ u_2^2 = 476,55 \\ u_3^2 = 534,07 \\ u_4^2 = 681,73 \\ u_5^2 = 761,76 \\ u_6^2 = 834,63 \\ u_7^2 = 1100,25 \\ u_8^2 = 1114,22 \\ u_9^2 = 1043,94 \\ u_{10}^2 = 1016,33 \\ u_{11}^2 = 648,21 \\ \hline \sum u_i^2 = 8590,77 \\ - (0, 0) K_0^2 = - 8357,84 \\ \hline \sum d_0^2 = \sum u_i^2 - (0, 0) K_0^2 = 232,93, \end{array}$$

что дает для средней ошибки

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum d_0^2} = \sqrt{\frac{232,93}{11}} = 4,6.$$

Замечая на основании этого недостаточность выражения u одним членом

$$K_0 \phi_0(x),$$

станем искать второй член

$$K_1 \phi_1(x)$$

и для этого вычислим последовательно

$$\begin{aligned}(0, 1) &= \sum x_i, & (0, 2) &= \sum x_i^2, \\ a_1 &= (0, 0), & b_1 &= \frac{(0, 1)}{(0, 0)}, \\ (1, 1) &= (0, 2) - b_1 (0, 1) \\ \sum x_i u_i, & \sum x_i u_i - (0, 1) K_0, \\ K_1 &= \frac{\sum x_i u_i - (0, 1) K_0}{(1, 1)}, \quad \phi_1(x),\end{aligned}$$

как ниже следует:

$x_1 = 0,15411$	$x_1^2 = 0,02375$
$x_2 = 0,19516$	$x_2^2 = 0,03809$
$x_3 = 0,22143$	$x_3^2 = 0,04903$
$x_4 = 0,28802$	$x_4^2 = 0,08295$
$x_5 = 0,32808$	$x_5^2 = 0,10764$
$x_6 = 0,38183$	$x_6^2 = 0,14579$
$x_7 = 0,45517$	$x_7^2 = 0,20718$
$x_8 = 0,57012$	$x_8^2 = 0,32504$
$x_9 = 0,75930$	$x_9^2 = 0,57654$
$x_{10} = 0,91075$	$x_{10}^2 = 0,82947$
$x_{11} = 1,13895$	$x_{11}^2 = 1,29721$

$$(0, 1) = \sum x_i = 5,40292$$

$$a_1 = (0, 0) = 11$$

$$b_1 = \frac{(0, 1)}{(0, 0)} = 0,49117$$

$$(0, 2) = \sum x_i^2 = 3,68269$$

$$- b_1 (0, 1) = - 2,65378$$

$$(1, 1) = (0, 2) - b_1 (0, 1) = 1,02891$$

$$x_1 u_1 = 3,00052$$

$$x_2 u_2 = 4,26034$$

$$x_3 u_3 = 5,11725$$

$$x_4 u_4 = 7,52020$$

$$x_5 u_5 = 9,05501$$

$$x_6 u_6 = 11,03105$$

$$x_7 u_7 = 15,09799$$

$$\begin{aligned}
x_8 u_8 &= 19,03060 \\
x_9 u_9 &= 24,53298 \\
x_{10} u_{10} &= 29,03471 \\
x_{11} u_{11} &= 28,99767 \\
\hline
\sum x_i u_i &= 156,67832 \\
- (0, 1) K_0 &= -148,92903 \\
\hline
\sum x_i u_i - (0, 1) K_0 &= 7,74929 \\
K_1 &= \frac{\sum x_i u_i - (0, 1) K_0}{(1, 1)} = 7,5315 \\
\phi_1(x) &= x - b_1 = x - 0,49117
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$K_1 \phi_1(x) = 7,5315(x - 0,49117) = 7,532x - 3,699.$$

Переходя к определению $\sum d_1^2$, возьмем

$$\begin{aligned}
\sum d_0^2 &= 232,93 \\
- (1, 1) K_1^2 &= -58,37 \\
\hline
\sum d_1^2 &= \sum d_0^2 - (1, 1) K_1^2 = 174,56
\end{aligned}$$

откуда для средней ошибки представления данных значений u двумя найденными членами его получается

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum d_1^2} = \sqrt{\frac{174,56}{11}} = 3,98.$$

Так как столь значительная средняя ошибка недопустима, то будем искать третий член

$$K_2 \phi_2(x)$$

и для этого определим последовательно количества

$$\begin{aligned}
(0, 3) &= \sum x_i^3, & (0, 4) &= \sum x_i^4. \\
(1, 2) &= (0, 3) - b_1(0, 2), & (1, 3) &= (0, 4) - b_1(0, 3). \\
a_2 &= \frac{(1, 1)}{(0, 0)}, & b_2 &= \frac{(1, 2)}{(1, 1)} - \frac{(0, 1)}{(0, 0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2, 2) &= (1, 3) - b_2 (1, 2) - a_2 (0, 2), \\
 \sum x_i^2 u_i, \quad \sum x_i^2 u_i &- (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1, \\
 K_2 &= \frac{\sum x_i^2 u_i - (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1}{(2, 2)}
 \end{aligned}$$

и функцию $\psi_2(x)$ следующим образом:

$$x_1^3 = 0,00367$$

$$x_2^3 = 0,00743$$

$$x_3^3 = 0,01086$$

$$x_4^3 = 0,02389$$

$$x_5^3 = 0,03531$$

$$x_6^3 = 0,05567$$

$$x_7^3 = 0,09430$$

$$x_8^3 = 0,18531$$

$$x_9^3 = 0,43776$$

$$x_{10}^3 = 0,75544$$

$$x_{11}^3 = 1,47745$$

$$x_1^4 = 0,00056$$

$$x_2^4 = 0,00145$$

$$x_3^4 = 0,00240$$

$$x_4^4 = 0,00688$$

$$x_5^4 = 0,01158$$

$$x_6^4 = 0,02126$$

$$x_7^4 = 0,04292$$

$$x_8^4 = 0,10565$$

$$x_9^4 = 0,33240$$

$$x_{10}^4 = 0,68801$$

$$x_{11}^4 = 1,68275$$

$$\begin{aligned}
 (0, 3) &= \sum x_i^3 = 3,08709 \\
 - b_2 (0, 2) &= -1,80884
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (0, 4) &= \sum x_i^4 = 2,89586 \\
 - b_1 (0, 3) &= -1,51630
 \end{aligned}$$

$$(1, 2) = (0, 3) - b_1 (0, 2) = 1,27825$$

$$(1, 3) = (0, 4) - b_1 (0, 3) = 1,37956$$

$$a_2 = \frac{(1, 1)}{(0, 0)} = 0,09354$$

$$- b_1 (1, 2) = -0,96020$$

$$\frac{(1, 2)}{(1, 1)} = 1,24235$$

$$- a_2 (0, 2) = -0,34446$$

$$- \frac{(0, 1)}{(0, 0)} = -0,49117$$

$$\begin{aligned}
 (2, 2) &= (1, 3) - b_2 (1, 2) - \\
 - a_2 (0, 2) &= 0,07490
 \end{aligned}$$

$$b_2 = \frac{(1, 2)}{(1, 1)} - \frac{(0, 1)}{(0, 0)} = 0,75118$$

$$x_1^2 u_1 = 0,46241$$

$$x_2^2 u_2 = 0,83145$$

$$x_3^2 u_3 = 1,13311$$

$$x_4^2 u_4 = 2,16596$$

$$x_5^2 u_5 = 2,97075$$

$$x_6^2 u_6 = 4,21199$$

$$x_7^2 u_7 = 6,87215$$

$$x_8^2 u_8 = 10,84949$$

$$x_9^2 u_9 = 18,62790$$

$$x_{10}^2 u_{10} = 26,44337$$

$$x_{11}^2 u_{11} = 33,02691$$

$$\sum x_i^2 u_i = 107,59549$$

$$- (0, 2) K_0 = - 101,51151$$

$$- (1, 2) K_1 = - 9,62778$$

$$\sum x_i^2 u_i - (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1 = - 3,54380$$

$$K_2 = \frac{\sum x_i^2 u_i - (0, 2) K_0 - (1, 2) K_1}{(2, 2)} = - 47,313,$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= (x - b_2) \phi_1(x) - a_2 = (x - 0,75118)(x - 0,49117) - 0,09354 = \\ &= x^2 - 1,24235x + 0,27542. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} [K_2 \phi_2(x)] &= - 47,313(x^2 - 1,24235x + 0,27542) = \\ &= - 47,313x^2 + 58,779x - 13,031, \end{aligned}$$

а так как

$$\begin{aligned} \sum d_1^2 &= 174,56, \\ - (2, 2) K_2^2 &= - 167,64, \\ \hline \sum d_2^2 &= \sum d_1^2 - (2, 2) K_2^2 = 6,92, \end{aligned}$$

то для средней ошибки находим

$$E = \sqrt{\frac{1}{n} \sum d_2^2} = \sqrt{\frac{6,92}{11}} = 0,79.$$

Продолжая так поступать, будем получать выражение и член за членом, и через это средняя ошибка в представлении данных значений и будет все более и более приближаться к нулю. Но если сочтем

достаточным свести эту ошибку к 0,79, то остановимся на найденных членах

$$\begin{aligned}K_0\phi_0(x) &= 27,564, \\K_1\phi_1(x) &= 7,532x - 3,699, \\K_2\phi_2(x) &= -47,313x^2 + 58,779x - 13,031,\end{aligned}$$

вследствие чего для искомого выражения u будем иметь

$$\begin{array}{r}+ 27,564 \\- 3,699 + 7,532x \\- 13,031 + 58,779x - 47,313x^2 \\ \hline u = 10,834 + 66,311x - 47,313x^2.\end{array}$$

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ В СЛУЧАЕ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ДАННЫХ, ДОСТАВЛЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Когда число данных значений превышает число членов, сохраняемых в их выражении, интерполирование может быть выполнено различными способами. Но в каждом отдельном случае эти способы далеко не одинаково удобны; они отличаются друг от друга либо большей либо меньшей продолжительностью вычислений, либо величиной средней погрешности, которой следует опасаться, если дело идет об интерполировании значений, доставляемых наблюдениями и, следовательно, заключающих погрешности. Так как нельзя выиграть слишком много в одном отношении без того, чтобы не потерять в другом, то невозможно дать способ интерполирования, который был бы вообще предпочтительнее всех других, ибо, смотря по обстоятельствам, приходится заботиться преимущественно об упрощении вычислений или о точности результатов. Если известно только небольшое число значений интерполируемой функции, то представляется мало средств ослабить влияние погрешностей на искомый результат; тогда важно извлечь из данных интерполирования все, что возможно, для уменьшения возможной средней погрешности, что можно сделать только по *способу наименьших квадратов*.

В противном случае значительное число данных, имеющихся в нашем распоряжении, избавляет нас от необходимости прибегать к способу наименьших квадратов, требующему слишком длинных вычислений. Тогда для упрощения численных выкладок можно пожертвовать более или менее значительной частью того, что можно извлечь из данных значений для повышения точности искомого результата. В мемуаре

„О непрерывных дробях“, представленном Академии Наук в 1855 г. *, мы изложили параболическое интерполирование по способу наименьших квадратов и получили ряд, дающий непосредственно результаты такого интерполирования, как мы видели, если число известных значений интерполируемой функции довольно мало. Мы покажем в настоящем мемуаре, как по нашим способам получаются и другие формулы интерполирования, которые могут с выгодой заменить только что упомянутую, когда ее приложение, по причине большого числа данных значений, с одной стороны, перестает быть важным, а с другой стороны, становится неудобоприменимым. Из числа различных частных случаев, которые может представить интерполирование сообразно с бóльшим или меньшим числом данных значений, мы ограничимся рассмотрением того, который будет пределом всех других: именно когда число данных значений бесконечно. Хотя в действительности это число всегда не бесконечно, но формулы, получаемые при таком предположении, могут быть все же полезны в приложении, потому что они представляют предел, к которому сходятся очень быстро результаты интерполирования по мере того, как это число возрастает, и в каждом частном случае нетрудно видеть, какую степень точности могут доставлять все формулы в зависимости от данных значений.

I

§ 1. Начнем с изложения решения задачи, которая послужит основой нашим изысканиям.

Задача. Дан ряд значений $F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$, соответствующих равноотстоящим и очень близким между собою значениям x ; сочетать значения $F(x)$ исключительно путем сложения и вычитания так, чтобы окончательный результат содержал член с коэффициентом A_i и чтобы этот член был по возможности наибольшим.

Решение. Пусть

$$F(x_1), \quad F(x_2), \quad \dots, \quad F(x_i)$$

данные значения функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n.$$

* См. стр. 256—286.— *Ред.*

Предполагая, что

$$\begin{aligned} & F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_\sigma), \\ & F(x_{\sigma+\sigma'+1}), F(x_{\sigma+\sigma'+2}), \dots, F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}), \\ & \dots \end{aligned}$$

суть значения $F(x)$, взятые со знаком $+$, а

$$\begin{aligned} & F(x_{\sigma+1}), F(x_{\sigma+2}), \dots, F(x_{\sigma+\sigma'}), \\ & F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+1}), F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+2}), \dots, F(x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''}), \\ & \dots \end{aligned}$$

суть значения, которые будут взяты со знаком $-$, находим, что искомое сочетание значений

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_i)$$

выражается формулой

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma} F(x_{\mu}) - \sum_{\mu=\sigma+1}^{\sigma+\sigma'} F(x_{\mu}) + \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+1}^{\sigma+\sigma'+\sigma''} F(x_{\mu}) - \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''+1}^{\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''} F(x_{\mu}) + \dots$$

Значения

$$x_1, x_2, \dots, x_i,$$

по предположению, равноотстоящие, а поэтому это выражение, если не принимать во внимание постоянного множителя, нисколько не изменяющего искомого решения, равно

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{\sigma} F(x_{\mu})(x_{\mu+1} - x_{\mu}) - \sum_{\mu=\sigma+1}^{\sigma+\sigma'} F(x_{\mu})(x_{\mu+1} - x_{\mu}) + \\ & + \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+1}^{\sigma+\sigma'+\sigma''} F(x_{\mu})(x_{\mu+1} - x_{\mu}) - \sum_{\mu=\sigma+\sigma'+\sigma''+1}^{\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''} F(x_{\mu})(x_{\mu+1} - x_{\mu}) + \dots, \end{aligned}$$

что обращается в

$$\int_{x_1}^{x_{\sigma}} F(x) dx - \int_{x_{\sigma}}^{x_{\sigma+\sigma'}} F(x) dx + \int_{x_{\sigma+\sigma'}}^{x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}} F(x) dx - \int_{x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}}^{x_{\sigma+\sigma'+\sigma''+\sigma'''}} F(x) dx + \dots$$

при значениях

$$x_1, x_2, \dots, x_i$$

очень близких между собой.

А если положить

$$x_{\sigma} = \eta_1, \quad x_{\sigma+\sigma'} = \eta_2, \quad x_{\sigma+\sigma'+\sigma''} = \eta_3, \dots$$

и обозначить через a и b крайние значения x в ряду

$$x_1, x_2, \dots, x_i$$

и через ν число значений

$$x_{\sigma}, x_{\sigma+\sigma'}, x_{\sigma+\sigma'+\sigma''}, \dots,$$

то предыдущее выражение может быть представлено так:

$$\int_a^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu}}^b F(x) dx.$$

Поэтому наша задача сводится к определению количеств

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu}$$

под условием, что для

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$$

имеем

$$\int_a^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu}}^b F(x) dx = s A_l \quad (1)$$

и что множитель s по возможности наибольший, предполагая, разумеется, что, по смыслу задачи, числа

$$a, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu}, b$$

представляют ряд возрастающий.

§ 2. Чтобы извлечь отсюда уравнения, относящиеся к $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu}$, заметим, что формула (1), при

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n,$$

[illegible]

Отсюда, в силу уравнений (4), (5), полагая для сокращения

$$\begin{aligned} s' &= a^{n+2} - 2r_1^{n+2} + 2r_2^{n+2} - \dots + 2(-1)^n r_n^{n+2} - (-1)^n b^{n+2}, \\ s'' &= a^{n+3} - 2r_1^{n+3} + 2r_2^{n+3} - \dots + 2(-1)^n r_n^{n+3} - (-1)^n b^{n+3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-a} - \frac{2}{x-\eta_1} + \frac{2}{x-\eta_2} - \dots + \frac{2(-1)^n}{x-\eta_n} - \frac{(-1)^n}{x-b} = \\ = -\frac{(l+1)s}{x^{l+2}} + \frac{s'}{x^{n+3}} + \frac{s''}{x^{n+4}} + \dots \end{aligned}$$

С другой стороны, полагая

$$\begin{aligned} (x - \eta_1)(x - \eta_3) \dots &= \varphi(x), \\ (x - \eta_2)(x - \eta_4) \dots &= \psi(x), \end{aligned} \quad (6)$$

находим

$$\frac{1}{x - \eta_1} + \frac{1}{x - \eta_3} + \dots = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{1}{x - \eta_2} + \frac{1}{x - \eta_4} + \dots = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

а поэтому предыдущее уравнение дает

$$\frac{1}{x-a} - \frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{2\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{(-1)^n}{x-b} = -\frac{(l+1)s}{x^{l+2}} + \frac{s'}{x^{n+3}} + \frac{s''}{x^{n+4}} + \dots$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$\log(x-a) - 2\log\varphi(x) + 2\log\psi(x) - (-1)^n \log(x-b) = \log C + \\ + \frac{s}{x^{l+1}} - \frac{s'}{(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{(n+3)x^{n+3}} + \dots,$$

или, что то же самое,

$$\frac{(x-a)\psi^2(x)}{(x-b)(-1)^n\varphi^2(x)} = Ce^{\frac{s}{x^{l+1}} - \frac{s'}{(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{(n+3)x^{n+3}} - \dots}.$$

По составу функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ видно, что высшая степень x в разложении дроби

$$\frac{(x-a)\psi^2(x)}{(x-b)(-1)^n\varphi^2(x)}$$

будет иметь коэффициентом 1, а так как первый член разложения

$$Ce^{\frac{s}{x^{l+1}} - \frac{s'}{(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{(n+3)x^{n+3}} - \dots}$$

равен C , то предыдущее уравнение требует

$$C=1$$

и обращается тогда в такое:

$$\frac{(x-a)\psi^2(x)}{(x-b)(-1)^n\varphi^2(x)} = e^{\frac{s}{x^{l+1}} - \frac{s'}{(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{(n+3)x^{n+3}} - \dots},$$

что дает нам

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sqrt{\frac{(x-b)(-1)^n}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}} - \frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \dots} \quad (7)$$

Именно посредством этой формулы мы и найдем коэффициент s в уравнении (1)

$$\int_a^{\tau_{i1}} F(x) dx - \int_{\tau_{i1}}^{\tau_{i2}} F(x) dx + \int_{\tau_{i2}}^{\tau_{i3}} F(x) dx - \dots + (-1)^v \int_{\tau_{iv}}^b F(x) dx = sA_i$$

и функции

$$\varphi(x), \psi(x),$$

которые, по (6), определяют количества

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu.$$

Но чтобы этого достичь, мы должны рассмотреть отдельно случаи, когда n — четное и когда n — нечетное.

Число n — четное

§ 4. В случае, когда n — четное, уравнение (7) становится

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}} - \frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \dots$$

Отсюда получается

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}} = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}} \left(e^{-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \dots} - 1 \right),$$

а так как выражение

$$e^{-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \dots} - 1,$$

разложенное в ряд, содержит x только в степенях ниже $-(n+1)$, то отсюда следует, что дробь

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

есть величина $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$ точная до $\frac{1}{x^{n+2}}$. С другой стороны, так как n число четное, функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, определяемые формулами (6), имеют степень $\frac{n}{2}$, и в этом случае дробь $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ не может выражать величину

$$\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$$

с точностью до $\frac{1}{x^{n+2}}$, если только она не равна одной из подходящих дробей непрерывной дроби, получающейся при разложении $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$.
 Сверх того, так как эта подходящая дробь должна представлять $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$ с точностью до $\frac{1}{x^{n+2}}$ и так как ее знаменатель не будет иметь степени выше $\varphi(x)$ или $x^{n/2}$, то следующая за ней подходящая дробь должна иметь знаменатель степени выше $\frac{n}{2} + 1$. Отсюда видно, что между подходящими дробями непрерывной дроби, получающейся из $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, дробь, которая определяет величину $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, будет последнею со знаменателем степени низшей $\frac{n}{2} + 1$. Поэтому, как только узнаем величину s , найдется и дробь $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, а отсюда — функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$, освобожденные от их общего делителя. Но, принимая во внимание состав формул (1), (4), (5), (6), видим, что все общие множители функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ дают только значения $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ попарно равные, а такие значения $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ в формулах (1), (4), (5) доставляют только члены, тождественно равные нулю.

Таким образом, удостоверяемся, что, обозначая через

$$\frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}}$$

последнюю из подходящих дробей $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, знаменатель которой имеет степень ниже $\frac{n}{2} + 1$, и откидывая общие множители функций $\psi(x)$, $\varphi(x)$, не имеющие никакого влияния на состав наших окончательных формул, будем иметь

$$\psi(x) = C_0 P_{n/2}, \quad \varphi(x) = C_0 Q_{n/2},$$

где C_0 — постоянное количество, а отсюда, в силу (6), количества

$$\begin{aligned} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots \end{aligned}$$

определяются решением уравнений

$$\begin{aligned} Q_{n/2} &= 0, \\ P_{n/2} &= 0. \end{aligned}$$

Так как количества

$$\begin{aligned} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots \end{aligned}$$

составляют возрастающий ряд, то, располагая корни уравнений

$$Q_{n/2} = 0, \quad P_{n/2} = 0$$

по величине, найдем два ряда членов, соответственно равных

$$\begin{aligned} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots \end{aligned}$$

§ 5. На основании показанного легко найдем количества $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots$, как только узнаем величину постоянной s , которая входит в

выражение $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$. Определением этой постоянной мы и займемся.

Обозначая через $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}}$ ту из подходящих дробей непрерывной

дроби, получающейся из $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, которая следует непосредственно за $\frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, находим, что разность

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}} = \frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}} - \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$$

того же порядка, как и выражение

$$\frac{1}{Q_{n/2} \cdot Q_{\frac{n}{2}+1}}.$$

Но мы видели, что дробь $\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}$ должна представлять величину $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$ с точностью до $\frac{1}{x^{n+2}}$, следовательно, это выражение не может быть степени выше $-(n+2)$, а потому функция $Q_{\frac{n}{2}+1}$, знаменатель подходящей дроби, следующей за $\frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}} = \frac{\phi(x)}{\varphi(x)}$, должна быть степени высшей, нежели $\frac{x^{n+1}}{Q_{n/2}}$. В силу этого можно всегда найти все значения s , удовлетворяющие нашим уравнениям.

В самом деле, так как степень знаменателя дроби

$$\frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}} = \frac{\phi(x)}{\varphi(x)}$$

не выше $n/2$, то степень выражения $\frac{x^{n+2}}{Q_{n/2}}$ может быть только выше $\frac{n}{2} + 1$.

Следовательно, за подходящей дробью

$$\frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}} = \frac{\phi(x)}{\varphi(x)},$$

со знаменателем степени низшей $\frac{n}{2} + 1$, будет непосредственно сле-

довать дробь $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}}$, где степень знаменателя выше $\frac{n}{2} + 1$. Отсюда

видно, что непрерывная дробь, получающаяся из разложения

$\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$, не будет иметь подходящей дроби со знаменателем степени $\frac{n}{2} + 1$. Но если найти все значения s , при которых выражение

$$\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}$$

обладает этим свойством*, то, рассматривая каждое из них в отдельности, отметим те, которые согласно показанному нами относительно дроби $\frac{P_{\frac{n}{2}+1}}{Q_{\frac{n}{2}+1}}$, делают степень $Q_{\frac{n}{2}+1}$ выше степени $\frac{x^{n+1}}{Q_{n/2}}$.

Таким образом нам удастся определить значения s , соответствующие всем возможным решениям наших уравнений. Чтобы выбрать между ними значение s , решающее нашу задачу, исключим все те, которые ведут к несобственным решениям, т. е. к таким, для которых значения

$$a, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots, b,$$

противно смыслу нашей задачи, не все вещественны или не представляют возрастающего ряда. После этого значение s , численно наибольшее между остающимися, будет соответствовать, очевидно, искомому решению нашей задачи, в которой надо сделать количество

$$s = -\frac{1}{l+1} [a^{l+1} - 2\eta_1^{l+1} + 2\eta_2^{l+1} - \dots - (-1)^v b^{l+1}]$$

возможно наибольшим.

Следуя указанным путем, найдем окончательное значение, решающее нашу задачу и, как мы видели, определяющее все другие неизвестные в формуле

$$\int_a^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots + (-1)^v \int_{\eta_v}^b F(x) dx = sA.$$

Но во многих частных случаях определение s значительно упрощается, потому что часто ряд значений, между которыми будем отыски-

* В мемуаре, озаглавленном «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций» (см. стр. 462—578.— *Ред.*), мы показали путь для нахождения значений постоянной, определяемой условием подобного рода.

вать то, которое решает нашу задачу, приводится к одному члену, который и будет только искомым значением s . Заметим еще, что во всех этих изысканиях можно откинуть мнимые значения s , которые не соответствуют смыслу задачи.

Число n — нечетное

§ 6. В этом случае формула (7) становится

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{V(x-a)(x-b)} e^{\frac{s}{2x^{l+1}} - \frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \dots},$$

что дает нам

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)} = \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)} \left(e^{-\frac{s'}{2(n+2)x^{n+2}} - \frac{s''}{2(n+3)x^{n+3}} - \dots} - 1 \right).$$

Эта формула доказывает, что дробь

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

отличается от выражения

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)}$$

только членами порядка низшего $\frac{1}{x^{n+2}}$, а так как, по (6), при n нечетном, находим, что $\varphi(x)$, знаменатель этой дроби, степени $\frac{n+1}{2}$, то это предполагает, что она равна одной из подходящих дробей непрерывной дроби, получаемой через разложение выражения

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)}.$$

Сверх того, обозначая через

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$$

ту из подходящих дробей непрерывной дроби, получающейся из

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)}, \text{ которая равна } \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}, \text{ а через}$$

$$\frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}}$$

подходящую дробь, следующую непосредственно за $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$, находим,

что разность

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)} = \frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} - \frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)}$$

той же степени, как и

$$\frac{1}{Q_{\frac{n+1}{2}} Q_{\frac{n+3}{2}}},$$

откуда, на основании замеченного нами относительно разности

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \frac{e^{\frac{n}{2x^{l+1}}}}{V(x-a)(x-b)},$$

вытекает, что функция $Q_{\frac{n+3}{2}}$ должна быть степени высшей, чем $\frac{x^{n+2}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$.

Но, так как $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$ равняется дроби $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, представленной в простейшем

виде, и так как степень $\varphi(x)$ не выше $\frac{n+1}{2}$, это доказывает, что степень $Q_{\frac{n+3}{2}}$ будет выше $\frac{n+3}{2}$. Отсюда видно, что за подходящей дробью

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

знаменатель которой степени не выше $\frac{n+1}{2}$, непосредственно следует подходящая дробь

$$\frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}}$$

со знаменателем степени выше $\frac{n+3}{2}$. Итак, между подходящими дробями непрерывной дроби, получающейся из выражения

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{l+1}}}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}},$$

дробь

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

будет последней со знаменателем степени низшей или равной $\frac{n+1}{2}$.

А на основании только что показанного относительно подходящих дробей

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}, \quad \frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}},$$

тем же путем, как и в § 4 и 5, приходим относительно определения количеств

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots, S,$$

когда n — нечетное, к таким заключениям:

1) Количества

$$\begin{aligned} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots \end{aligned}$$

суть корни уравнений

$$Q_{\frac{n+1}{2}} = 0, \quad P_{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

где $P_{\frac{n+1}{2}}$, $Q_{\frac{n+1}{2}}$ означают члены *последней* подходящей дроби для непрерывной дроби, получаемой при разложении

$$\frac{\frac{s}{e^{2x^l+1}}}{V(x-a)(x-b)},$$

степень знаменателя которой $Q_{\frac{n+1}{2}}$ по большей мере равна $\frac{n+1}{2}$.

2) Значение s надо искать между значениями, не дающими для непрерывной дроби, происходящей через разложение выражения

$$\frac{\frac{s}{e^{2x^l+1}}}{V(x-a)(x-b)},$$

такой подходящей дроби, знаменатель которой был бы степени $\frac{n+3}{2}$.

Из ряда значений s , обладающих этим свойством, следует исключить прежде всего те значения, при которых подходящая дробь $\frac{P_{\frac{n+3}{2}}}{Q_{\frac{n+3}{2}}}$, сле-

дующая за $\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, имеет знаменателем функцию степени низшей,

чем $\frac{x^{n+3}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$, а затем все те, которые дают числа

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots,$$

не отвечающие нашей задаче (см. § 2). Из оставшихся значений численно наибольшее будет равно искомому значению s . Мнимые значения s оставляются без внимания.

II

§ 7. Чтобы показать употребление изложенных способов, будем отыскивать коэффициенты функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n,$$

когда

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Для упрощения вычислений предположим, что данные значения $F(x)$ заключены между $x = -h$ и $x = +h$, или, что то же, возьмем в наших формулах

$$a = -h, \quad b = +h.$$

При этих значениях a и b , предполагая n четным, заметим (§ 4, 5), что определение коэффициента A_0 связано с разложением выражения

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$$

в непрерывную дробь. По обыкновенному способу легко находим, что непрерывная дробь, получающаяся из этого выражения, имеет следующую величину:

$$1 + \frac{s-2h}{2x+h-\frac{1}{2}s} + \frac{(s-2h)^3+32h^3}{24(s-2h)x} + \frac{s^6-12hs^5+60h^2s^4-720h^4s^2-2880h^5s+2880h^6}{10[(s-2h)^3+32h^3]x+\dots}$$

Рассматривая состав этой непрерывной дроби, видим, что ее три первые частных не перестают быть первой степени, а следовательно, дают подходящие дроби со знаменателями соответственно степени

0, 1, 2, 3, пока количества

$$\begin{aligned} & s - 2h, \\ & (s - 2h)^3 + 32h^3, \\ & s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 \end{aligned}$$

отличны от нуля. Для того чтобы это не имело места, количество s должно удовлетворять по крайней мере одному из таких уравнений

$$\begin{aligned} & s - 2h = 0, \\ & (s - 2h)^3 + 32h^3 = 0, \\ & s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, предполагая последовательно, что количество s удовлетворяет одному из этих уравнений, находим, что непрерывная

дробь, получающаяся из $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$ при этих трех предположениях, становится соответственно

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{s^2(s-6h)}{48x^3 + \dots}, \\ & 1 + \frac{s-2h}{2x+h-\frac{s}{2}} + \frac{3s^5-30hs^4+80h^2s^3-240h^4s+480h^5}{1920(s-2h)x^3 + \dots}, \\ & 1 + \frac{s-2h}{2x+h-\frac{s}{2}} + \frac{(s-2h)^3+32h^3}{24(s-2h)x+\frac{0}{x} + \dots}, \end{aligned}$$

откуда для подходящих дробей $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$ получаем

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{48x^3 + \dots}{48x^3 + \dots}, \quad \dots, \quad (8)$$

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s}, \quad \frac{3840(s-2h)x^4 + \dots}{3840(s-2h)x^4 + \dots}, \quad \dots, \quad (9)$$

$$\frac{1}{1}, \frac{2x - h + \frac{1}{2}s}{2x + h - \frac{1}{2}s}, \frac{48(s-2h)x^2 + 12(s-2h)^2x + (s-2h)^3 + 32h^3}{48(s-2h)x^2 - 12(s-2h)^2x + (s-2h)^3 + 32h^3}, \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_5}{q_5}, \dots, \quad (10)$$

обозначая через $\frac{p_4}{q_4}, \frac{p_5}{q_5}, \dots$, подходящие дроби со знаменателем степени высшей 3.

Таким образом нам удастся найти все случаи, когда непрерывная дробь, получающаяся из $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$, не имеет подходящих дробей со знаменателями степеней 1, 2, 3. Поэтому, следуя по пути, указанному в § 4, 5, легко найти решение этой задачи при $n=0, 2, 4$.

Случай $n=0$

§ 8. В этом случае s надо искать среди значений, при которых непрерывная дробь, получаемая разложением $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$, не имеет подходящей со знаменателем степени $\frac{0}{2} + 1 = 1$. А на основании того, что мы видели относительно подходящих дробей $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$, это может быть только в случае, когда

$$s - 2h = 0,$$

и так как это уравнение дает только одно значение s ,

$$s = 2h,$$

то мы заключаем тотчас, что оно решает нашу задачу.

Чтобы найти количества

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots,$$

постараемся найти среди подходящих дробей (8), получаемых при предположении, что

$$s - 2h = 0,$$

такую, которая была бы последней со знаменателем степени низшей $\frac{0}{2} + 1 = 1$. Так как эта дробь $\frac{1}{1}$, то

$$P_{n/2} = 1, \quad Q_{n/2} = 1,$$

откуда видно, что число количеств

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots,$$

определяемых уравнениями

$$P_{n/2} = 0, \quad Q_{n/2} = 0,$$

приводится к 0.

Внося же в формулу (1) найденную величину s и приводя ряд количеств

$$a, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, b$$

к

$$-h, \quad +h,$$

получаем при $n=0$ и $l=0$

$$\int_{-h}^{+h} F(x) dx = 2hA_0.$$

Этому уравнению легко удовлетворить, замечая, что при $n=0$ функция

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

сводится к постоянному.

С л у ч а й $n=2$

§ 9. Если $n=2$, то s будем отыскивать между значениями, при которых непрерывная дробь, получаемая из выражения

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}},$$

не имеет подходящей со знаменателем степени $\frac{2}{2} + 1 = 2$. Но как мы видели в (§ 7), это может быть только в том случае, когда

удовлетворяется одно из уравнений

$$s - 2h = 0, \quad (s - 2h)^3 + 32h^3 = 0. \quad (11)$$

Чтобы выбрать из корней этих уравнений корень, решающий нашу задачу, заметим, что при

$$s - 2h = 0,$$

подходящие к непрерывной дроби, получаемой разложением $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}}$, доставляет по (8) такой ряд:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{48x^3 + \dots}{48x^3 + \dots}, \quad \dots$$

Так как между этими дробями последняя со знаменателем степени низшей $\frac{2}{3} + 1 = 2$ будет $\frac{1}{1}$, то при нашем обозначении, предполагая $s - 2h = 0$, получим

$$Q_{n/2} = 1, \quad Q_{\frac{n}{2}+1} = x^3 + \dots$$

При этих величинах $Q_{n/2}$, $Q_{\frac{n}{2}+1}$ степень $Q_{\frac{n}{2}+1}$ не выше степени $\frac{x^2+1}{Q_{n/2}}$, и потому заключаем (§ 7), что уравнение

$$s - 2h = 0$$

не дает значения s , решающего нашу задачу.

Поэтому остается только искать это значение между корнями последнего из уравнений (11), а так как это уравнение имеет только один вещественный корень

$$s = 2(1 - \sqrt[3]{4})h,$$

то заключаем тотчас, что он и соответствует нашей задаче.

Чтобы найти количества

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots,$$

заметим, что при

$$(s - 2h)^3 + 32h^3 = 0$$

дроби, подходящие к непрерывной, получаемой при разложении

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}},$$

как мы видели (см. (9)), суть

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s}, \quad \frac{3840(s-2h)x^4+\dots}{3840(s-2h)x^4+\dots}, \quad \dots$$

Дробь

$$\frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s}$$

последняя со знаменателем степени ниже $\frac{2}{2}+1=2$, а потому мы заключаем, что будет

$$P_{n/2} = 2x - h + \frac{1}{2}s, \quad Q_{n/2} = 2x + h - \frac{1}{2}s.$$

Поэтому, для определения количеств

$$\begin{array}{l} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots \end{array}$$

получим уравнения

$$Q_{n/2} = 2x + h - \frac{1}{2}s = 0,$$

$$P_{n/2} = 2x - h + \frac{1}{2}s = 0,$$

откуда следует, что

$$\eta_1 = -\frac{h}{2} + \frac{1}{4}s, \quad \eta_2 = \frac{h}{2} - \frac{1}{4}s;$$

внося же сюда найденную величину s , окончательно имеем

$$\eta_1 = -h \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad \eta_2 = +h \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

В силу этих значений

$$s, \eta_1, \eta_2,$$

замечая, что в настоящем случае

$$l=0, \quad a=-h, \quad b=+h,$$

по формуле (1) получим

$$\int_{-h}^{-h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} F(x) dx - \int_{-h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^{+h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} F(x) dx + \int_{+h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^h F(x) dx = 2(1 - \sqrt[3]{4}) h A_0.$$

Случай $n=4$

§ 10. Мы видели (§ 7), что непрерывная дробь, получаемая разложением выражения

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x}},$$

не имеет подходящей со знаменателем третьей степени только в случае, если s удовлетворяет одному из уравнений

$$(s-2h)^3 + 32h^3 = 0, \\ s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0.$$

Поэтому, так как число $\frac{n}{2} + 1$, при $n=4$, становится равным 3, то значение s будем отыскивать (по § 5) среди вещественных корней этих уравнений.

С другой стороны, так как, в предположении

$$(s-2h)^3 + 32h^3 = 0,$$

мы нашли, что подходящие дроби суть

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2x-h+\frac{1}{2}s}{2x+h-\frac{1}{2}s}, \quad \frac{3840(s-2h)x^4+\dots}{3840(s-2h)x^4+\dots}, \quad \dots$$

и что за дробью

$$\frac{2x - h + \frac{1}{2}s}{2x + h - \frac{1}{2}s},$$

последней со знаменателем степени ниже 3, следует дробь

$$\frac{3840(s - 2h)x^4 + \dots}{3840(s - 2h)x^4 + \dots},$$

степень знаменателя которой не выше степени

$$\frac{x^4 + 1}{2x + h - \frac{1}{2}s},$$

то мы заключаем, что уравнение

$$(s - 2h)^3 + 32h^3 = 0$$

не может дать искомого значения s и, следовательно, что таковое надо искать между вещественными корнями уравнения

$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0.$$

Отыскивая же вещественные корни этого уравнения, находим, что один из них заключается между $s = 6h$ и $s = 7h$, а другой — между $s = 0$ и $s = h$. Чтобы узнать, какое из этих значений s относится к нашей задаче, перейдем к рассмотрению соответствующих значений

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

Так как в случае

$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0$$

подходящие к непрерывной дроби, получаемые из

$$\sqrt{\frac{x - h}{x + h}} e^{\frac{s}{2x}},$$

по (10) будут

$$\frac{1}{1}, \frac{2x - h + \frac{1}{2}s}{2x + h - \frac{1}{2}s}, \frac{48(s - 2h)x^2 + 12(s - 2h)^2x + (s - 2h)^3 + 32h^3}{48(s - 2h)x^2 - 12(s - 2h)^2x + (s - 2h)^3 + 32h^3}, \frac{p_4}{q_4}, \dots,$$

и последнею из них со знаменателем ниже $\frac{4}{2} + 1 = 3$ будет

$$\frac{48(s - 2h)x^2 + 12(s - 2h)^2x + (s - 2h)^3 + 32h^3}{48(s - 2h)x^2 - 12(s - 2h)^2x + (s - 2h)^3 + 32h^3},$$

ио для определения

$$\eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots$$

находим уравнения

$$48(s - 2h)x^2 - 12(s - 2h)^2x + (s - 2h)^3 + 32h^3 = 0, \\ 48(s - 2h)x^2 + 12(s - 2h)^2x + (s - 2h)^3 + 32h^3 = 0.$$

Но, нетрудно видеть, что эти уравнения не имеют вовсе вещественного решения, если s превышает $2h$. Отсюда заключаем, что корень уравнения

$$s^6 - 12hs^5 + 60h^2s^4 - 720h^4s^2 - 2880h^5s + 2880h^6 = 0,$$

лежащий между $s = 6h$ и $s = 7h$, не доставляет значений

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots$$

свойственных нашей задаче, и, следовательно, что его другой корень, заключенный между $s = 0$ и $s = h$ и приближенная величина которого $0,83446 h$, соответствует нашей задаче.

Внося эту величину s в уравнения, найденные для определения количеств

$$\eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots,$$

имеем

$$x^2 + 0,29138 hx - 0,54362 h^2 = 0, \\ x^2 - 0,29138 hx - 0,54362 h^2 = 0,$$

а так как корни этих уравнений, расположенные в возрастающем порядке, суть

$$\begin{array}{ll} -0,89725 h, & +0,60587 h, \\ -0,60587 h, & +0,89725 h, \end{array}$$

то мы заключаем, что будет

$$\begin{array}{ll} \eta_1 = -0,89725 h, & \eta_3 = 0,60587 h, \\ \eta_2 = -0,60587 h, & \eta_4 = 0,89725 h. \end{array}$$

Таким образом мы находим значение количеств

$$S, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$$

при $n=4$, когда принято, кроме того,

$$l=0, \quad a=-h, \quad b=+h.$$

Поэтому формула (1) дает

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{-0,89725 h} F(x) dx - \int_{-0,89725 h}^{-0,60587 h} F(x) dx + \int_{-0,60587 h}^{0,60587 h} F(x) dx - \int_{0,60587 h}^{0,89725 h} F(x) dx + \\ & + \int_{0,89725 h}^h F(x) dx = 0,83446 h A_0. \end{aligned}$$

С л у ч а и $n=1, 3, 5$

§ 11. Отыскивая для этих значений n решение нашей задачи, относящейся к определению A_0 , и принимая всегда

$$a=-h, \quad b=+h,$$

приходим окончательно к формулам, тождественным соответственно найденным для

$$n=0, 2, 4,$$

как это можно было предвидеть, замечая, что в формулах

$$\int_{-h}^h F(x) dx = 2h A_0,$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^{-h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} F(x) dx - \int_{-h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^{h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} F(x) dx + \int_{h\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^h F(x) dx = 2(1 - \sqrt[3]{4}) h A_0, \\
& \int_{-h}^{-0,89725 h} F(x) dx - \int_{-0,89725 h}^{-0,60587 h} F(x) dx + \int_{-0,60587 h}^{0,60587 h} F(x) dx - \int_{0,60587 h}^{0,89725 h} F(x) dx + \\
& \quad + \int_{0,89725 h}^h F(x) dx = 0,83446 h A_0
\end{aligned}$$

все члены функции

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$$

с нечетными степенями x исчезают.

§ 12. Отыскивая так же решение нашей задачи при

$$l=1, \quad n=1, 2, 3, 4, 5$$

и предполагая всегда

$$a = -h, \quad b = +h,$$

приходим окончательно к таким формулам:

Случай $n=1$ или 2

$$\int_{-h}^0 F(x) dx - \int_0^h F(x) dx = -h^2 A_1.$$

Случай $n=3$ или 4

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^{-h\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} F(x) dx - \int_{-h\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}^0 F(x) dx + \int_0^{h\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} F(x) dx - \\
& \quad - \int_{h\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}^h F(x) dx = (\sqrt[4]{2} - 1) h^2 A_1.
\end{aligned}$$

Случай $n=5$

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^{-0,91682 h} F(x) dx - \int_{-0,91682 h}^{-0,67418 h} F(x) dx + \int_{-0,67418 h}^0 F(x) dx - \int_0^{0,67418 h} F(x) dx + \\
& + \int_{0,67418 h}^{0,91682 h} F(x) dx - \int_{0,91682 h}^h F(x) dx = -0,82277 h^2 A_1.
\end{aligned}$$

Точно так же при $l=2$ находим, полагая последовательно $n=2, 3, 4, 5$:

Случай $n=2$ или 3

$$\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} F(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} F(x) dx + \int_{\frac{1}{2}h}^h F(x) dx = \frac{1}{2} h^3 A_2.$$

Случай $n=4$ или 5

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^{-0,87305 h} F(x) dx - \int_{-0,87305 h}^{-0,37305 h} F(x) dx + \int_{-0,37305 h}^{0,37305 h} F(x) dx - \int_{0,37305 h}^{0,87305 h} F(x) dx + \\
& + \int_{0,87305 h}^h F(x) dx = -0,15139 h^3 A_2.
\end{aligned}$$

Принимая $l=3$, а $n=3, 4, 5$, мы получаем такие формулы:

Случай $n=3$ или 4

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{1}{2}} h \int_{-h}^{-\sqrt{\frac{1}{2}} h} F(x) dx - \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}} h}^0 F(x) dx + \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}} h} F(x) dx - \\
& - \int_{\sqrt{\frac{1}{2}} h}^h F(x) dx = -\frac{1}{4} h^4 A_3.
\end{aligned}$$

Случай $n=5$

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^{-0,89945 h} F(x) dx - \int_{-0,89945 h}^{-0,55589 h} F(x) dx + \int_{-0,55589 h}^0 F(x) dx - \\
& - \int_0^{0,55589 h} F(x) dx + \int_{0,55589 h}^{0,89945 h} F(x) dx - \int_{0,89945 h}^h F(x) dx = 0,05901 h^4 A_3.
\end{aligned}$$

Случай $l=4$ и $n=4$ дает нам уравнение

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{5}+1}{4} h \int_{-h} F(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{5}+1}{4} h}^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4} h} F(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4} h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4} h} F(x) dx - \int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4} h}^{\frac{\sqrt{5}-1}{4} h} F(x) dx + \\
& + \int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4} h}^h F(x) dx = \frac{1}{8} h^5 A_4.
\end{aligned}$$

Наконец, в случае $l=5$ и $n=5$ получаем такую формулу:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{3}}{2} h \int_{-h} F(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2} h}^{-\frac{1}{2} h} F(x) dx + \int_{-\frac{1}{2} h}^0 F(x) dx - \int_0^{\frac{1}{2} h} F(x) dx + \\
& + \int_{\frac{1}{2} h}^{\frac{\sqrt{3}}{2} h} F(x) dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2} h}^h F(x) dx = -\frac{1}{16} h^6 A_5.
\end{aligned}$$

§ 13. На основании только что найденного легко составить таблицу значений γ , s , η_1 , η_2 , η_3 , η_4 , ... в случаях

$$n=0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

принимая пределами x величины $-h$ и $+h$. Такая таблица помещена в конце нашего мемуара, а в IV разделе увидим, что из нее можно извлечь для интерполирования. Желательно, чтобы эта таблица была продолжена до более значительных величин n .

III

§ 14. В предыдущих параграфах мы дали общий способ для нахождения, согласно нашей задаче, количеств

$$s, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

в формуле

$$\int_a^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots + (-1)^v \int_{\eta_v}^b F(x) dx = sA_l,$$

каков бы ни был коэффициент A_l функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n,$$

которую желаем определить. Мы покажем теперь, что этот способ возможно упростить в частном случае, когда требуется определить A_n , последний коэффициент функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n.$$

Мы увидим, что в этом случае легко найти прямо значения

$$s, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

каково бы ни было число n , а позднее покажем, как можно вывести из этого новую формулу интерполирования.

Для упрощения наших формул будем всегда предполагать

$$a = -h, \quad b = h$$

и начнем со случая, когда n нечетное.

Случай нечетного n

§ 15. Полагая в формулах § 6

$$a = -h, \quad b = +h,$$

находим, что, в случае нечетного n и $l = n$, количества

$$\begin{aligned} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots \end{aligned}$$

определяются уравнениями

$$Q_{\frac{n+1}{2}} = 0, \quad P_{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

где $P_{\frac{n+1}{2}}$ и $Q_{\frac{n+1}{2}}$ — члены последней подходящей к

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2 - h^2}}$$

дроби, знаменатель которой $Q_{\frac{n+1}{2}}$ степени не выше $\frac{n+1}{2}$. С другой стороны, так как выражения

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2 - h^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}}$$

отличаются друг от друга только членами порядка $\frac{1}{x^{n+1}}$ или низших и так как члены этих порядков не имеют никакого влияния на подходящие дроби со знаменателем степеней низших $\frac{n+2}{2}$, то ясно, что при определении по упомянутому способу

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$$

можно брать выражение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}}$$

вместо

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2 - h^2}}.$$

На основании этого легко найти общее выражение функций $P_{\frac{n+1}{2}}$ и $Q_{\frac{n+1}{2}}$, и, чтобы этого достичь, будем искать закон составления непре-

рывной дроби, получаемой через разложение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}}.$$

§ 16. Замечая, что произведение величин

$$x - \sqrt{x^2 - h^2}, \quad x + \sqrt{x^2 - h^2}$$

обращается в h^2 , мы заключаем, что

$$x - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{h^2}{x + \sqrt{x^2 - h^2}},$$

или, что то же самое,

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x = -\frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)},$$

а отсюда посредством последовательных подстановок

$$-\frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)}$$

вместо

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x$$

находим

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - h^2} - x &= \\ &= -\frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)} = \\ &= -\frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)} = \\ &\dots \dots \dots \\ &= -\frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)}, \end{aligned}$$

откуда получается такое разложение в непрерывную дробь:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}} = \frac{1}{x} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

Чтобы найти закон образования подходящих дробей этой непрерывной, которые мы обозначаем через

$$\frac{P(0)}{Q(0)}, \frac{P(1)}{Q(1)}, \frac{P(2)}{Q(2)}, \dots,$$

заметим, что их члены связаны между собой уравнениями

$$\begin{aligned} P^{(m+2)} &= 2x P^{(m+1)} - h^2 P^{(m)}, \\ Q^{(m+2)} &= 2x Q^{(m+1)} - h^2 Q^{(m)}. \end{aligned}$$

Но, рассматривая эти формулы как уравнения с конечными разностями, выводим

$$\begin{aligned} P^{(m)} &= C (x + \sqrt{x^2 - h^2})^m + C_1 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^m, \\ Q^{(m)} &= C_2 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^m + C_3 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^m, \end{aligned}$$

где

$$C, C_1, C_2, C_3$$

— количества, не зависящие от числа m . Чтобы определить эти количества, заметим, что предыдущие выражения $P^{(m)}$, $Q^{(m)}$, при $m=0$ и $m=1$, дают

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= C + C_1, & P^{(1)} &= C (x + \sqrt{x^2 - h^2}) + C_1 (x - \sqrt{x^2 - h^2}), \\ Q^{(0)} &= C_2 + C_3, & Q^{(1)} &= C_2 (x + \sqrt{x^2 - h^2}) + C_3 (x - \sqrt{x^2 - h^2}), \end{aligned}$$

а так как, с другой стороны, из разложения $\frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}}$ в непрерывную дробь

$$\frac{1}{x} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

находим

$$\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}} = \frac{1}{x},$$

то получаются уравнения

$$\begin{aligned} C + C_1 &= 0, \\ C(x + \sqrt{x^2 - h^2}) + C_1(x - \sqrt{x^2 - h^2}) &= 1, \\ C_2 + C_3 &= 1, \\ C_2(x + \sqrt{x^2 - h^2}) + C_3(x - \sqrt{x^2 - h^2}) &= x. \end{aligned}$$

Эти уравнения, будучи решены относительно C, C_1, C_2, C_3 , дают

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - h^2}}, \quad C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - h^2}}, \\ C_2 &= \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

и, внося значения C, C_1, C_2, C_3 в выражения $P^{(m)}, Q^{(m)}$, находим окончательно

$$\begin{aligned} P^{(m)} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^m - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^m}{2\sqrt{x^2 - h^2}}, \\ Q^{(m)} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^m + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^m}{2}. \end{aligned}$$

Таковы выражения членов дробей

$$\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}}, \quad \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}}, \quad \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}}, \quad \dots, \quad \frac{P^{(m)}}{Q^{(m)}}, \quad \dots,$$

подходящих к непрерывной дроби

$$\frac{1}{x} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

получающейся из разложения $\frac{1}{\sqrt{x^2 - h^2}}$.

§ 17. Из этого видно, что последняя дробь, степень знаменателя которой не выше $\frac{n+1}{2}$, имеет членами функции

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2 \sqrt{x^2 - h^2}},$$

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2}.$$

Отсюда, в силу того, что мы видели относительно определения

$$\eta_1, \eta_3, \dots,$$

$$\eta_2, \eta_4, \dots,$$

следует, что эти количества суть корни уравнений

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0,$$

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2 \sqrt{x^2 - h^2}} = 0. \quad (12)$$

Решения этих уравнений легко можно получить, замечая, что при

$$\frac{x}{h} = \cos \varphi$$

они обращаются в следующие:

$$\cos \frac{n+1}{2} \varphi = 0, \quad \frac{\sin \frac{n+1}{2} \varphi}{\sin \varphi} = 0,$$

которым вообще удовлетворим, полагая

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n+1}, \quad \varphi = \frac{2l\pi}{n+1},$$

где k и l — целые числа, и последнее из них не должно делиться на $\frac{n+1}{2}$.

Поэтому, полагая последовательно

$$k = \frac{n-1}{2}, \quad k = \frac{n-3}{2}, \quad \dots, \quad k=2, \quad k=1, \quad k=0,$$

$$l = \frac{n-1}{2}, \quad l = \frac{n-3}{2}, \quad \dots, \quad l=2, \quad l=1,$$

находим для корней уравнения (12), расположенных в возрастающем порядке, а следовательно, и для искоемых количеств

$$\begin{aligned} \eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots, \end{aligned}$$

следующие выражения:

$$\eta_1 = h \cos \frac{n}{n+1} \pi, \quad \eta_3 = h \cos \frac{n-2}{n+1} \pi, \quad \dots, \quad \eta_{n-2} = h \cos \frac{3\pi}{n+1}.$$

$$\eta_n = h \cos \frac{\pi}{n+1},$$

$$\eta_2 = h \cos \frac{n-1}{n+1} \pi, \quad \eta_4 = h \cos \frac{n-3}{n+1} \pi, \quad \dots, \quad \eta_{n-1} = h \cos \frac{2\pi}{n+1}.$$

§ 18. Переходя к определению количества s , заметим, что, по § 6, его значение надо отыскивать среди величин, при которых выражение

$$\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2 - h^2}}$$

отличается от подходящей дроби

$$\frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}}$$

только членами порядка низшего — $(n+2)$, что предполагает существование уравнения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}}{\sqrt{x^2 - h^2}} - \frac{P_{\frac{n+1}{2}}}{Q_{\frac{n+1}{2}}} \right) x^{n+2} \right] = 0.$$

Но так как мы нашли

$$P_{\frac{n+1}{2}} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2 - h^2}},$$

$$Q_{\frac{n+1}{2}} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2}$$

и

$$e^{\frac{s}{2x^{n+1}}} = 1 + \frac{s}{2x^{n+1}} + \frac{s^2}{8x^{2n+2}} + \dots,$$

то это уравнение будет

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{s}{2x^{n+1}} + \frac{s^2}{8x^{2n+2}} + \dots - \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2 - h^2}} \right) \right] = 0.$$

Откуда, замечая, что

$$1 - \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2h^{n+1}}{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n+1} + h^n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{s^2}{8x^{2n+2}} + \dots \right) \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2 - h^2}} \right] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{s}{2x^{n+1}} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2 - h^2}} \right] = \frac{s}{2},$$

получаем

$$\frac{s}{2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2h^{n+1}}{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n+1} + h^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2 - h^2}} \right) = 0,$$

а так как выражение

$$\frac{2h^{n+1}}{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n+1} + h^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^2 - h^2}}$$

при $x = \infty$ обращается в $\frac{h^{n+1}}{2^n}$, то отсюда получается такое значение s :

$$s = -\frac{h^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, в случае нечетного n , если принято

$$a = -h, \quad b = h, \quad l = n,$$

прямо получаются значения количеств

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n,$$

которые, по формуле (1), дают

$$\int_{-h}^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \dots + (-1)^n \int_{\eta_n}^h F(x) dx = s A_n.$$

Случай четного n

§ 19. В этом случае, отыскивая выражение

$$\frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}},$$

последней подходящей дроби к непрерывной, получаемой из $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}$, со знаменателем $Q_{n/2}$ степени низшей $\frac{n}{2} + 1$, можно взять выражение

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}$$

вместо

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x^{n+1}}},$$

которое отличается только степенями x ниже $\frac{1}{x^n}$, и так как члены подходящих дробей непрерывной дроби, получаемой через разложение

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}},$$

выражаются формулами *

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}},$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}},$$

то отсюда получаются для $P_{n/2}$, $Q_{n/2}$ следующие выражения:

$$P_{n/2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}},$$

$$Q_{n/2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}}.$$

В силу этих выражений $P_{n/2}$, $Q_{n/2}$, мы заключаем по § 4, что искомые количества

$$\eta_1, \eta_3, \dots,$$

$$\eta_2, \eta_4, \dots$$

суть корни уравнений

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}} = 0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}} = 0.$$

* См. наш мемуар «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций», § 57 [стр. 561. — *Ред.*]

Чтобы решить эти уравнения, положим, как и в предыдущем случае,

$$\frac{x}{h} = \cos \varphi,$$

вследствие чего они превращаются в следующие:

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2} \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = 0, \quad \frac{\cos \frac{n+1}{2} \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi}} = 0,$$

которым удовлетворим, полагая соответственно

$$\varphi = \frac{2l\pi}{n+1}, \quad \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n+1},$$

где целые числа $l, 2k+1$ не должны делиться на $n+1$.

Корни уравнений, полученных для определения количеств

$$\eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots,$$

выражаются так:

$$h \cos \frac{n\pi}{n+1}, \quad h \cos \frac{(n-2)\pi}{n+1}, \dots, \quad h \cos \frac{2\pi}{n+1}, \\ h \cos \frac{(n-1)\pi}{n+2}, \quad h \cos \frac{(n-3)\pi}{n+1}, \dots, \quad h \cos \frac{\pi}{n+1},$$

а так как эти корни расположены по величине, то они соответственно равны

$$\eta_1, \eta_3, \dots, \\ \eta_2, \eta_4, \dots,$$

отсюда видно, что количества

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots$$

выражаются теми же формулами, как и в случае, когда n нечетное.

§ 20. Чтобы найти количество s , заметим, что, по § 5, оно должно удовлетворить условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} e^{\frac{s}{2x^{n+1}}} - \frac{P_{n/2}}{Q_{n/2}} \right) x^{n+1} \right] = 0.$$

А подставляя найденные выражения $P_{n/2}$, $Q_{n/2}$ и разлагая $e^{\frac{s}{2x^{n+1}}}$ в ряд, имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{x-h}{x+h}} \left[1 + \frac{s}{2x^{n+1}} + \frac{s^2}{8x^{2n+2}} + \dots \right. \right. \\ \left. \dots - \frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1}} x^{n+1} \right] \Big\} = 0,$$

и так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} \left(1 - \frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1}} x^{n+1} \right) \right] = \\ = -\frac{h^{n+1}}{2^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} \cdot \frac{s}{2x^{n+1}} x^{n+1} \right] = \frac{s}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} \left(\frac{s^2}{8x^{2n+2}} + \dots \right) x^{n+1} \right] = 0,$$

то отсюда получается

$$s = \frac{h^{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Это выражение s отличается от такого же выражения в случае нечетного n только своим знаком.

Но легко заметить, что мы обнимем оба эти случая, если введем в значение s множитель $(-1)^n$, который обращается в $+1$ или -1 , смотря по тому, будет ли n четным или нечетным.

Таким образом, для s мы получаем выражение

$$s = (-1)^n \frac{h^{n+1}}{2^{n-1}},$$

которое будет существовать при всех значениях n .

IV

§ 21. Хотя рассматриваемая нами задача никогда не встречается на практике, где число известных значений искомой функции никогда не бывает бесконечно, но все же формулы, найденные нами в этом предположении, прилагаются с пользою, как мы сейчас и покажем.

Если известны значения функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n,$$

при всех значениях x , от $x = x_1$, до $x = x_i$, и если их рассматривать как равноотстоящие и бесконечно близкие друг другу, то можно получить только путем сложения и вычитания величины коэффициентов A_0 , A_1 , ..., A_n , помноженных на возможно большие числа. Эти выражения, определяющие коэффициенты

$$A_0, A_1, \dots, A_n,$$

будут представляться, как мы видели (§ 1), формулой

$$\int_{x_1}^{x_{i1}} F(x) dx - \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} F(x) dx + \dots + (-1)^v \int_{x_{iv}}^{x_i} F(x) dx.$$

Поэтому вся трудность определения коэффициентов

$$A_0, A_1, \dots, A_n$$

будет состоять в вычислении интегралов

$$\int_{x_1}^{x_{i1}} F(x) dx, \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} F(x) dx, \dots, \int_{x_{iv}}^{x_i} F(x) dx.$$

А так как эти интегралы, с большим или меньшим приближением, могут быть вычислены при помощи ограниченного числа значений $F(x)$, то легко понять, что можно пользоваться этими выражениями, определяющими коэффициенты функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n,$$

когда скоро имеется достаточное число значений $F(x)$, при помощи

которых интегралы

$$\int_{x_1}^{\eta_{11}} F(x) dx, \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} F(x) dx, \dots, \int_{\eta_{1v}}^{x_i} F(x) dx$$

могут быть вычислены с достаточным приближением.

§ 22. Что касается вычисления интегралов

$$\int_{x_i}^{\eta_{11}} F(x) dx, \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} F(x) dx, \dots, \int_{\eta_{1v}}^{x_i} F(x) dx,$$

которое придется производить при приложениях наших формул, то оно не представит никакой трудности.

Чтобы этого легче достичь, надо только заметить, что интегралы

$$\int_{x_1}^{\eta_{11}} F(x) dx, \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} F(x) dx, \dots, \int_{\eta_{1v}}^{x_i} F(x) dx$$

означают соответственно площади кривой

$$y = F(x),$$

заключенные между $x = x_1$ и $x = \eta_{11}$, $x = \eta_{11}$ и $x = \eta_{12}$, ..., $x = \eta_{1v}$ и $x = x_i$ и что каждое из данных значений $F(x)$ определяет одну из точек этой кривой. Таким образом, вычисление интеграла, о котором идет речь, приводится к геометрической задаче:

Дан ряд точек, определить для кривой, проходящей через эти точки, площади, заключенные между данными пределами.

Но такая задача допускает приближенное решение, которое легко найти.

Если имеется графическое представление кривой

$$y = F(x),$$

построенной по известным значениям $F(x)$, то площади найдутся прямо при помощи планиметра. В противном случае можно найти эти площади посредством очень простого вычисления, взяв вместо кривой многоугольник, определяемый данными точками. Таким образом, предполагая, что

известные значения $F(x)$ суть

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_\sigma), F(x_{\sigma+1}), \dots, F(x_\tau), F(x_{\tau+1}), \dots$$

и что количества

$$x = x_0, \quad x = X$$

закljučаются соответственно между x_σ и $x_{\sigma+1}$, x_τ и $x_{\tau+1}$, находим, что площадь кривой

$$y = F(x)$$

между $x = x_0$ и $x = X$ выражается приближенно следующей очень простой формулой:

$$\begin{aligned} & \frac{(x_{\sigma+1} - x_0)^2 F(x_\sigma) - (x_\sigma - x_0)^2 F(x_{\sigma+1})}{2(x_{\sigma+1} - x_\sigma)} + \frac{1}{2}(x_{\sigma+2} - x_\sigma) F(x_{\sigma+1}) + \\ & + \frac{1}{2}(x_{\sigma+3} - x_{\sigma+1}) F(x_{\sigma+2}) + \dots + \frac{1}{2}(x_{\tau+1} - x_{\tau-1}) F(x_\tau) - \\ & - \frac{(x_{\tau+1} - X)^2 F(x_\tau) - (x_\tau - X)^2 F(x_{\tau+1})}{2(x_{\tau+1} - x_\tau)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы ясно представить себе степень точности этой формулы, заметим, что разность между площадью кривой и площадью многоугольника в пределах $x = x_0$ и $x = X$ равна

$$\begin{aligned} & -\frac{N}{12}[(x_{\sigma+1} - x_\sigma)^3 + (x_{\sigma+2} - x_{\sigma+1})^3 + \dots + (x_\tau - x_{\tau-1})^3 + \\ & + (X - x_\tau)^2(3x_{\tau+1} - x_\tau - 2X) - (x_0 - x_\sigma)^2(3x_{\sigma+1} - x_\sigma - 2x_0)], \end{aligned} \quad (14)$$

где N — среднее между значениями $\frac{d^2 F(x)}{dx^2}$ между $x = x_0$ и $x = X$.

§ 23. По упомянутой выше формуле (13) легко найти приближенную величину выражений вида

$$\int_{x_1}^{\tau_{11}} F(x) dx - \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} F(x) dx + \dots + (-1)^v \int_{\tau_v}^{x_i} F(x) dx$$

по известным значениям $F(x)$:

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_i).$$

следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{\eta_1} F(x) dx &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1) F(x_1) + \frac{1}{2} (x_3 - x_1) F(x_2) + \frac{1}{2} (x_4 - x_2) F(x_3) + \\
 &+ \dots + \frac{1}{2} (x_{i'+1} - x_{i'-1}) F(x_{i'}) - \frac{(x_{i'+1} - \eta_1)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'} - \eta_1)^2 F(x_{i'+1})}{2(x_{i'+1} - x_{i'})}, \\
 \int_{x_{i1}}^{\eta_2} F(x) dx &= \frac{(x_{i'+1} - \eta_1)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'} - \eta_1)^2 F(x_{i'+1})}{2(x_{i'+1} - x_{i'})} + \\
 &+ \frac{1}{2} (x_{i'+2} - x_{i'}) F(x_{i'+1}) + \frac{1}{2} (x_{i'+3} - x_{i'+1}) F(x_{i'+2}) + \dots + \\
 &+ \frac{1}{2} (x_{i''+1} - x_{i''-1}) F(x_{i''}) - \frac{(x_{i''+1} - \eta_2)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''} - \eta_2)^2 F(x_{i''+1})}{2(x_{i''+1} - x_{i''})}, \\
 \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx &= \frac{(x_{i''+1} - \eta_2)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''} - \eta_2)^2 F(x_{i''+1})}{2(x_{i''+1} - x_{i''})} + \\
 &+ \frac{1}{2} (x_{i''+2} - x_{i''}) F(x_{i''+1}) + \frac{1}{2} (x_{i''+3} - x_{i''+1}) F(x_{i''+2}) + \dots + \\
 &+ \frac{1}{2} (x_{i''' +1} - x_{i''' -1}) F(x_{i'''}) - \frac{(x_{i''' +1} - \eta_3)^2 F(x_{i'''}) - (x_{i''' } - \eta_3)^2 F(x_{i''' +1})}{2(x_{i''' +1} - x_{i'''})}, \\
 &\dots \\
 \int_{\eta_{v-1}}^{\eta_v} F(x) dx &= \frac{(x_{i(v-1)+1} - \eta_{v-1})^2 F(x_{i(v-1)}) - (x_{i(v-1)} - \eta_{v-1})^2 F(x_{i(v-1)+1})}{2(x_{i(v-1)+1} - x_{i(v-1)})} + \dots + \\
 &+ \frac{1}{2} (x_{i(v)+1} - x_{i(v)-1}) F(x_{i(v)}) - \frac{(x_{i(v)+1} - \eta_v)^2 F(x_{i(v)}) - (x_{i(v)} - \eta_v)^2 F(x_{i(v)+1})}{2(x_{i(v)+1} - x_{i(v)})}, \\
 \int_{\eta_v}^{x_i} F(x) dx &= \frac{(x_{i(v)+1} - \eta_v)^2 F(x_{i(v)}) - (x_{i(v)} - \eta_v)^2 F(x_{i(v)+1})}{2(x_{i(v)+1} - x_{i(v)})} + \\
 &+ \frac{1}{2} (x_{i(v)+2} - x_{i(v)}) F(x_{i(v)+1}) + \dots + \frac{1}{2} (x_i - x_{i-2}) F(x_{i-1}) + \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) F(x_i).
 \end{aligned}$$

Отсюда, полагая для сокращения

$$\begin{aligned}
 M_1 &= (x_2 - x_1) F(x_1), \quad M_2 = (x_3 - x_1) F(x_2), \quad M_3 = (x_4 - x_2) F(x_3), \quad \dots, \\
 M_{i-1} &= (x_i - x_{i-2}) F(x_{i-1}), \quad M_i = (x_i - x_{i-1}) F(x_i),
 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_1}^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots - (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_{\nu}} F(x) dx + \\
 & \quad + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu}}^{x_i} F(x) dx = \\
 & = \frac{1}{2} \{ M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \dots - M_{i''} + M_{i''+1} + \\
 & \quad + \dots + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \dots - (-1)^{\nu} M_{i(\nu)+1} - \\
 & \quad - \dots - (-1)^{\nu} M_{i(\nu)} + (-1)^{\nu} M_{i(\nu)+1} + \dots + (-1)^{\nu} M_i \} - \\
 & \quad - \frac{(x_{i'+1} - \eta_1)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'} - \eta_1)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1} - x_{i'}} + \\
 & \quad + \frac{(x_{i''+1} - \eta_2)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''} - \eta_2)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1} - x_{i''}} - \dots + \\
 & \quad + (-1)^{\nu} \frac{(x_{i(\nu)+1} - \eta_{\nu})^2 F(x_{i(\nu)}) - (x_{i(\nu)} - \eta_{\nu})^2 F(x_{i(\nu)+1})}{x_{i(\nu)+1} - x_{i(\nu)}}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Вот каким образом мы получим приближенные величины выражений вида

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_1}^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots - (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_{\nu}} F(x) dx + \\
 & \quad + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu}}^{x_i} F(x) dx,
 \end{aligned}$$

определяющие коэффициенты функции

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n.$$

§ 24. В силу показанного, с одной стороны, относительно определения коэффициентов функции

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$$

уравнениями вида

$$sA_i = \int_{x_1}^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu}}^{x_i} F(x) dx,$$

а с другой стороны, относительно приближенного вычисления выражения

$$\int_{x_1}^{\eta_{11}} F(x) dx - \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} F(x) dx + \int_{\eta_{12}}^{\eta_{13}} F(x) dx - \dots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{1\nu}}^{x_i} F(x) dx$$

по известным значениям $F(x)$:

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_i),$$

все коэффициенты функции

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$$

будут даны одной и той же формулой

$$\begin{aligned} sA_l = & \frac{1}{2} \{ M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - M_{i'+1} - \dots - M_{i''} + M_{i''+1} + \dots + \\ & + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \dots - (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu-1)+1}} - \dots - (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)}} + \\ & + (-1)^{\nu} M_{i^{(\nu)+1}} + \dots + (-1)^{\nu} M_i \} - \frac{(x_{i'+1} - \eta_1)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'} - \eta_1)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1} - x_{i'}} + \\ & + \frac{(x_{i''+1} - \eta_2)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''} - \eta_2)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1} - x_{i''}} - \\ & - \dots + (-1)^{\nu} \frac{(x_{i^{(\nu)+1}} - \eta_{\nu})^2 F(x_{i^{(\nu)}}) - (x_{i^{(\nu)}} - \eta_{\nu})^2 F(x_{i^{(\nu)+1}})}{x_{i^{(\nu)+1}} - x_{i^{(\nu)}}}, \end{aligned} \quad (16)$$

если взять для

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu}$$

значения, получаемые в предположении

$$l = 0, 1, 2, \dots, n,$$

а для

$$x_{i'}, x_{i'+1}, x_{i''}, x_{i''+1}, \dots, x_{i^{(\nu)}}, x_{i^{(\nu)+1}}$$

члены ряда

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i,$$

соответственно наиболее близкие к

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu}$$

§ 25. Способом, данным в § 4, 5, 6, всегда найдем количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v,$$

входящие в формулу (16). Но в обыкновенных случаях практики, когда степень функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

остается ниже 6, можно при помощи таблицы, приложенной к нашему мемуару, избавить себя от труда отыскивать эти количества.

Эта таблица содержит в себе решения нашей задачи в случаях, когда

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

а пределами x взяты значения

$$-h, +h.$$

Итак, всякий раз, когда в ряде данных значений $F(x)$

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_i)$$

будем иметь

$$x_1 = -x_i,$$

а n в выражении

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

не превзойдет 5, количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v$$

могут быть определены нашей таблицей, если взять

$$h = x_i.$$

Сверх того, нетрудно заметить, что если отыскивать посредством нашей формулы (16) коэффициенты разложения $F(x)$ по степеням

$$x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

каковы бы ни были значения x_i и x_1 , количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v,$$

при

$$n=0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

будут также даны этой таблицей, и для этого надо взять

$$h = \frac{x_i - x_1}{2}.$$

В самом деле, если положить

$$x - \frac{x_1 + x_i}{2} = X$$

и если надо отыскать, по (16), коэффициенты функции

$$F(x) = F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X\right) = K_0 + K_1 X + \dots + K_n X^n.$$

предполагая известными ее значения при

$$X = X_1, X_2, \dots, X_j,$$

соответствующие значениям

$$x = x_1, x_2, \dots, x_i,$$

то находим для определения коэффициентов

$$K_0, K_1, \dots, K_n$$

такую систему формул

$$\begin{aligned}
sK_l = & \frac{1}{2} \left\{ M_1 + M_2 + \cdots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \cdots - M_{i''} + \right. \\
& \left. + M_{i''+1} + \cdots + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \cdots + (-1)^v M_{i^{(v)}+1} + \cdots + (-1)^v M_i \right\} - \\
& - \frac{(X_{i'+1} - \eta_1)^2 F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i'}\right) - (X_{i'} - \eta_1)^2 F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i'+1}\right)}{X_{i'+1} - X_{i'}} + \\
& + \frac{(X_{i''+1} - \eta_2)^2 F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i''}\right) - (X_{i''} - \eta_2)^2 F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i''+1}\right)}{X_{i''+1} - X_{i''}} - (17) \\
& \cdots \\
& + (-1)^v \frac{(X_{i^{(v)}+1} - \eta_v)^2 F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i^{(v)}}\right) - (X_{i^{(v)}} - \eta_v)^2 F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i^{(v)}+1}\right)}{X_{i^{(v)}+1} - X_{i^{(v)}}},
\end{aligned}$$

$$M_1 = (X_2 - X_1) F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_1\right), \quad M_2 = (X_3 - X_1) F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_2\right), \dots, \\ M_{i-1} = (X_i - X_{i-2}) F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_{i-1}\right), \quad M_i = (X_i - X_{i-1}) F\left(\frac{x_1 + x_i}{2} + X_i\right),$$

в которых количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v$$

определятся для таких предельных величин X :

$$X = X_1, \quad X = X_i.$$

А так как эти количества, в силу уравнения

$$X = x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

приводятся к

$$\frac{x_i - x_1}{2}$$

с тем или другим знаком, то видно, что при

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

эти решения будут даны нашей таблицей, если взять

$$h = \frac{x_i - x_1}{2}.$$

Что касается случая $n > 5$, то, согласно показанному, мы найдем количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v$$

формулы (1) при помощи общего способа, если возьмем для x пределы, отличающиеся только знаком, но численно равные, что сильно упростит отыскание этих количеств.

Заметим еще, что если заместим переменную X величиной

$$x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

то формулы, только что найденные нами для определения коэффициентов $K_0, K_1, \dots, K_n$ в разложении $F(x)$ по степеням

$$X = x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

сделаются

$$\begin{aligned}
 sK_i = & \frac{1}{2} \{ M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \dots - M_{i''} + \\
 & + M_{i''+1} + \dots + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \dots + (-1)^v M_{i^{(v)}+1} + \dots + (-1)^v M_i \} - \\
 & - \frac{\left(x_{i'+1} - \eta_1 - \frac{x_1 + x_i}{2} \right)^2 F(x_{i'}) - \left(x_{i'} - \eta_1 - \frac{x_1 + x_i}{2} \right)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1} - x_{i'}} + \\
 & + \frac{\left(x_{i''+1} - \eta_2 - \frac{x_1 + x_i}{2} \right)^2 F(x_{i''}) - \left(x_{i''} - \eta_2 - \frac{x_1 + x_i}{2} \right)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1} - x_{i''}} - \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + (-1)^v \frac{\left(x_{i^{(v)}+1} - \eta_v - \frac{x_1 + x_i}{2} \right)^2 F(x_{i^{(v)}}) - \left(x_{i^{(v)}} - \eta_v - \frac{x_1 + x_i}{2} \right)^2 F(x_{i^{(v)}+1})}{x_{i^{(v)}+1} - x_{i^{(v)}}} \\
 & M_1 = (x_2 - x_1) F(x_1), \quad M_2 = (x_3 - x_1) F(x_2), \quad \dots, \\
 & M_{i-1} = (x_i - x_{i-2}) F(x_{i-1}) \quad M_i = (x_i - x_{i-1}) F(x_i). \quad (18)
 \end{aligned}$$

В формуле (17)

$$X_{i'}, \quad X_{i'+1}, \quad X_{i''}, \quad X_{i''+1}, \quad \dots, \quad X_{i^{(v)}}, \quad X_{i^{(v)}+1}$$

— количества из ряда

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots, \quad X_i,$$

наиболее близкие к

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \dots, \quad \eta_v,$$

а потому видно из уравнения

$$X = x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

что количества

$$x_{i'}, \quad x_{i'+1}, \quad x_{i''}, \quad x_{i''+1}, \quad \dots, \quad x_{i^{(v)}}, \quad x_{i^{(v)}+1}$$

найдутся в формуле (18), если отыскать в ряде

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_i$$

пары членов, соответственно наиболее близких к

$$\eta_1 + \frac{x_1 + x_i}{2}, \quad \eta_2 + \frac{x_1 + x_i}{2}, \quad \dots, \quad \eta_v + \frac{x_1 + x_i}{2}$$

§ 26. Так как количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n,$$

входящие в формулу (18), в наиболее обыкновенных случаях практики

$$n=0, 1, 2, 3, 4, 5$$

находятся непосредственно с помощью нашей таблицы, если брать $h = \frac{x_i - x_1}{2}$, и так как эта таблица по способу, данному в § 4, 5, 6, может быть с легкостью продолжена до более значительного предела и далее величин n , нужных для практики, то ясно, что формула (18), определяющая коэффициенты в разложении функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

по степеням

$$x - \frac{x_1 + x_i}{2},$$

очень удобна для разыскания ее выражения по известным значениям

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_i).$$

Эта формула дает выражение функции $F(x)$ только приближенно по причине погрешностей, которые являются при вычислении интегралов от замены кривой многоугольником. Но эти погрешности, по мере возрастания числа данных значений $F(x)$, очень быстро стремятся к нулю, и, на основании § 22, в каждом отдельном случае можно установить их предел. Коль скоро известные значения даны в значительном числе и они определены наблюдениями, чаще всего эти погрешности будут меньше тех, которые происходят от неточности самих наблюдений. В этих случаях наша формула, без сомнения, очень удобна для отыскания приближенного выражения функции $F(x)$ в силу того, что она определяет отдельно все коэффициенты разложения $F(x)$ по степеням

$$x - \frac{x_1 + x_i}{2}$$

и требует только очень простых вычислений.

Употребление этой формулы тем более удобно, что бо́льшая часть ее членов и именно тех, число которых возрастает вместе с числом

данных значений $F(x)$, т. е.

$$M_1, M_2, \dots, M_i,$$

остаются, за исключением знака, одними и теми же при определении всех искоемых коэффициентов

$$K_0, K_1, \dots, K_n,$$

а число других членов никогда не больше степени $F(x)$, обыкновенно невысокой. Что касается вычисления всех этих членов, то относительно простоты оно не оставляет желать ничего лучшего. Но, как мы уже заметили выше (§ 22), можно при помощи планиметра избавить себя от труда производить эти вычисления, если имеется графическое представление искомой функции; и тогда по нашим формулам мы найдем с чрезвычайной легкостью ее выражение в виде

$$A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n.$$

§ 27. Чтобы показать на примере приложение формулы (18), отыщем выражение изменений объема воды при различных температурах, между $t=0^\circ$ и $t=25^\circ$, по наблюдениям, взятым из мемуара Коппа (Annalen der Physik und Chemie von J. C. Poggendorf, Band 20, S. 45), результаты которых могут быть представлены так:

m	x_m	$F(x_m)$	m	x_m	$F(x_m)$
1	0	0,000000	16	13,5	0,000480
2	0,9	— 0,000022	17	13,8	0,000568
3	1,6	— 0,000098	18	15,0	0,000706
4	2,1	— 0,000077	19	15,6	0,000841
5	5,2	— 0,000115	20	16,3	0,000927
6	5,6	— 0,000135	21	17,4	0,001057
7	6,1	— 0,000094	22	18,6	0,001256
8	6,3	— 0,000101	23	18,6	0,001298
9	7,2	— 0,000047	24	19,2	0,001419
10	8,5	— 0,000006	25	19,8	0,001496
11	8,6	0,000007	26	21,2	0,001805
12	9,1	0,000081	27	21,8	0,001989
13	11,2	0,000215	28	22,2	0,002043
14	11,9	0,000317	29	24,0	0,002421
15	12,7	0,000352	30	24,5	0,002618

где через x_m мы обозначаем температуру, а через $F(x_m)$ — изменения единицы объема воды при различных температурах выше нуля.

Отыщем выражение $F(x)$ формулой

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3,$$

и для этого возьмем

$$n = 3.$$

С другой стороны, так как в ряде известных значений $F(x)$ пределы x суть

$$x_1 = 0, \quad x_{30} = 24,5,$$

то, по нашим обозначениям,

$$x_1 = 0, \quad x_i = 24,5, \quad i = 30,$$

а отсюда

$$h = \frac{x_i - x_1}{2} = \frac{24,5 - 0}{2} = 12,25,$$

$$\frac{x_1 + x_i}{2} = \frac{0 + 24,5}{2} = 12,25.$$

Поэтому, представляя функцию $F(x)$ в виде

$$K_0 + K_1(x - 12,25) + K_2(x - 12,25)^2 + K_3(x - 12,25)^3$$

и отыскивая коэффициенты

$$K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

при помощи нашей формулы (18), имеем

$$\begin{aligned} sK_i = & \frac{1}{2} \{ M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \dots - M_{i''} + \\ & + M_{i''+1} + \dots + M_{i'''} - M_{i'''+1} - \dots + (-1)^v M_{i^{(v)}+1} + \dots + (-1)^v M_{30} \} - \\ & - \frac{(x_{i'+1} - \eta_1 - 12,25)^2 F(x_{i'}) - (x_{i'} - \eta_1 - 12,25)^2 F(x_{i'+1})}{x_{i'+1} - x_{i'}} + \\ & + \frac{(x_{i''+1} - \eta_2 - 12,25)^2 F(x_{i''}) - (x_{i''} - \eta_2 - 12,25)^2 F(x_{i''+1})}{x_{i''+1} - x_{i''}} \\ & \dots \dots \dots \\ & + (-1)^v \frac{(x_{i^{(v)}+1} - \eta_v - 12,25)^2 F(x_{i^{(v)}}) - (x_{i^{(v)}} - \eta_v - 12,25)^2 F(x_{i^{(v)}+1})}{x_{i^{(v)}+1} - x_{i^{(v)}}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где количества

$$s, \nu, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu$$

найдутся по таблице, приложенной к нашему мемуару, если взять

$$n=3, \quad h=12,25,$$

что дает нам систему величин $s, \nu, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu$, соответствующих $l=0, 1, 2, 3$.

$$l=0$$

$$s = -1,17480 \cdot 12,25 = -14,3913,$$

$$\nu = 2,$$

$$\eta_1 = -0,79370 \cdot 12,25 = -9,7228.$$

$$\eta_2 = 0,79370 \cdot 12,25 = 9,7228.$$

$$l=1$$

$$s = 0,41421 \cdot 12,25^2 = 62,1579,$$

$$\nu = 3,$$

$$\eta_1 = -0,84090 \cdot 12,25 = -10,3010,$$

$$\eta_2 = 0,$$

$$\eta_3 = 0,84090 \cdot 12,25 = 10,3010.$$

$$l=2$$

$$s = 0,5 \cdot 12,25^3 = 919,13,$$

$$\nu = 2,$$

$$\eta_1 = -0,5 \cdot 12,25 = -6,125,$$

$$\eta_2 = 0,5 \cdot 12,25 = 6,125.$$

$$l=3$$

$$s = -0,25 \cdot 12,25^4 = -5629,7,$$

$$\nu = 3,$$

$$\eta_1 = -0,70711 \cdot 12,25 = -8,6620,$$

$$\eta_2 = 0,$$

$$\eta_3 = 0,70711 \cdot 12,25 = 8,6620.$$

В силу этого, замечая, что при нашем обозначении

$$x_{i'}, \quad x_{i'+1}, \quad x_{i''}, \quad x_{i''+1}, \quad \dots, \quad x_{i^{(\nu)}}, \quad x_{i^{(\nu)}+1},$$

означают пары величин из ряда

$$x_1, x_2, \dots, x_i,$$

соответственно наиболее близких к количествам

$$\eta_1 + 12,25, \eta_2 + 12,25, \dots, \eta_v + 12,25,$$

легко извлечь из формулы (19) уравнения, определяющие отдельно каждый из коэффициентов

$$K_0, K_1, K_2, K_3$$

искомой функции

$$F(x) = K_0 + K_1(x - 12,25) + K_2(x - 12,25)^2 + K_3(x - 12,25)^3.$$

§ 28. Для определения коэффициента K_0 возьмем

$$l = 0,$$

получаем

$$s = -14,3913, \quad v = 2, \quad \eta_1 = -9,7228, \quad \eta_2 = 9,7228.$$

Так как в столбце значений x_m (§ 27) наиболее близкие к

$$\eta_1 + 12,25 = -9,7228 + 12,25 = 2,5272,$$

$$\eta_2 + 12,25 = 9,7228 + 12,25 = 21,9728$$

суть

$$x_4 = 2,1, \quad x_5 = 5,2, \quad x_{27} = 21,8, \quad x_{28} = 22,2,$$

то возьмем, согласно нашим обозначениям,

$$x_{i'} = x_4, \quad x_{i'+1} = x_5, \quad x_{i''} = x_{27}, \quad x_{i''+1} = x_{28}, \\ i' = 4, \quad i'' = 27.$$

При этих значениях

$$s, v, \eta_1, \eta_2, i', i''$$

формула (19) дает

$$-14,3913K_0 = \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + \dots + M_4 - M_5 - \dots - M_{27} + M_{28} + \\ + \dots + M_{30}] - \frac{(x_5 - 2,5272)^2 F(x_4) - (x_4 - 2,5272)^2 F(x_5)}{x_5 - x_4} + \\ + \frac{(x_{28} - 21,9728)^2 F(x_{27}) - (x_{27} - 21,9728)^2 F(x_{28})}{x_{28} - x_{27}}.$$

Переходя к определению коэффициента K_1 , примем

$$l = 1,$$

и так как для этого значения l мы только что нашли

$$s = 62,1579, \quad \nu = 3, \quad \eta_1 = -10,3010, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 10,3010,$$

а в столбце значений x_m ближайшие к

$$\begin{aligned} \eta_1 + 12,25 &= -10,3010 + 12,25 = 1,9490, \\ \eta_2 + 12,25 &= 0 + 12,25 = 12,25, \\ \eta_3 + 12,25 &= 10,3010 + 12,25 = 22,5510 \end{aligned}$$

суть

$$\begin{aligned} x_2 &= 1,6, & x_4 &= 2,1, & x_{14} &= 11,9, & x_{15} &= 12,7, \\ & & x_{28} &= 22,2, & x_{29} &= 24,0, \end{aligned}$$

то будем иметь, согласно нашим обозначениям,

$$i' = 3, \quad i'' = 14, \quad i''' = 28.$$

Тогда для определения коэффициента K_1 формула (19) доставит нам такое уравнение

$$\begin{aligned} 62,1579 K_1 &= \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - \dots - M_{14} + M_{15} + \\ &+ \dots + M_{28} - M_{29} - M_{30}] - \frac{(x_4 - 1,9490)^2 F(x_3) - (x_3 - 1,9490)^2 F(x_4)}{x_4 - x_3} + \\ &+ \frac{(x_{15} - 12,25)^2 F(x_{14}) - (x_{14} - 12,25)^2 F(x_{15})}{x_{15} - x_{14}} - \\ &- \frac{(x_{29} - 22,5510)^2 F(x_{28}) - (x_{28} - 22,5510)^2 F(x_{29})}{x_{29} - x_{28}}. \end{aligned}$$

Отыскивая таким образом уравнения, определяющие коэффициент K_2 , примем

$$l = 2$$

и будем иметь

$$\begin{aligned} s &= 919,13, & \nu &= 2, & \eta_1 &= -6,125, & \eta_2 &= 6,125, \\ & & i' &= 7, & i'' &= 21. \end{aligned}$$

Для этих значений

$$l, s, \nu, \eta_1, \eta_2, i', i'',$$

формула (19) делается

$$919,13K_2 = \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + \dots + M_7 - M_8 - \dots - M_{21} + M_{22} + \\ + \dots + M_{30}] - \frac{(x_8 - 6,125)^2 F(x_7) - (x_7 - 6,125)^2 F(x_8)}{x_8 - x_7} + \\ + \frac{(x_{22} - 18,375)^2 F(x_{21}) - (x_{21} - 18,375)^2 F(x_{22})}{x_{22} - x_{21}}.$$

Наконец, для определения K_3 сделаем

$$l = 3$$

и найдем

$$s = -5629,7, \quad \nu = 3, \quad \eta_1 = -8,6620, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 8,6620, \\ i' = 4, \quad i'' = 14, \quad i''' = 25,$$

вследствие чего формула (19) дает

$$-5629,7 K_3 = \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + \dots + M_4 - M_5 - \dots - M_{14} + M_{15} + \\ + \dots + M_{25} - M_{26} - \dots - M_{30}] - \frac{(x_5 - 3,5880)^2 F(x_4) - (x_4 - 3,5880)^2 F(x_5)}{x_5 - x_4} + \\ + \frac{(x_{15} - 12,25)^2 F(x_{14}) - (x_{14} - 12,25)^2 F(x_{15})}{x_{15} - x_{14}} - \\ - \frac{(x_{26} - 20,9120)^2 F(x_{25}) - (x_{25} - 20,9120)^2 F(x_{26})}{x_{26} - x_{25}}.$$

Посредством полученных формул легко найти коэффициенты искомой функции

$$F(x) = K_0 + K_1(x - 12,25) + K_2(x - 12,25)^2 + K_3(x - 12,25)^3,$$

что мы сейчас и покажем.

§ 29. Чтобы найти значения

$$M_1 = (x_2 - x_1) F(x_1), \quad M_2 = (x_3 - x_1) F(x_2), \quad M_3 = (x_4 - x_2) F(x_3), \quad \dots, \\ M_{i-1} = (x_i - x_{i-2}) F(x_{i-1}), \quad M_i = (x_i - x_{i-1}) F(x_i),$$

отыщем разности

$$\begin{array}{ll}
 x_2 - x_1 = 0,9 - 0 = 0,9, & x_{17} - x_{15} = 13,8 - 12,7 = 1,1, \\
 x_3 - x_1 = 1,6 - 0 = 1,6, & x_{18} - x_{16} = 15,0 - 13,5 = 1,5, \\
 x_4 - x_2 = 2,1 - 0,9 = 1,2, & x_{19} - x_{17} = 15,6 - 13,8 = 1,8, \\
 x_5 - x_3 = 5,2 - 1,6 = 3,6, & x_{20} - x_{18} = 16,3 - 15,0 = 1,3, \\
 x_6 - x_4 = 5,6 - 2,1 = 3,5, & x_{21} - x_{19} = 17,4 - 15,6 = 1,8, \\
 x_7 - x_5 = 6,1 - 5,2 = 0,9, & x_{22} - x_{20} = 18,6 - 16,3 = 2,3, \\
 x_8 - x_6 = 6,3 - 5,6 = 0,7, & x_{23} - x_{21} = 18,6 - 17,4 = 1,2, \\
 x_9 - x_7 = 7,2 - 6,1 = 1,1, & x_{24} - x_{22} = 19,2 - 18,6 = 0,6, \\
 x_{10} - x_8 = 8,5 - 6,3 = 2,2, & x_{25} - x_{23} = 19,8 - 18,6 = 1,2, \\
 x_{11} - x_9 = 8,6 - 7,2 = 1,4, & x_{26} - x_{24} = 21,2 - 19,2 = 2,0, \\
 x_{12} - x_{10} = 9,1 - 8,5 = 0,6, & x_{27} - x_{25} = 21,8 - 19,8 = 2,0, \\
 x_{13} - x_{11} = 11,2 - 8,6 = 2,6, & x_{28} - x_{26} = 22,2 - 21,2 = 1,0, \\
 x_{14} - x_{12} = 11,9 - 9,1 = 2,8, & x_{29} - x_{27} = 24,0 - 21,8 = 2,2, \\
 x_{15} - x_{13} = 12,7 - 11,2 = 1,5, & x_{30} - x_{28} = 24,5 - 22,2 = 2,3, \\
 x_{16} - x_{14} = 13,5 - 11,9 = 1,6, & x_{30} - x_{29} = 24,5 - 24,0 = 0,5.
 \end{array}$$

Умножая эти разности на значения

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_{30}),$$

получаем

$$\begin{array}{l}
 M_1 = -0,000000 \cdot 0,9 = -0,000000, \\
 M_2 = -0,000022 \cdot 1,6 = -0,000035, \\
 M_3 = -0,000098 \cdot 1,2 = -0,000118, \\
 M_4 = -0,000077 \cdot 3,6 = -0,000277, \\
 M_5 = -0,000115 \cdot 3,5 = -0,000402, \\
 M_6 = -0,000135 \cdot 0,9 = -0,000122, \\
 M_7 = -0,000094 \cdot 0,7 = -0,000066, \\
 M_8 = -0,000101 \cdot 1,1 = -0,000111, \\
 M_9 = -0,000047 \cdot 2,2 = -0,000103, \\
 M_{10} = -0,000006 \cdot 1,4 = -0,000008, \\
 M_{11} = 0,000007 \cdot 0,6 = 0,000004, \\
 M_{12} = 0,000081 \cdot 2,6 = 0,000210, \\
 M_{13} = 0,000215 \cdot 2,8 = 0,000602, \\
 M_{14} = 0,000317 \cdot 1,5 = 0,000475,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
M_{15} &= 0,000352 \cdot 1,6 = 0,000563, \\
M_{16} &= 0,000480 \cdot 1,1 = 0,000528, \\
M_{17} &= 0,000568 \cdot 1,5 = 0,000852, \\
M_{18} &= 0,000706 \cdot 1,8 = 0,001271, \\
M_{19} &= 0,000841 \cdot 1,3 = 0,001093, \\
M_{20} &= 0,000927 \cdot 1,8 = 0,001668, \\
M_{21} &= 0,001057 \cdot 2,3 = 0,002431, \\
M_{22} &= 0,001256 \cdot 1,2 = 0,001507, \\
M_{23} &= 0,001298 \cdot 0,6 = 0,000779, \\
M_{24} &= 0,001419 \cdot 1,2 = 0,001703, \\
M_{25} &= 0,001496 \cdot 2,0 = 0,002992, \\
M_{26} &= 0,001805 \cdot 2,0 = 0,003610, \\
M_{27} &= 0,001989 \cdot 1,0 = 0,001989, \\
M_{28} &= 0,002043 \cdot 2,2 = 0,004495, \\
M_{29} &= 0,002421 \cdot 2,3 = 0,005568, \\
M_{30} &= 0,002618 \cdot 0,5 = 0,001309.
\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получаются значения всех сочетаний количеств

$$M_1, M_2, \dots, M_{30},$$

которые содержатся в выражениях, определяющих коэффициенты

$$K_0, K_1, K_2, K_3,$$

а именно:

$$\begin{aligned}
M_1 + M_2 + \dots + M_4 - M_5 - \dots - M_{27} + M_{28} + \dots + M_{30} &= -0,010523, \\
M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - \dots - M_{14} + M_{15} + \dots + M_{28} - M_{29} - M_{30} &= 0,018249, \\
M_1 + M_2 + \dots + M_7 - M_8 - \dots - M_{21} + M_{22} + \dots + M_{30} &= 0,013457, \\
M_1 + M_2 + \dots + M_4 - M_5 - \dots - M_{14} + M_{15} + \dots + M_{25} - M_{26} - \dots - M_{30} &= \\
&= -0,002493.
\end{aligned}$$

С другой стороны, через подстановку значений

$$x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{25}, x_{26}, x_{28}, x_{29},$$

$$\begin{aligned}
F(x_3), F(x_4), F(x_5), F(x_6), F(x_7), F(x_8), F(x_{14}), F(x_{15}), F(x_{21}), F(x_{22}), \\
F(x_{25}), F(x_{26}), F(x_{28}), F(x_{29})
\end{aligned}$$

еем

$$\begin{aligned}
& \frac{(x_5 - 2,5272)^2 F(x_4) - (x_4 - 2,5272)^2 F(x_5)}{x_5 - x_4} = \\
& = \frac{-(5,2 - 2,5272)^2 \cdot 0,000077 + (2,1 - 2,5272)^2 \cdot 0,000115}{5,2 - 2,1} = -0,000171, \\
& \frac{(x_{28} - 21,9728)^2 F(x_{27}) - (x_{27} - 21,9728)^2 F(x_{28})}{x_{28} - x_{27}} = \\
& = \frac{(22,2 - 21,9728)^2 \cdot 0,001989 - (21,8 - 21,9728)^2 \cdot 0,002043}{22,2 - 21,8} = 0,000103, \\
& \frac{(x_4 - 1,9490)^2 F(x_3) - (x_3 - 1,9490)^2 F(x_4)}{x_4 - x_3} = \\
& = \frac{-(2,1 - 1,9490)^2 \cdot 0,000098 + (1,6 - 1,9490)^2 \cdot 0,000077}{2,1 - 1,6} = 0,000014, \\
& \frac{(x_{15} - 12,25)^2 F(x_{14}) - (x_{14} - 12,25)^2 F(x_{15})}{x_{15} - x_{14}} = \\
& = \frac{(12,7 - 12,25)^2 \cdot 0,000317 - (11,9 - 12,5)^2 \cdot 0,000352}{12,7 - 11,9} = 0,000026, \\
& \frac{(x_{29} - 22,5510)^2 F(x_{28}) - (x_{28} - 22,5510)^2 F(x_{29})}{x_{29} - x_{28}} = \\
& = \frac{(24 - 22,5510)^2 \cdot 0,002043 - (22,2 - 22,5510)^2 \cdot 0,002421}{24 - 22,2} = 0,002217, \\
& \frac{(x_8 - 6,125)^2 F(x_7) - (x_7 - 6,125)^2 F(x_8)}{x_8 - x_7} = \\
& = \frac{-(6,3 - 6,125)^2 \cdot 0,000094 + (6,1 - 6,125)^2 \cdot 0,000101}{6,3 - 6,1} = -0,00014, \\
& \frac{(x_{22} - 18,375)^2 F(x_{21}) - (x_{21} - 18,375)^2 F(x_{22})}{x_{22} - x_{21}} = \\
& = \frac{(18,6 - 18,375)^2 \cdot 0,001057 - (17,4 - 18,375)^2 \cdot 0,001256}{18,6 - 17,4} = -0,000951, \\
& \frac{(x_5 - 3,588)^2 F(x_4) - (x_4 - 3,588)^2 F(x_5)}{x_5 - x_4} = \\
& = \frac{-(5,2 - 3,588)^2 \cdot 0,000077 + (2,1 - 3,588)^2 \cdot 0,000115}{5,2 - 2,1} = 0,000017, \\
& \frac{(x_{26} - 20,912)^2 F(x_{25}) - (x_{25} - 20,912)^2 F(x_{26})}{x_{26} - x_{25}} = \\
& = \frac{(21,2 - 20,912)^2 \cdot 0,001496 - (19,8 - 20,912)^2 \cdot 0,001805}{21,2 - 19,8} = -0,001505.
\end{aligned}$$

После этого уравнения, которые мы нашли для определения коэффициентов

$$K_0, K_1, K_2, K_3,$$

дают

$$-14,3913 K_0 = \frac{-0,010523}{2} + 0,000171 + 0,000103 = -0,004987,$$

$$62,1579 K_1 = \frac{0,018249}{2} - 0,000014 + 0,000026 - 0,002217 = 0,006919,$$

$$919,13 K_2 = \frac{0,013457}{2} + 0,000014 - 0,000951 = 0,005791,$$

$$-5629,7 K_3 = \frac{-0,002493}{2} - 0,000017 + 0,000026 + 0,001505 = 0,000268,$$

и отсюда получаем

$$K_0 = \frac{-0,004987}{-14,3913} = 0,0003465,$$

$$K_1 = \frac{0,006919}{62,1579} = 0,00011131,$$

$$K_2 = \frac{0,005791}{919,13} = 0,00000630,$$

$$K_3 = \frac{0,000268}{-5629,7} = -0,0000000476.$$

Внося эти значения

$$K_0, K_1, K_2, K_3$$

в искомое выражение $F(x)$, имеем

$$F(x) = 0,0003465 + 0,00011131(x - 12,25) + 0,00000630(x - 12,25)^2 - 0,0000000476(x - 12,25)^3,$$

что представляет все данные значения $F(x)$ с вполне достаточным приближением, как это можно видеть в следующей таблице*.

§ 30. По формуле (14), принимая, согласно с найденным выражением $F(x)$,

$$F''(x) = 0,0000126 - 0,000000285(x - 12,25),$$

находим, что погрешности, которые вносятся в наши значения коэффициентов

$$K_0, K_1, K_2, K_3$$

* См. стр.—381.—Ред.

m	x_m	Наблюденные значения $F(x_m)$	Вычисленные значения $F(x_m)$	Разности
1	0,0	0,000000	+0,000016	—0,000016
2	0,9	—0,000022	—0,000036	+0,000014
3	1,6	—0,000098	—0,000067	—0,000031
4	2,1	—0,000077	—0,000085	+0,000008
5	5,2	—0,000115	—0,000107	—0,000008
6	5,6	—0,000135	—0,000101	—0,000034
7	6,1	—0,000094	—0,000089	—0,000005
8	6,3	—0,000101	—0,000083	—0,000018
9	7,2	—0,000047	—0,000049	+0,000002
10	8,5	—0,000006	—0,000020	+0,000014
11	8,6	0,000007	—0,000007	+0,000014
12	9,1	0,000081	0,000061	+0,000020
13	11,2	0,000215	0,000236	—0,000021
14	11,9	0,000317	0,000308	+0,000009
15	12,7	0,000352	0,000398	—0,000046
16	13,5	0,000480	0,000495	—0,000015
17	13,8	0,000568	0,000534	+0,000034
18	15,0	0,000706	0,000698	+0,000008
19	15,6	0,000841	0,000789	+0,000052
20	16,3	0,000927	0,000891	+0,000036
21	17,4	0,001057	0,001080	—0,000023
22	18,6	0,001256	0,001295	—0,000039
23	18,6	0,001298	0,001295	+0,000003
24	19,2	0,001419	0,001408	+0,000011
25	19,8	0,001496	0,001525	—0,000029
26	21,2	0,001805	0,001813	—0,000008
27	21,8	0,001989	0,001942	+0,000047
28	22,2	0,002043	0,002030	+0,000013
29	24,0	0,002421	0,002447	—0,000026
30	24,5	0,002618	0,002568	+0,000050

при замене, как это мы сделали, кривой $y = F(x)$ многоугольником, содержатся соответственно между пределами

$$\begin{aligned}
 & -0,0000023 \text{ и } -0,0000040, \\
 & +0,00000059 \text{ и } +0,00000079, \\
 & -0,000000022 \text{ и } -0,000000032, \\
 & -0,00000000059 \text{ и } -0,00000000081.
 \end{aligned}$$

Из этого мы легко убеждаемся, что эти ошибки значительно ниже происходящих от неточности наблюдений. Эти погрешности были бы еще

менее, если бы значения аргумента наблюдений № 4 и 5 не были так удалены между собою.

VI

§ 31. По способу, изложенному в предыдущих разделах, можно найти коэффициенты функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

с бóльшим или меньшим приближением, смотря по числу известных значений.

Но так как количества

$$s, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n,$$

входящие в наши формулы, зависят существенно от числа n , то их нельзя употреблять при отыскании выражения $F(x)$, не назначив наперед числа ее сохраненных членов, а следовательно, пока ничего не известно об этом числе, важно рассмотреть различные к нему относящиеся предположения и искать, отдельно при каждом из них, выражение $F(x)$, что значительно удлиняет наши вычисления. Мы покажем теперь, как по нашему способу получить формулу интерполирования, которая совершенно устранил эту трудность. Формула, которую мы теперь дадим, охватит все возможные предположения относительно числа членов в выражении $F(x)$ и будет соответствовать каждому из них по мере продолжения ряда, который представляет эта формула.

В этом отношении она не оставляет ничего более желать, только, как и все другие формулы этого мемуара, она не дает результата с наименьшею опасною погрешностью, результата, который прямо можно найти только помощью вышеупомянутого нашего ряда.

§ 32. Чтобы получить формулу интерполирования, о которой мы говорим, условимся обозначать символом

$$\int_n u$$

выражение вида

$$\int_{-h}^{\eta_1} u dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} u dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} u dx - \dots + (-1)^n \int_{\eta_n}^h u dx,$$

где

$$\eta_{11}, \eta_{13}, \dots,$$

$$\eta_{12}, \eta_{14}, \dots$$

суть корни уравнений

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0,$$

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{x^2 - h^2}} = 0$$

в случае нечетного n и уравнений

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{\sqrt{\frac{x-h}{2}}} = 0.$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}}\right)^{n+1}}{\sqrt{\frac{x+h}{2}}} = 0$$

в случае четного n .

При таком обозначении найденные в разделе III формулы для определения последнего коэффициента функции

$$F(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$$

представляются так:

$$\int_n F(x) = sA_n,$$

откуда, подставляя выражение $F(x)$, мы выводим

$$\int_n (A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) = A_0 \int_n x^0 + A_1 \int_n x + \dots + A_n \int_n x^n = sA_n,$$

что предполагает

$$\int_n x^0 = 0, \quad \int_n x = 0, \quad \dots, \quad \int_n x^{n-1} = 0.$$

входящие в состав выражения (21) для $f(z)$, суть функции z соответственно степеней

$$0, 1, 2, \dots$$

и что их значения совершенно не зависят от m , числа членов искомой функции. Поэтому, если сделать $m = \infty$, выражение $f(z)$, данное формулой (21), будет обладать свойством, о котором мы говорили в § 31. Чтобы в этом удостовериться, достаточно заметить, что при $m = \infty$ формула (21) обращается в бесконечный ряд

$$\theta_1 \int_0 f(x) + \theta_2 \int_1 f(x) + \theta_3 \int_2 f(x) + \dots$$

и что этот ряд, при остановке на члене $\theta_{m+1} \int_m f(x)$, дает величину $f(z)$, которую находим, по (21), предполагая, что

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m.$$

§ 34. Найдем теперь закон ряда

$$f(z) = \theta_1 \int_0 f(x) + \theta_2 \int_1 f(x) + \theta_3 \int_2 f(x) + \dots, \quad (23)$$

получаемого из выражения (21) в случае, когда

$$m = \infty.$$

Уравнения (22), определяющие функции

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots,$$

при $m = \infty$, становятся

$$\begin{aligned} \theta_1 \int_0 x^0 &= 1, \\ \theta_1 \int_0 x + \theta_2 \int_1 x &= z, \\ \theta_1 \int_0 x^2 + \theta_2 \int_1 x^2 + \theta_3 \int_2 x^2 &= z^2, \\ \theta_1 \int_0 x^3 + \theta_2 \int_1 x^3 + \theta_3 \int_2 x^3 + \theta_4 \int_3 x^3 &= z^3, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Решив эти уравнения, легко найдем функции

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots,$$

но трудно указать их общий вид.

Мы покажем теперь, как этого можно достигнуть совершенно особым приемом.

В силу того, что мы видели (§ 32) относительно выражений

$$\int_n x^0, \int_n x, \int_n x^2, \dots, \int_n x^{n-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_1 x^0 &= 0, & \int_2 x^0 &= 0, & \int_3 x^0 &= 0, & \dots, \\ \int_2 x &= 0, & \int_3 x &= 0, & \dots, \\ \int_3 x^2 &= 0, & \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что, не изменяя ничего в уравнениях (24), их можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \theta_1 \int_0 x^0 + \theta_2 \int_1 x^0 + \theta_3 \int_2 x^0 + \dots &= 1, \\ \theta_1 \int_0 x + \theta_2 \int_1 x + \theta_3 \int_2 x + \dots &= z, \\ \theta_1 \int_0 x^2 + \theta_2 \int_1 x^2 + \theta_3 \int_2 x^2 + \dots &= z^2, \\ \theta_1 \int_0 x^3 + \theta_2 \int_1 x^3 + \theta_3 \int_2 x^3 + \dots &= z^3, \\ & \dots \end{aligned}$$

Если же помножить эти уравнения соответственно на

$$\frac{1}{\alpha^2}, \frac{2}{\alpha^3}, \frac{3}{\alpha^4}, \frac{4}{\alpha^5}, \dots,$$

а так как

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{x+h} + \frac{2}{x-\eta_1} - \frac{2}{x-\eta_2} + \frac{2}{x-\eta_3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{x-h} = \\ & = -\frac{d \log(x+h)}{dx} + \frac{2d \log(x-\eta_1)}{dx} - \frac{2d \log(x-\eta_2)}{dx} + \frac{2d \log(x-\eta_3)}{dx} - \\ & - \dots + (-1)^n \frac{d \log(x-h)}{dx} = \frac{d \log \frac{(x-\eta_1)^2 (x-\eta_3)^2 \dots (x-h)^{(-1)^n}}{(x-\eta_2)^2 \dots (x+h)}}{dx}, \end{aligned}$$

то отсюда следует, что

$$\int_n \frac{1}{(x-x)^2} = \frac{d \log \frac{(x-\eta_1)^2 (x-\eta_3)^2 \dots (x-h)^{(-1)^n}}{(x-\eta_2)^2 \dots (x+h)}}{dx}. \quad (26)$$

При помощи этой формулы легко получить окончательную величину

$$\int_n \frac{1}{(x-x)^2}.$$

В случае нечетного n количества

$$\begin{aligned} & \eta_1, \eta_3, \dots, \\ & \eta_2, \eta_4, \dots \end{aligned}$$

суть (§ 32) корни уравнений

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0,$$

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2 \sqrt{x^2 - h^2}} = 0,$$

а отсюда находим

$$(x - \eta_1)(x - \eta_3) \dots = C_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2},$$

$$(x - \eta_2)(x - \eta_4) \dots = C_1 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2 \sqrt{x^2 - h^2}},$$

обозначая через C_0 и C_1 количества, не зависящие от α . Поэтому формула (26), при n нечетном, дает нам

$$\int_n \frac{1}{(\alpha - x)^2} = \frac{d \log \frac{C_0^2 \left((\alpha + \sqrt{\alpha^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} \right)^2}{C_1^2 \left((\alpha + \sqrt{\alpha^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - h^2})^{\frac{n+1}{2}} \right)^2}}{d\alpha} =$$

$$= -\frac{n+1}{\sqrt{\alpha^2 - h^2}} \frac{4h^{n+1}}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - h^2})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - h^2})^{n+1}}.$$

Переходя к случаю четного n , мы заметим, что для таких значений n количества

$$\eta_1, \eta_3, \dots,$$

$$\eta_2, \eta_4, \dots$$

суть корни уравнений

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1}}{2 \sqrt{\frac{x-h}{2}}} = 0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} + \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{x+h}{2}} - \sqrt{\frac{x-h}{2}} \right)^{n+1}}{2 \sqrt{\frac{x+h}{2}}} = 0,$$

а следовательно,

$$(\alpha - \eta_1)(\alpha - \eta_3) \dots =$$

$$= C_0 \frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1}}{2 \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}}},$$

$$(\alpha - \eta_2)(\alpha - \eta_4) \dots =$$

$$= C_1 \frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1}}{2 \sqrt{\frac{\alpha+h}{2}}}.$$

Поэтому формула (26), при n четном, дает нам

$$\begin{aligned} & \int_n \frac{1}{(x-x)^2} = \\ & d \log \frac{C_0^2}{C_1^2} \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1} - \left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1} + \left(\sqrt{\frac{\alpha+h}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha-h}{2}} \right)^{n+1}} \right)^2 \\ & = \frac{n+1}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h^{n+1}}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})^{n+1}}. \end{aligned}$$

На основании найденных выражений для

$$\int_n \frac{1}{(x-x)^2}$$

получаем при $n=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_0 \frac{1}{(x-x)^2} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2}) - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})}, \\ \int_1 \frac{1}{(x-x)^2} &= -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h^2}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2})^2 - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})^2}, \\ \int_2 \frac{1}{(x-x)^2} &= \frac{3}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \frac{4h^3}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2})^3 - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})^3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

в силу чего формула (25) обращается в

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{\alpha^2-h^2}} \left[\frac{h\theta_1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})} - \frac{2h^2\theta_2}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2})^2 - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3h^3\theta_3}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2})^3 - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-h^2})^3} - \dots \right] = \frac{1}{(\alpha-z)^2}. \end{aligned}$$

Чтобы упростить эту формулу, положим

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2-h^2}}{h} = u,$$

что дает нам

$$\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - h^2}}{h} = \frac{1}{u}, \quad \frac{2\sqrt{\alpha^2 - h^2}}{h} = u - \frac{1}{u}, \quad \frac{2\alpha}{h} = u + \frac{1}{u},$$

а вследствие этого наша формула изменяется в такую:

$$\frac{8}{h \left(u - \frac{1}{u}\right)} \left[\frac{\theta_1}{u - \frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2 - \frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3 - \frac{1}{u^3}} - \dots \right] = \frac{1}{\left[\frac{h}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right) - z \right]^2},$$

или

$$\frac{\theta_1}{u - \frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2 - \frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3 - \frac{1}{u^3}} - \dots = \frac{u^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)}{2h \left(u^2 - \frac{2zu}{h} + 1\right)^2}.$$

§ 35. Обе части этого уравнения преобразуются в очень простые суммы. В самом деле, так как

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1}{u - \frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2 - \frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3 - \frac{1}{u^3}} - \dots &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{u^{\lambda} - \frac{1}{u^{\lambda}}}, \\ \frac{1}{u^{\lambda} - \frac{1}{u^{\lambda}}} &= \frac{1}{u^{\lambda}} + \frac{1}{u^{3\lambda}} + \frac{1}{u^{5\lambda}} + \dots = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{u^{(2\mu-1)\lambda}}, \end{aligned}$$

то находим

$$\frac{\theta_1}{u - \frac{1}{u}} - \frac{2\theta_2}{u^2 - \frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_3}{u^3 - \frac{1}{u^3}} - \dots = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{u^{(2\mu-1)\lambda}}.$$

С другой стороны, при помощи разложения на простые дроби, получаем

$$\begin{aligned} \frac{u^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)}{\left(u^2 - \frac{2zu}{h} + 1\right)^2} &= \frac{h}{2\sqrt{z^2 - h^2}} \left[\frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^2}{(hu - z - \sqrt{z^2 - h^2})^2} + \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2}}{hu - z - \sqrt{z^2 - h^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(z - \sqrt{z^2 - h^2})^2}{(hu - z + \sqrt{z^2 - h^2})^2} - \frac{z - \sqrt{z^2 - h^2}}{hu - z + \sqrt{z^2 - h^2}} \right], \end{aligned}$$

а отсюда

$$\frac{u^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)}{\left(u^2 - \frac{2zu}{h} + 1 \right)^2} = \frac{h}{2 \sqrt{z^2 - h^2}} \left[\frac{h(z + \sqrt{z^2 - h^2})u}{(hu - z - \sqrt{z^2 - h^2})^2} - \frac{h(z - \sqrt{z^2 - h^2})u}{(hu - z + \sqrt{z^2 - h^2})^2} \right],$$

откуда получается

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \frac{u^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)}{\left(u^2 - \frac{2zu}{h} + 1 \right)^2} = \\ &= \frac{1}{4 \sqrt{z^2 - h^2}} \left\{ \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2}}{hu} + 2 \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^2}{h^2 u^2} + 3 \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^3}{h^3 u^3} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - \frac{z - \sqrt{z^2 - h^2}}{hu} - 2 \frac{(z - \sqrt{z^2 - h^2})^2}{h^2 u^2} - 3 \frac{(z - \sqrt{z^2 - h^2})^3}{h^3 u^3} - \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{4 \sqrt{z^2 - h^2}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^\tau - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^\tau}{h^\tau u^\tau}. \end{aligned}$$

Вследствие только что сделанных нами преобразований наша формула обращается в такую:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_\lambda}{u^{(2\mu-1)\lambda}} = \frac{1}{4 \sqrt{z^2 - h^2}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^\tau - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^\tau}{h^\tau u^\tau}.$$

§ 36. Чтобы вывести из этой формулы ту, которая приведет нас к искомым функциям

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots,$$

будем интегрировать ее от $u=1$ до $u=\infty$, помножив на

$$\log^{\rho-1} u \frac{du}{u},$$

где ρ — число произвольное ($\rho > 1$). Таким образом получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_\lambda \int_1^{\infty} \frac{\log^{\rho-1} u \, du}{u^{(2\mu-1)\lambda+1}} = \\ &= \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^\tau - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^\tau}{4h^\tau \sqrt{z^2 - h^2}} \int_1^{\infty} \frac{\log^{\rho-1} u \, du}{u^{\tau+1}}, \end{aligned}$$

а так как интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^{\rho-1} u \, du}{u^{(2\mu-1)\lambda+1}}, \quad \int_1^{\infty} \frac{\log^{\rho-1} u \, du}{u^{\tau+1}}$$

обращаются в

$$\frac{1}{\lambda^{\rho} (2\mu-1)^{\rho}} \int_0^1 \log^{\rho-1} \frac{1}{x} \, dx, \quad \frac{1}{\tau^{\rho}} \int_0^1 \log^{\rho-1} \frac{1}{x} \, dx,$$

то получается, по устранении общего множителя $\int_0^1 \log^{\rho-1} \frac{1}{x} \, dx$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{\lambda^{\rho} (2\mu-1)^{\rho}} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau}}{4h^{\tau} \tau^{\rho} \sqrt{z^2 - h^2}},$$

или, что то же самое,

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{\lambda^{\rho}} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^{\rho}} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau}}{4h^{\tau} \tau^{\rho} \sqrt{z^2 - h^2}}.$$

Сверх того, замечая, что

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^{\rho}} &= \frac{1}{1^{\rho}} + \frac{1}{3^{\rho}} + \frac{1}{5^{\rho}} + \frac{1}{7^{\rho}} + \frac{1}{9^{\rho}} + \dots = \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{7^{\rho}}\right) \dots}, \end{aligned}$$

находим, что формула может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{\lambda^{\rho}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{7^{\rho}}\right) \dots} &= \\ &= \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau}}{4h^{\tau} \tau^{\rho} \sqrt{z^2 - h^2}}, \end{aligned}$$

а отсюда получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{\lambda^{\rho}} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau}}{4h^{\tau} \tau^{\rho} \sqrt{z^2 - h^2}} \left(1 - \frac{1}{3^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{7^{\rho}}\right) \dots (27)$$

Именно посредством этой формулы мы и найдем общее выражение функций

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$$

§ 37. Чтобы найти значение θ_{λ} , заметим, что формула (27), независимо от числа ρ , может иметь место не иначе, как если обе ее части содержат одинаковые члены с $\frac{1}{\lambda^{\rho}}$. Но в первой части такой член будет

$$\frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{\lambda^{\rho}};$$

переходя к отысканию соответствующих членов во второй части, мы найдем, что произведение

$$\left(1 - \frac{1}{3^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{\rho}}\right) \left(1 - \frac{1}{7^{\rho}}\right) \dots$$

приводится к ряду

$$1 - \frac{1}{3^{\rho}} - \frac{1}{5^{\rho}} - \frac{1}{7^{\rho}} - \frac{1}{11^{\rho}} - \frac{1}{13^{\rho}} + \frac{1}{15^{\rho}} - \dots,$$

который представляется в виде

$$\sum_{p=1}^{\infty} \pm \frac{1}{d_p^{\rho}},$$

если через

$$d_1, d_2, d_3, \dots$$

обозначены нечетные числа

$$1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, \dots$$

без квадратного множителя и предположено, что член

$$\frac{1}{d_p^{\rho}}$$

берется со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, входят ли простые делители d_p в четном или нечетном числе.

Вторая часть нашей формулы приводится, следовательно, к

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \pm^{\tau} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\tau}}{4h^{\tau} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{(\tau d_p)^{\rho}},$$

а отсюда находим, что члены с $\frac{1}{\lambda^{\rho}}$ суть

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\lambda} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\lambda}}{4h^{\lambda} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{\lambda^{\rho}} \pm \frac{\lambda}{d_1} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_1}} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{\lambda^{\rho}} \pm \\ & \pm \frac{\lambda}{d_2} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_2}} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{\lambda^{\rho}} \pm \dots, \end{aligned}$$

где

$$d_1, d_2, \dots$$

обозначают те же нечетные делители числа λ , которые не имеют квадратных множителей.

Что касается знаков этих членов, то, согласно с показанным нами, нужно взять вообще

$$\frac{\lambda}{d_p} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_p}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_p}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_p}} \sqrt{z^2 - h^2}}$$

со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, будут ли простые делители d_p в четном или нечетном числе.

Сравнивая между собой найденные нами в обеих частях формулы (26) члены с $\frac{1}{\lambda^{\rho}}$, мы получаем такое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda}}{\lambda^{\rho}} &= \lambda \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\lambda} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\lambda}}{4h^{\lambda} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{\lambda^{\rho}} \pm \\ & \pm \frac{\lambda}{d_1} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_1}} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{\lambda^{\rho}} \pm \end{aligned}$$

$$\pm \frac{\lambda}{d_2} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_2}} \sqrt{z^2 - h^2}} \frac{1}{\lambda^p} \pm \dots,$$

которое дает нам для искомой величины функции θ_λ

$$\begin{aligned} \theta_\lambda = & (-1)^{\lambda-1} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^\lambda - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^\lambda}{4h^\lambda \sqrt{z^2 - h^2}} \pm \\ & \pm \frac{(-1)^{\lambda-1}}{d_1} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_1}} \sqrt{z^2 - h^2}} \pm \\ & \pm \frac{(-1)^{\lambda-1}}{d_2} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}} - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4h^{\frac{\lambda}{d_2}} \sqrt{z^2 - h^2}} \pm \dots \end{aligned}$$

§ 38. Из найденного выражения θ_λ легко получаются все функции

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots,$$

по которым расположена наша формула (23). Таким образом, замечая, что при

$$\lambda = 1, 2, 4$$

число λ не имеет делителя, который был бы нечетным и в то же время без квадратного множителя, мы находим для $\theta_1, \theta_2, \theta_4$ такие выражения:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2} - z + \sqrt{z^2 - h^2}}{4h \sqrt{z^2 - h^2}} = \frac{1}{2h}, \\ \theta_2 &= - \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^2 - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^2}{4h^2 \sqrt{z^2 - h^2}} = - \frac{z}{h^2}, \\ \theta_4 &= - \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^4 - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^4}{4h^4 \sqrt{z^2 - h^2}} = - \frac{4z^3 - 2h^2z}{h^4}. \end{aligned}$$

При

$$\lambda = 3, 5, 6,$$

так как нечетные делители λ без квадратных множителей таковы:

$$d_1 = 3, \quad d_1 = 5, \quad d_1 = 3,$$

то найденное выражение θ_λ дает нам

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^3 - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^3}{4h^3 \sqrt{z^2 - h^2}} - \frac{1}{3} \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2} - z + \sqrt{z^2 - h^2}}{4h \sqrt{z^2 - h^2}} = \\ &= \frac{2z^2 - \frac{2}{3}h^2}{h^3}, \\ \theta_5 &= \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^5 - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^5}{4h^5 \sqrt{z^2 - h^2}} - \frac{1}{5} \frac{z + \sqrt{z^2 - h^2} - z + \sqrt{z^2 - h^2}}{4h \sqrt{z^2 - h^2}} = \\ &= \frac{8z^4 - 6h^2z^2 + \frac{2}{5}h^4}{h^5}, \\ \theta_6 &= -\frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^6 - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^6}{4h^6 \sqrt{z^2 - h^2}} + \frac{1}{3} \frac{(z + \sqrt{z^2 - h^2})^2 - (z - \sqrt{z^2 - h^2})^2}{4h^2 \sqrt{z^2 - h^2}} = \\ &= -\frac{16z^5 - 16h^2z^3 + \frac{8}{3}h^4z}{h^6}.\end{aligned}$$

Что касается количеств

$$\int_0, \int_1, \int_2, \int_3, \dots,$$

содержащихся в формуле (23), то заметим, что по § 32

$$\int_n f(x) = \int_{-h}^{\eta_1} f(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} f(x) dx - \dots + (-1)^n \int_{\eta_n}^h f(x) dx,$$

а по § 17, 19

$$\begin{aligned}\eta_1 &= h \cos \frac{n\pi}{n+1}, & \eta_3 &= h \cos \frac{(n-2)\pi}{n+1}, \dots, \\ \eta_2 &= h \cos \frac{(n-1)\pi}{n+1}, & \eta_4 &= h \cos \frac{(n-3)\pi}{n+1}, \dots,\end{aligned}$$

что дает нам

$$\begin{aligned}\int_n f(x) &= \int_{-h}^{h \cos \frac{n\pi}{n+1}} f(x) dx - \int_{h \cos \frac{n\pi}{n+1}}^{h \cos \frac{(n-1)\pi}{n+1}} f(x) dx + \int_{h \cos \frac{(n-1)\pi}{n+1}}^{h \cos \frac{(n-2)\pi}{n+1}} f(x) dx - \dots + \\ &+ (-1)^n \int_{h \cos \frac{\pi}{n+1}}^h f(x) dx.\end{aligned}$$

Отсюда, полагая

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots,$$

получаем

$$\int_0^h f(x) = \int_{-h}^h f(x) dx,$$

$$\int_1^h f(x) = \int_{-h}^0 f(x) dx - \int_0^h f(x) dx,$$

$$\int_2^h f(x) = \int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}h}^h f(x) dx,$$

$$\int_3^h f(x) = \int_{-h}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}h}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x) dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}h}^h f(x) dx,$$

$$\int_4^h f(x) = \int_{-h}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x) dx -$$

$$- \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^h f(x) dx,$$

$$\int_5^h f(x) = \int_{-h}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}h}^0 f(x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}h} f(x) dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}h}^{\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x) dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}h}^h f(x) dx,$$

.....

В силу найденных значений

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots, \\ \int_0^1, \int_1^2, \int_2^3, \int_3^4, \dots,$$

наша формула (23) обращается в такое разложение функции $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x) dx - \left[\int_{-h}^0 f(x) dx - \int_0^h f(x) dx \right] \frac{z}{h^2} + \\ & + \left[\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}h}^h f(x) dx \right] \frac{2z^2 - \frac{2}{3}h^2}{h^3} - \\ & - \left[\int_{-h}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}h}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h} f(x) dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}h}^h f(x) dx \right] \frac{4z^3 - 2h^2z}{h^4} + \\ & + \left[\int_{-h}^{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x) dx + \int_{-\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h} f(x) dx - \right. \\ & \left. - \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}h}^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{5}+1}{4}h}^h f(x) dx \right] \frac{8z^4 - 6h^2z^2 + \frac{2}{5}h^4}{h^5} - \\ & - \left[\int_{-h}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}h}^0 f(x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}h} f(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_{\frac{1}{2}h}^{\frac{\sqrt{3}}{2}h} f(x) dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}h}^h f(x) dx \right] \frac{16z^5 - 16h^2z^3 + \frac{8}{3}h^4z}{h^6} + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

которое, смотря по числу удержанных членов, дает выражение $f(z)$ в виде полинома более или менее высокой степени.

Что касается приближенного вычисления выражений

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h f(x) dx, \\ & \int_{-h}^0 f(x) dx - \int_0^h f(x) dx, \\ & -\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}h}^h f(x) dx, \\ & \dots \end{aligned}$$

по данным значений $f(z)$

$$f(z_1), f(z_2), f(z_3), \dots, f(z_i),$$

то его можно произвести, как мы показали в § 22, при помощи планиметра, если у нас есть графическое представление кривой

$$y = f(x);$$

в противном случае эти выражения можно отыскать при помощи формулы (15), которая через замену x на z , $F(x)$ на $f(z)$ обращается в

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{\eta_{11}} f(z) dz - \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} f(z) dz + \int_{\eta_{12}}^{\eta_{13}} f(z) dz - \dots + (-1)^v \int_{\eta_v}^{z_i} f(z) dz = \\ & = \frac{1}{2} \{ M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - M_{i'+1} - M_{i'+2} - \dots - M_{i''} + M_{i''+1} + \dots + \\ & \quad + M_{i'''} - M_{i''' + 1} - M_{i''' + 2} - \dots - (-1)^v M_{i^{(v-1)}+1} - \dots - \\ & \quad - (-1)^v M_{i^{(v)}} + (-1)^v M_{i^{(v)}+1} + \dots + (-1)^v M_i \} - \\ & \quad - \frac{(z_{i'+1} - \eta_{11})^2 f(z_{i'}) - (z_{i'} - \eta_{11})^2 f(z_{i'+1})}{z_{i'+1} - z_{i'}} + \frac{(z_{i''+1} - \eta_{12})^2 f(z_{i''}) - (z_{i''} - \eta_{12})^2 f(z_{i''+1})}{z_{i''+1} - z_{i''}} \\ & \quad - \dots + (-1)^v \frac{(z_{i^{(v)}+1} - \eta_v)^2 f(z_{i^{(v)}}) - (z_{i^{(v)}} - \eta_v)^2 f(z_{i^{(v)}+1})}{z_{i^{(v)}+1} - z_{i^{(v)}}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} & z_{i'}, z_{i'+1}, \\ & z_{i''}, z_{i''+1}, \\ & \dots \\ & z_{i^{(v)}}, z_{i^{(v)}+1} \end{aligned}$$

суть пары членов из ряда

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_i,$$

соответственно наиболее близкие к количествам

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v,$$

а

$$\begin{aligned} M_1 &= (z_2 - z_1) f(z_1), \quad M_2 = (z_3 - z_1) f(z_2), \quad \dots, \\ M_{i-1} &= (z_i - z_{i-2}) f(z_{i-1}), \quad M_i = (z_i - z_{i-1}) f(z_i). \end{aligned}$$

В формуле (28) пределы переменной суть $-h$ и $+h$, что предполагает в ряде данных значений $f(z)$

$$f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_i)$$

количества z_1 и z_i численно равными, но с противными знаками. Если же этого нет, этого легко достичь простым изменением переменной, именно принимая за новую переменную z разность $z = \frac{z_1 + z_i}{2}$.

§ 39. Чтобы показать употребление формулы (28), мы приложим ее к тому же примеру, который мы рассмотрели выше, в разделе III. В этом примере предельные значения переменной суть $x_1 = 0$, $x_i = 24,5$. Поэтому, согласно сказанному, возьмем за новую переменную, которую мы обозначим через z , разность

$$x - \frac{0 + 24,5}{2} = x - 12,25.$$

Поэтому таблица данных, которые мы имели в § 27, изменится в такую:

m	z_m	$f(z_m)$	m	z_m	$f(z_m)$
1	-12,25	0,000000	16	1,25	0,000480
2	-11,35	-0,000022	17	1,55	0,000568
3	-10,65	-0,000098	18	2,75	0,000706
4	-10,15	-0,000077	19	3,35	0,000841
5	-7,05	-0,000115	20	4,05	0,000927
6	-6,65	-0,000135	21	5,15	0,001057
7	-6,15	-0,000094	22	6,35	0,001256
8	-5,95	-0,000101	23	6,35	0,001298
9	-5,05	-0,000047	24	6,95	0,001419
10	-3,75	-0,000006	25	7,55	0,001496
11	-3,65	0,000007	26	8,95	0,001805
12	-3,15	0,000081	27	9,55	0,001989
13	-1,05	0,000215	28	9,95	0,002043
14	-0,35	0,000317	29	11,75	0,002421
15	0,45	0,000352	30	12,25	0,002618

Так как в этой таблице предельные значения z суть

$$z_1 = -12,25, \quad z_{30} = 12,25,$$

то возьмем

$$h = 12,25,$$

а при таком значении h будем иметь, по формуле (28), следующее разложение функции $f(z)$:

$$\begin{aligned}
 f(z) = & \frac{1}{24,5} \int_{-12,25}^{12,25} f(z) dz - \left[\int_{-12,25}^0 f(z) dz - \int_0^{12,25} f(z) dz \right] \frac{z}{150,06} + \\
 & + \left[\int_{-12,25}^{-6,125} f(z) dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z) dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z) dz \right] \frac{2z^2 - 100,04}{1838,26} - \\
 & - \left[\int_{-12,25}^{-8,662} f(z) dz - \int_{-8,662}^0 f(z) dz + \int_0^{8,662} f(z) dz - \right. \\
 & \left. - \int_{8,662}^{12,25} f(z) dz \right] \frac{4z^3 - 300,12z}{22519} + \dots
 \end{aligned} \tag{30}$$

§ 40. Для вычисления выражений

$$\begin{aligned}
 & \int_{-12,25}^{12,25} f(z) dz, \\
 & \int_{-12,25}^0 f(z) dz - \int_0^{12,25} f(z) dz, \\
 & \int_{-12,25}^{-6,125} f(z) dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z) dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z) dz, \\
 & \int_{-12,25}^{-8,662} f(z) dz - \int_{-8,662}^0 f(z) dz + \int_0^{8,662} f(z) dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z) dz, \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

найдем предварительно значения $M_1, M_2, \dots, M_{30}$ по формулам

$$\begin{aligned}
 M_1 &= (z_2 - z_1) f(z_1), & M_2 &= (z_3 - z_1) f(z_2), & M_3 &= (z_4 - z_2) f(z_3), & \dots, \\
 M_{29} &= (z_{30} - z_{28}) f(z_{29}), & M_{30} &= (z_{30} - z_{29}) f(z_{30}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим

$M_1 = -0,000000,$	$M_{11} = 0,000004,$	$M_{21} = 0,002431,$
$M_2 = -0,000035,$	$M_{12} = 0,000210,$	$M_{22} = 0,001507,$
$M_3 = -0,000118,$	$M_{13} = 0,000602,$	$M_{23} = 0,000779,$
$M_4 = -0,000277,$	$M_{14} = 0,000475,$	$M_{24} = 0,001703,$
$M_5 = -0,000402,$	$M_{15} = 0,000563,$	$M_{25} = 0,002992,$
$M_6 = -0,000122,$	$M_{16} = 0,000528,$	$M_{26} = 0,003610,$
$M_7 = -0,000066,$	$M_{17} = 0,000852,$	$M_{27} = 0,001989,$
$M_8 = -0,000111,$	$M_{18} = 0,001271,$	$M_{28} = 0,004495,$
$M_9 = -0,000103,$	$M_{19} = 0,001093,$	$M_{29} = 0,005568,$
$M_{10} = -0,000008,$	$M_{20} = 0,001668,$	$M_{30} = 0,001309.$

По определении этих значений вычисление предыдущих выражений посредством формулы (29) делается очень удобным.

Чтобы найти интеграл

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z) dz,$$

возьмем в формуле (29)

$$i = 30, \quad \nu = 0, \quad z_1 = -12,25, \quad z_i = 12,25$$

и будем иметь

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z) dz = \frac{1}{2} (M_1 + M_2 + \dots + M_{30}),$$

откуда, в силу найденных значений $M_1, M_2, \dots, M_{30}$, получаем

$$\int_{-12,25}^{12,25} f(z) dz = \frac{1}{2} \cdot 0,032407 = 0,016203.$$

Чтобы найти величину выражения

$$\int_{-12,25}^0 f(z) dz - \int_0^{12,25} f(z) dz,$$

сделаем в формуле (29)

$$i = 30, \quad \nu = 1, \quad z_1 = -12,25, \quad z_i = 12,25, \quad \eta_1 = 0,$$

что дает

$$\begin{aligned} \int_{-12,25}^0 f(z) dz - \int_0^{12,25} f(z) dz = & \frac{1}{2} (M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - M_{i'+1} - \dots - M_{30}) - \\ & - \frac{z_{i'+1}^2 f(z_{i'}) - z_{i'}^2 f(z_{i'+1})}{z_{i'+1} - z_{i'}}, \end{aligned}$$

где, по нашему обозначению, $z_{i'}, z_{i'+1}$ означают пару значений z_m , наиболее близких к 0. Так как в столбце значений z_m (§ 39) наиболее близкие к 0 суть

$$z_{14} = -0,35, \quad z_{15} = 0,45$$

и так как по таблице значений $M_1, M_2, \dots, M_{30}$

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 + \dots + M_{14} &= 0,000049, \\ M_{15} + M_{16} + \dots + M_{30} &= 0,032358, \end{aligned}$$

то предыдущая формула обращается в такую:

$$\int_{-12,25}^0 f(z) dz - \int_0^{12,25} f(z) dz = \frac{1}{2} (0,000049 - 0,032358) - \frac{0,45^2 f(-0,35) - 0,35^2 f(0,45)}{0,45 + 0,35}.$$

Отсюда, принимая во внимание значения

$$f(-0,35) = 0,000317, \quad f(0,45) = 0,000352,$$

получаем

$$\int_{-12,25}^0 f(z) dz - \int_0^{12,25} f(z) dz = \frac{1}{2} (0,000049 - 0,032358) - \frac{0,45^2 \cdot 0,000317 - 0,35^2 \cdot 0,000352}{0,45 + 0,35} = -0,016180.$$

Положив в формуле (29)

$$i = 30, \quad \nu = 2, \quad z_1 = -12,25, \quad z_i = 12,25, \\ \eta_1 = -6,125, \quad \eta_2 = 6,125,$$

будем иметь

$$\int_{-12,25}^{-6,125} f(z) dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z) dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z) dz = \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + \dots + M_{i'} - \\ - M_{i'+1} - \dots - M_{i''} + M_{i''+1} + \dots + M_{30}] - \\ - \frac{(z_{i'+1} + 6,125)^2 f(z_{i'}) - (z_{i'} + 6,125)^2 f(z_{i'+1})}{z_{i'+1} - z_{i'}} + \\ + \frac{(z_{i''+1} - 6,125)^2 f(z_{i''}) - (z_{i''} - 6,125)^2 f(z_{i''+1})}{z_{i''+1} - z_{i''}},$$

где

$$z_{i'}, z_{i'+1}, z_{i''}, z_{i''+1}$$

означают пары значений z_m , наиболее близких к количествам

$$-6,125, \quad 6,125.$$

Так как в ряде значений z_m члены, наиболее близкие к

$$-6,125, \quad 6,125,$$

суть

$$\begin{aligned} z_7 &= -6,15, & z_8 &= -5,95, \\ z_{21} &= 5,15, & z_{22} &= 6,35, \end{aligned}$$

то эта формула дает нам

$$\begin{aligned} & \int_{-12,25}^{-6,125} f(z) dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z) dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + \dots + M_7 - M_8 - \dots - M_{21} + M_{22} + \dots + M_{30}] - \\ & - \frac{(z_8 + 6,125)^2 f(z_7) - (z_7 + 6,125)^2 f(z_8)}{z_8 - z_7} + \frac{(z_{22} - 6,125)^2 f(z_{21}) - (z_{21} - 6,125)^2 f(z_{22})}{z_{22} - z_{21}}, \end{aligned}$$

а отсюда, подставляя значения

$$\begin{aligned} & z_7, z_8, z_{21}, z_{22}, f(z_7), f(z_8), f(z_{21}), f(z_{22}), \\ & M_1, M_2, \dots, M_{30}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-12,25}^{-6,125} f(z) dz - \int_{-6,125}^{6,125} f(z) dz + \int_{6,125}^{12,25} f(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,013457 + 0,000014 - 0,000951 = 0,005791. \end{aligned}$$

Отыскивая так же величину

$$\int_{-12,25}^{-8,662} f(z) dz - \int_{-8,662}^0 f(z) dz + \int_0^{8,662} f(z) dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z) dz,$$

возьмем в формуле (29)

$$\begin{aligned} i &= 30, & z_1 &= -12,25, & z_i &= 12,25, \\ \nu &= 3, & \eta_1 &= -8,662, & \eta_2 &= 0, & \eta_3 &= 8,662, \\ i' &= 4, & i'' &= 14, & i''' &= 25, \end{aligned}$$

в силу чего она обращается в

$$\begin{aligned} & \int_{-12,25}^{-8,662} f(z) dz - \int_{-8,662}^0 f(z) dz + \int_0^{8,662} f(z) dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} [M_1 + M_2 + \dots + M_4 - M_5 - \dots - M_{14} + M_{15} + \dots + \\ &+ M_{25} - M_{26} - \dots - M_{30}] - \frac{(z_5 + 8,662)^2 f(z_4) - (z_4 + 8,662)^2 f(z_5)}{z_5 - z_4} + \\ &+ \frac{z_{15}^2 f(z_{14}) - z_{14}^2 f(z_{15})}{z_{15} - z_{14}} - \frac{(z_{26} - 8,662)^2 f(z_{25}) - (z_{25} - 8,662)^2 f(z_{26})}{z_{26} - z_{25}}. \end{aligned}$$

Отсюда, через подстановку значений

$$f(z_4), f(z_5), f(z_{14}), f(z_{15}), f(z_{25}), f(z_{26}),$$

$$M_1, M_2, \dots, M_{30},$$

$$z_4, z_5, z_{14}, z_{15}, z_{25}, z_{26},$$

ВЫВОДИМ

$$\int_{-12,25}^{-8,662} f(z) dz - \int_{-8,662}^0 f(z) dz + \int_0^{8,662} f(z) dz - \int_{8,662}^{12,25} f(z) dz = 0,000268.$$

Поэтому посредством формулы (29) найдем такое разложение искомой функции:

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{0,016203}{24,5} + \frac{0,016180}{150,06} z + \frac{0,005791}{1838,26} (2z^2 - 100,04) - \\ & - \frac{0,000268}{22519} (4z^3 - 300,12z) + \dots, \end{aligned}$$

которое дает ее выражение в виде полинома, более или менее высокой степени, смотря по числу членов, сохраняемых в этом ряду. Таким образом, останавливаясь на четвертом члене, для ее выражения в виде полинома третьей степени найдем такую формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{0,016203}{24,5} + \frac{0,016180}{150,06} z + \frac{0,005791}{1838,26} (2z^2 - 100,04) - \frac{0,000268}{22519} (4z^3 - 300,12z) = \\ &= 0,0003463 + 0,00011139z + 0,00000630z^2 - 0,0000000475z^3, \end{aligned}$$

которая отличается от выражения, полученного в разделе V, только количествами, которыми можно совершенно пренебречь.

Таблица решений уравнения

$$\int_{-h}^{\eta_{11}} F(x) dx - \int_{\eta_{11}}^{\eta_{12}} F(x) dx + \int_{\eta_{12}}^{\eta_{13}} F(x) dx - \dots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{1\nu}}^h F(x) dx = sA_v,$$

соответствующих наибольшей величине множителя s , где $F(x)$ представляет полином $A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$.

$$n=0$$

$l=0$	$\nu=0$ $s=2h$
-------	-------------------

$$n=1$$

$l=0$	$\nu=0$ $s=2h$
$l=1$	$\nu=1$ $\eta_1=0$ $s=-h^2$

$$n=2$$

$l=0$	$\nu=2, \quad \eta_1=-0,79370 h, \quad \eta_2=0,79370 h$ $s=-1,17480 h$
$l=1$	$\nu=1$ $\eta_1=0$ $s=-h^2$
$l=2$	$\nu=2$ $\eta_1=-0,5 h, \quad \eta_2=0,5 h$ $s=0,5 h^3$

$$n = 3$$

$l = 0$	$\begin{array}{c} \nu = 2 \\ \eta_1 = -0,79370 h, \quad \eta_2 = 79370 h \\ s = -1,17480 h \end{array}$
$l = 1$	$\begin{array}{c} \nu = 3 \\ \eta_1 = -0,84090 h, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0,84090 h \\ s = 0,41421 h^2 \end{array}$
$l = 2$	$\begin{array}{c} \nu = 2 \\ \eta_1 = -0,5 h, \quad \eta_2 = 0,5 h \\ s = 0,5 h^3 \end{array}$
$l = 3$	$\begin{array}{c} \nu = 3 \\ \eta_1 = -0,70711 h, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0,70711 h \\ s = -0,25 h^4 \end{array}$

$$n = 4$$

$l = 0$	$\begin{array}{c} \nu = 4 \\ \eta_1 = -0,89725 h, \quad \eta_2 = -0,60587 h, \quad \eta_3 = 0,60587 h, \quad \eta_4 = 0,89725 h \\ s = 0,83446 h \end{array}$
$l = 1$	$\begin{array}{c} \nu = 3 \\ \eta_1 = -0,84090 h, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0,84090 h \\ s = 0,41421 h^2 \end{array}$
$l = 2$	$\begin{array}{c} \nu = 4 \\ \eta_1 = -0,87305 h, \quad \eta_2 = -0,37305 h, \quad \eta_3 = 0,37305 h, \quad \eta_4 = 0,87305 h \\ s = -0,15139 h^3 \end{array}$
$l = 3$	$\begin{array}{c} \nu = 3 \\ \eta_1 = -0,70711 h, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0,70711 h \\ s = -0,25 h^4 \end{array}$
$l = 4$	$\begin{array}{c} \eta_1 = -0,80902 h, \quad \eta_2 = -0,30902 h, \quad \eta_3 = 0,30902 h, \quad \eta_4 = 0,80902 h \\ s = 0,125 h^5 \end{array}$

$$n = 5$$

$l = 0$	$\begin{array}{c} \nu = 4 \\ \eta_1 = -0,89725 h, \quad \eta_2 = -0,60587 h, \quad \eta_3 = 0,60587 h, \quad \eta_4 = 0,89725 h, \\ s = 0,83446 h \end{array}$
$l = 1$	$\begin{array}{c} \nu = 5 \\ \eta_1 = -0,91682 h, \quad \eta_2 = -0,67418 h, \quad h = 0, \quad \eta_4 = 0,67418 h, \quad \eta_5 = -0,91682 h \\ s = -0,22772 h^2 \end{array}$
$l = 2$	$\begin{array}{c} \nu = 4 \\ \eta_1 = -0,87305 h, \quad \eta_2 = -0,37305 h, \quad \eta_3 = 0,37305 h, \quad \eta_4 = 0,87305 h \\ s = -0,15139 h^3 \end{array}$
$l = 3$	$\begin{array}{c} \nu = 5 \\ \eta_1 = -0,89945 h, \quad \eta_2 = -0,55589 h, \quad \eta_3 = 0, \quad \eta_4 = 0,55589 h, \quad \eta_5 = 0,89945 h \\ s = -0,06901 h^4 \end{array}$
$l = 4$	$\begin{array}{c} \nu = 4 \\ \eta_1 = -0,80902 h, \quad \eta_2 = -0,30902 h, \quad \eta_3 = 0,30902 h, \quad \eta_4 = 0,80902 h \\ s = 0,125 h^5 \end{array}$
$l = 5$	$\begin{array}{c} \nu = 5 \\ \eta_1 = -0,86602 h, \quad \eta_2 = -0,5 h, \quad \eta_3 = 0, \quad \eta_4 = 0,5 h, \quad \eta_5 = 0,86602 h \\ s = -0,0625 h^6 \end{array}$

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ПРИ ПОМОЩИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ*

*Милостивый Государь,
Николай Дмитриевич!*

В ряду различных приложений, сделанных доселе из алгебраических непрерывных дробей, *интерполирование по способу наименьших квадратов* представляет нечто особенное: здесь непрерывные дроби являются как средство для разложения в ряд. *Интерполирование по способу наименьших квадратов* и все ряды, из него вытекающие, не обнимают еще и малой доли тех приложений, которые требуют такого употребления непрерывных дробей и которые, быть может, столь же обширны, как и приложения непрерывных дробей при обыкновенном их употреблении. В самом деле, такие дроби обыкновенно употребляются для определения полиномов X , Y , при которых разность $uX - Y$ наиболее приближается к нулю; здесь предполагается, что функция u способна разлагаться в ряд по нисходящим степеням переменной и что степень приближения к 0 определяется высшею степенью переменной в остатке. Для решения вопроса, представляющегося при *интерполировании по способу наименьших квадратов* (Journal de mathématiques pures et appliquées de M. Liouville, 2-я серия, III том, стр. 295**), нужно было найти полиномы X , Y , при которых разность вида $uX - Y$ приводится наиболее не к нулю, а к некоторой функции (к функции $\frac{1}{x - X}$ по зна-

* Письмо Н. Д. Брашману, прочитанное П. Л. Чебышевым на заседании Московского математического общества 30 (18) сент. 1865 г.

*** Об интерполировании по способу наименьших квадратов см. стр. 287—315 — *Ред.*

коположению вышеупомянутого мемуара), и это привело к новому употреблению непрерывных дробей. Но этот частный случай приведения разности $uX - Y$ по возможности ближе к данной функции не есть единственный, который представляется в анализе и который требует нового употребления непрерывных дробей: какова бы ни была функция v , определение полиномов X, Y , с которыми разность $uX - Y$ наиболее выражает v , также решается помощью непрерывных дробей и формулами, подобными тем, которые служат для интерполирования по способу наименьших квадратов.

Этот вопрос об определении полиномов X, Y в разности $uX - Y$ тем более интересен, что, по простоте своей, он занимает первое место после вопроса, решаемого обыкновенным употреблением непрерывных дробей, когда ищут X, Y под условием, чтобы разность $uX - Y$ была наиболее близка к нулю.

Пусть будет

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

непрерывная дробь, в которую разлагается функция u , и

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 q_2 + P_1}{Q_2 q_2 + Q_1}, \dots$$

ее подходящие дроби. Если мы согласимся означать знаком E целую часть функции, то полиномы X, Y , с которыми разность $uX - Y$ наиболее подходит к функции v , определяются такими рядами:

$$\begin{aligned} X &= (Eq_1 Q_1 v - q_1 E Q_1 v) Q_1 - (Eq_2 Q_2 v - q_2 E Q_2 v) Q_2 + \dots, \\ Y &= -Ev + (Eq_1 Q_1 v - q_1 E Q_1 v) P_1 - (Eq_2 Q_2 v - q_2 E Q_2 v) P_2 + \dots; \end{aligned}$$

эти ряды будут конечные или бесконечные, смотря по тому, каков будет ряд *подходящих* дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

Члены этих рядов, как нетрудно заметить, представляют собою полиномы, которых степени идут возрастаю. Остановленные на соответствующих членах, эти ряды дают значения X и Y в виде целых функций,

степеней более или менее высоких, смотря по числу членов, взятых в выражениях X, Y , и во всяком случае эти значения X, Y будут таковы, что при них разность $uX - Y$ будет столь близка к функции v , как только возможно быть при целых значениях X, Y тех же степеней, а также при степенях более высоких, но ниже степени значений X, Y , получаемых после прибавления члена в их разложении.

Значения X, Y , представляющие столь замечательные свойства, получаются из разложения функции v по значениям функций

$$R_1 = uQ_1 - P_1, \quad R_2 = uQ_2 - P_2, \quad R_3 = uQ_3 - P_3, \dots,$$

которые все степеней ниже нуля и степени их идут уменьшаясь.

Разложение функции v по значениям $R_1, R_2, R_3, \dots$ нетрудно сделать. Если от v отнимем ее целую часть Ev и остаток разделим на R_1 , новый остаток разделим на R_2 и т. д., то ясно, что полученные при этом частные, умноженные на соответственные делители $R_1, R_2, \dots$ в сумме с Ev дадут значение функции v верно до последнего остатка.

Разложение же функции v , получаемое таким образом, как нетрудно увериться, приводится к следующему ряду:

$$v = Ev + (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)R_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)R_2 + \dots,$$

где члены представляют функции, которых степени идут, постоянно уменьшаясь.

В случае наиболее обыкновенном, когда все знаменатели $q_1, q_2, q_3, \dots$ непрерывной дроби

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

суть функции первой степени, этот ряд значительно упрощается. В этом случае все множители, стоящие при $R_1, R_2, R_3, \dots$, обращаются в постоянные количества, и эти *постоянные* приводятся к произведениям

$$A_1L_1, \quad A_2L_2, \quad A_3L_3, \dots,$$

где $A_1, A_2, A_3, \dots$ означают коэффициенты x в знаменателях $q_1, q_2,$

$q_3, \dots$, а $L_1, L_2, L_3, \dots$ коэффициенты $\frac{1}{x}$ в произведениях

$$Q_1 v, \quad Q_2 v, \quad Q_3 v, \quad \dots$$

Вследствие этого в рассматриваемом случае разложение функции v представится так:

$$v = Ev + A_1 L_1 R_1 - A_2 L_2 R_2 + \dots,$$

а значения полиномов X, Y , при которых разность $uX - Y$ наиболее приближается к функции v , будут определяться такими формулами:

$$\begin{aligned} X &= A_1 L_1 Q_1 - A_2 L_2 Q_2 + \dots, \\ Y &= -Ev + A_1 L_1 P_1 - A_2 L_2 P_2 + \dots \end{aligned}$$

В том случае, когда функция v может быть представлена суммой

$$\Phi(x) + \frac{K_1}{x - x_1} + \frac{K_2}{x - x_2} + \frac{K_3}{x - x_3} + \dots,$$

где $\Phi(x)$ — целая функция, а $K_1, K_2, K_3, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$ постоянные, мы находим, полагая $Q_1 = \psi_1(x), Q_2 = \psi_2(x), Q_3 = \psi_3(x), \dots$, такие формулы для определения постоянных $L_1, L_2, L_3, \dots$:

$$\begin{aligned} L_1 &= K_1 \psi_1(x_1) + K_2 \psi_1(x_2) + K_3 \psi_1(x_3) + \dots = \sum K_i \psi_1(x_i), \\ L_2 &= K_1 \psi_2(x_1) + K_2 \psi_2(x_2) + K_3 \psi_2(x_3) + \dots = \sum K_i \psi_2(x_i), \\ L_3 &= K_1 \psi_3(x_1) + K_2 \psi_3(x_2) + K_3 \psi_3(x_3) + \dots = \sum K_i \psi_3(x_i), \\ &\dots \end{aligned}$$

При этих значениях $L_1, L_2, L_3, \dots$ выше показанные ряды дают:

$$\begin{aligned} v &= Ev + A_1 \sum K_i \psi_1(x_i) R_1 - A_2 \sum K_i \psi_2(x_i) R_2 + A_3 \sum K_i \psi_3(x_i) R_3 - \dots, \\ X &= A_1 \sum K_i \psi_1(x_i) Q_1 - A_2 \sum K_i \psi_2(x_i) Q_2 + A_3 \sum K_i \psi_3(x_i) Q_3 - \dots, \\ Y &= -Ev + A_1 \sum K_i \psi_1(x_i) P_1 - A_2 \sum K_i \psi_2(x_i) P_2 + A_3 \sum K_i \psi_3(x_i) P_3 - \dots, \end{aligned}$$

где

$$\psi_1(x) = Q_1, \quad \psi_2(x) = Q_2, \quad \psi_3(x) = Q_3, \quad \dots$$

В частном случае, когда функция u приводится к одному члену $\frac{1}{x+a}$, по первой из предыдущих формул находим такое разложение

выражения $\frac{1}{x-a}$:

$$\frac{1}{x-a} = A_1 \psi_1(a) R_1 - A_2 \psi_2(a) R_2 + A_3 \psi_3(a) R_3 - \dots,$$

где каждый из членов представляет произведение функции a на функцию x , как это замечается в разложении $(x-a)^{-1}$ по биному Ньютона.

Делая в предыдущих формулах

$$u = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_n} = \sum \frac{1}{x-x_i},$$

$$v = \frac{F(x_1)}{x-x_1} + \frac{F(x_2)}{x-x_2} + \dots + \frac{F(x_n)}{x-x_n} = \sum \frac{F(x_i)}{x-x_i},$$

мы получаем значение полиномов X , Y , при которых разность

$$\sum \frac{1}{x-x_i} X - Y$$

наиближе подходит к функции

$$\sum \frac{F(x_i)}{x-x_i};$$

а так как такое приближение составляет необходимое и достаточное условие для того, чтобы полином X приводил сумму

$$\sum [X - F(x_i)]^2$$

к минимуму (что нетрудно показать), то значение X , таким образом получаемое, нам представляет формулу для *интерполирования по способу наименьших квадратов*.

Я не буду останавливаться на приложениях, которые можно сделать из разложения в ряды при помощи непрерывных дробей; сказанного мною достаточно, чтобы видеть, как много интереса представляет предмет, на который я был наведен Вашими лекциями и всегда драгоценными для меня беседами с Вами.

Примите и пр.

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПРИ ПОМОЩИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

§ 1. Пусть будет

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

алгебраическая непрерывная дробь, в которой знаменатели

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

— целые функции переменной x , u — точное значение этой дроби и

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

— ее подходящие дроби, которые получим, останавливаясь в разложении

$$u = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

последовательно на $q_0, q_1, q_2, \dots$. По свойству подходящих дробей для определения величины разностей

$$u - \frac{P_1}{Q_1}, u - \frac{P_2}{Q_2}, u - \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

мы имеем такую формулу:

$$u - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n(Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n)},$$

где ε_n есть величина непрерывной дроби

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+2}} + \frac{1}{q_{n+3}} + \dots$$

и, следовательно, представляет функцию степени ниже 0.

По этой формуле видно, что функции

$$uQ_1 - P_1, uQ_2 - P_2, uQ_3 - P_3, \dots,$$

получаемые от умножения разностей

$$u - \frac{P_1}{Q_1}, u - \frac{P_2}{Q_2}, u - \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

на

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots,$$

будут удовлетворять такому равенству:

$$uQ_n - P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}. \quad (1)$$

Рядами, получаемыми при помощи этих функций, мы теперь и займемся. Для сокращения мы будем изображать эти функции через

$$R_1, R_2, R_3, \dots,$$

полагая

$$uQ_1 - P_1 = R_1, uQ_2 - P_2 = R_2, uQ_3 - P_3 = R_3, \dots$$

§ 2. Так как, по (1), для функций $R_1, R_2, R_3, \dots$ будет иметь место равенство

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n} \quad (2)$$

и $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$, знаменатели подходящих дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots,$$

представляют ряд функций со степенями возрастающими, то ясно, что

в ряду

$$R_1, R_2, R_3, \dots$$

все функции будут степеней отрицательных, и степени их представят ряд понижающийся. Вследствие этого, имея какую-нибудь функцию v , способную разлагаться в ряд по целым нисходящим степеням x , мы для выражения функции v с точностью более или менее значительною, можем найти строку, которой члены будут состоять из целых функций x с множителями $R_1, R_2, R_3, \dots$

В самом деле, если мы согласимся изображать вообще знаком E целую часть функции, разность $v - Ev$ будет представлять функцию отрицательной степени. Деля эту разность на R_1 , мы найдем в частном некоторую целую функцию ω_1 и остаток r_1 степени ниже, чем R_1 . Деля r_1 на R_2 , мы также найдем в частном целую функцию ω_2 , и полученный при этом остаток r_2 будет степени ниже R_2 . Продолжая таким образом деление получаемых остатков на $R_3, R_4, \dots$, мы найдем ряд частных

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

представляющих собою целые функции, и ряд остатков

$$r_1, r_2, r_3, \dots,$$

которых степени ниже степеней $R_1, R_2, R_3, \dots$, и эти функции будут связаны уравнениями

$$\begin{aligned} v - Ev &= \omega_1 R_1 + r_1, \\ r_1 &= \omega_2 R_2 + r_2, \\ r_2 &= \omega_3 R_3 + r_3, \\ &\dots \dots \dots \\ r_{n-1} &= \omega_n R_n + r_n. \end{aligned}$$

Эти же уравнения, по исключении из них $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$, дают такую формулу для выражения функции v :

$$v = Ev + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots + \omega_n R_n + r_n. \quad (3)$$

Так как r_n , по вышесказанному, будет степени ниже, чем R_n , эта формула, верно до членов порядка R_n включительно, представит

функцию v под таким видом:

$$v = Ev + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots + \omega_n R_n,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ — целые функции.

Всякий раз, когда непрерывная дробь

$$u = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

будет бесконечная, ряд функций

$$R_1, R_2, R_3, \dots,$$

определенных ее подходящими дробями, тоже будет бесконечный, и, следовательно, число n в вышенайденном выражении функции v можно будет увеличивать беспредельно, что и даст такой бесконечный ряд для разложения v :

$$v = Ev + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots$$

§ 3. В каждом частном случае, как видели, функции $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, входящие в формулы (3), могут быть найдены последовательно делениями; мы теперь покажем общее выражение этих функций, по которому всякая из них найдется непосредственно.

Для этого мы докажем сначала, что функции

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

будут степени ниже, чем $q_1, q_2, q_3, \dots$, которые заключаются в непрерывной дроби

$$u = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

В самом деле, по § 2, эти функции найдутся в частном при делении

$$v - Ev, r_1, r_2, \dots$$

на

$$R_1, R_2, R_3, \dots;$$

а так как, по замеченному там же, разность $\nu - E\nu$ степени ниже 0, а $r_1, r_2, \dots$ степени ниже, чем $R_1, R_2, \dots$, то ясно, что функции

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

будут степени ниже, чем выражения

$$\frac{1}{R_1}, \frac{R_1}{R_2}, \frac{R_2}{R_3}, \dots$$

Но, по (2), мы находим, что

$$R_1, R_2, R_3, \dots$$

будут одних степеней с функциями

$$\frac{1}{Q_2}, \frac{1}{Q_3}, \frac{1}{Q_4}, \dots,$$

вследствие чего выражения

$$\frac{1}{R_1}, \frac{R_1}{R_2}, \frac{R_2}{R_3}, \dots$$

будут одинаковых степеней с выражениями

$$Q_2, \frac{Q_3}{Q_2}, \frac{Q_4}{Q_3}, \dots$$

Замечая же, что $Q_2, Q_3, Q_4, \dots$ означают знаменателей подходящих дробей

$$\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_4}{Q_4}, \dots,$$

которые получаем, останавливаясь в разложении

$$u = q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots$$

на знаменателях $q_1, q_2, q_3, \dots$, мы находим, что

$$Q_2 = q_1, \quad \frac{Q_3}{Q_2} = q_2 + \frac{Q_1}{Q_2}, \quad \frac{Q_4}{Q_3} = q_3 + \frac{Q_2}{Q_3}, \quad \dots$$

Откуда ясно, что функции

$$Q_2, \frac{Q_3}{Q_2}, \frac{Q_4}{Q_3}, \dots,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{R_1}, \frac{R_1}{R_2}, \frac{R_2}{R_3}, \dots$$

имеют одинаковые степени с знаменателями $q_1, q_2, q_3, \dots$, а потому функции

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

будут степеней низших.

§ 4. Переходя к определению функций

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

мы замечаем, что формула (3), по умножении на Q_n , дает

$$Q_n v = Q_n E v + \omega_1 R_1 Q_n + \omega_2 R_2 Q_n + \dots + \omega_n R_n Q_n + r_n Q_n.$$

Так как r_n степени ниже R_n , а R_n , по (2), одной степени с $\frac{1}{Q_{n+1}}$, то член $r_n Q_n$ не может содержать целой части; член же $Q_n E v$, очевидно, будет содержать одну лишь целую часть. Вследствие этого, определяя по предыдущей формуле величину $E Q_n v$, найдем

$$E Q_n v = Q_n E v + E \omega_1 R_1 Q_n + E \omega_2 R_2 Q_n + \dots + E \omega_n R_n Q_n,$$

а это, по вычитании из предыдущей формулы, даст

$$Q_n v - E Q_n v = \omega_1 R_1 Q_n - E \omega_1 R_1 Q_n + \omega_2 R_2 Q_n - E \omega_2 R_2 Q_n + \dots + \omega_n R_n Q_n - E \omega_n R_n Q_n + r_n Q_n.$$

Умножая же эту формулу на q_n и определяя по ней $E q_n (Q_n v - E Q_n v)$, мы получаем такое равенство:

$$E q_n (Q_n v - E Q_n v) = E q_n (\omega_1 R_1 Q_n - E \omega_1 R_1 Q_n) + E q_n (\omega_2 R_2 Q_n - E \omega_2 R_2 Q_n) + \dots + E q_n (\omega_n R_n Q_n - E \omega_n R_n Q_n). \quad (4)$$

Что касается члена $E q_n r_n Q_n$, то он оказывается равным нулю; ибо r_n степени ниже R_n , а R_n , по (2), одной степени с $\frac{1}{Q_{n+1}}$, вследствие чего

выражение $q_n r_n Q_n$ будет степени ниже, чем $q_n Q_n \frac{1}{Q_{n+1}}$, и, следовательно, степени отрицательной, так как $q_n Q_n \frac{1}{Q_{n+1}}$, где $Q_{n+1} = Q_n q_n + Q_{n-1}$, представляет собою выражение степени нулевой.

§ 5. Чтобы вывести из полученного нами равенства (4) формулу для определения функции ω_n , мы найдем значение членов, входящих во вторую часть этого равенства. Для этого мы замечаем, что, по (1),

$$uQ_n = P_n + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}.$$

Умножая это на Q_m , где m — какое-нибудь из чисел $1, 2, 3, \dots, n-1, n$, мы получаем

$$uQ_n Q_m = P_n Q_m + \frac{(-1)^{n-1} Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}.$$

С другой стороны, замечая, что, по нашему знакоположению,

$$R_m = uQ_m - P_m,$$

мы находим

$$uQ_m = R_m + P_m.$$

Внося отсюда величину uQ_m в предыдущую формулу, мы имеем

$$R_m Q_n + P_m Q_n = P_n Q_m + \frac{(-1)^{n-1} Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n},$$

откуда получается такое выражение произведения:

$$R_m Q_n = P_n Q_m - P_m Q_n + \frac{(-1)^{n-1} Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}. \quad (5)$$

Определяя по этой формуле величину $E\omega_m R_m Q_n$ и замечая, что $\omega_m (P_n Q_m - P_m Q_n)$ есть функция целая, мы находим

$$E\omega_m R_m Q_n = \omega_m (P_n Q_m - P_m Q_n) + E \frac{(-1)^{n-1} \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}.$$

Рассматривая же дробь

$$\frac{(-1)^{n-1} \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n},$$

где множитель ω_m , по § 3, степени ниже q_m , мы замечаем, что здесь числитель будет степени ниже, чем $q_m Q_m$, и, следовательно, ниже, чем Q_{m+1} , ибо $Q_{m+1} = Q_m q_m + Q_{m-1}$. А потому дробь эта представит выражение степени ниже, чем

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_{n+1}},$$

и, следовательно, в рассматриваемом нами случае, где m не более n , будет функция отрицательной степени, так как при $m = n$ или $m < n$ степень функции Q_{m+1} будет не более степени Q_{n+1} . Вследствие этого в вышенайденном выражении $E\omega_m R_m Q_n$ член

$$E \frac{(-1)^{n-1} \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}$$

будет равен нулю, и оно приведет к следующему:

$$E\omega_m R_m Q_n = \omega_m (P_n Q_m - P_m Q_n).$$

А так как, по (5),

$$\omega_m R_m Q_n = \omega_m (P_n Q_m - P_m Q_n) + \frac{(-1)^{n-1} \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n},$$

то, по выше найденному, будем иметь

$$\omega_m R_m Q_n - E\omega_m R_m Q_n = \frac{(-1)^{n-1} \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n};$$

откуда для определения величины

$$Eq_n (\omega_m R_m Q_n - E\omega_m R_m Q_n)$$

получается такая формула:

$$Eq_n (\omega_m R_m Q_n - E\omega_m R_m Q_n) = E \frac{(-1)^{n-1} q_n \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}. \quad (6)$$

По этой-то формуле мы и найдем значение членов второй части равенства (4), что и послужит нам для определения выражения функции ω_n .

§ 6. Мы видели (§ 5), что дробь

$$\frac{(-1)^{n-1} \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}$$

представляет выражение степени ниже, чем $\frac{Q_{m+1}}{Q_{n+1}}$, а потому дробь

$$\frac{(-1)^{n-1}\omega_m Q_m q_n}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}$$

будет степени ниже, чем

$$\frac{q_n Q_{m+1}}{Q_{n+1}},$$

или

$$\frac{q_n Q_{m+1}}{Q_n q_n + Q_{n-1}} = \frac{Q_{m+1}}{Q_n + \frac{1}{q_n} Q_{n-1}},$$

откуда ясно, что от $m=1$ до $m=n-1$ эта дробь будет представлять выражения отрицательной степени. Следовательно, для всех этих величин m будет

$$E \frac{(-1)^{n-1} q_n \omega_m Q_m}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n} = 0,$$

и по найденному выше значению выражения

$$E q_n (\omega_m R_m Q_n - E \omega_m R_m Q_n)$$

мы заключаем, что при

$$m = 1, 2, \dots, n-1$$

получится

$$E q_n (\omega_m R_m Q_n - E \omega_m R_m Q_n) = 0.$$

Делая же в формуле (6)

$$m = n,$$

мы имеем

$$E q_n (\omega_n R_n Q_n - E \omega_n R_n Q_n) = E \frac{(-1)^{n-1} q_n \omega_n Q_n}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n}.$$

Чтобы найти на основании этой формулы значение

$$E q_n (\omega_n R_n Q_n - E \omega_n R_n Q_n),$$

мы замечаем, что выражение

$$E \frac{(-1)^{n-1} q_n \omega_n Q_n}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n},$$

по внесении в него $Q_n q_n + Q_{n-1}$ на место Q_{n+1} , приводится к

$$E \frac{(-1)^{n-1} q_n \omega_n Q_n}{Q_n q_n + Q_{n-1} + \varepsilon_n Q_n},$$

что иначе можно написать так:

$$E \left((-1)^{n-1} \omega_n - (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon_n + \frac{Q_{n-1}}{Q_n}}{q_n + \varepsilon_n + \frac{Q_{n-1}}{Q_n}} \omega_n \right),$$

а это, очевидно, приводится к $(-1)^{n-1} \omega_n$; ибо второй член выражения, стоящего здесь под знаком E , представляет функцию отрицательной степени, так как ω_n степени ниже q_n , Q_{n-1} степени ниже Q_n , а ε_n степени отрицательной.

На основании вышепоказанного мы заключаем, что выражение

$$E q_n (\omega_m R_m Q_n - E \omega_m R_m Q_n)$$

остается равным нулю при $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$ и обращается в

$$(-1)^{n-1} \omega_n$$

при $m = n$, а вследствие этого формула (4) приводится к такому равенству:

$$E q_n (Q_n v - E Q_n v) = (-1)^{n-1} \omega_n,$$

откуда для определения ω_n получается такая формула:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} E q_n (Q_n v - E Q_n v). \quad (7)$$

Делая здесь

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

мы найдем выражение всех множителей

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

входящих в разложение функции v по формуле

$$v = E v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots$$

Так как разность

$$Q_n v - E Q_n v$$

равняется дробной части произведения $Q_n v$, то, по формуле (7), определение функции ω_n приводится к определению целой части в произведении, получаемом при умножении q_n на дробную часть $Q_n v$.

С другой стороны, раскрывая в формуле (7) скобку, мы находим

$$\omega_n = (-1)^{n-1} [E q_n Q_n v - E (q_n E Q_n v)],$$

а так как $q_n E Q_n v$ есть функция целая, то

$$E (q_n E Q_n v) = q_n E Q_n v,$$

и это выражение ω_n приводится к такому виду:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} (E q_n Q_n v - q_n E Q_n v).$$

Замечая же, что ω_n есть целая функция степени ниже, чем q_n , и что член $q_n E Q_n v$ есть произведение q_n на целую функцию, мы из этой формулы заключаем, что ω_n , с одним из двух знаков $\pm$, будет представлять остаток, получаемый при делении на q_n функции $E q_n Q_n v$, т. е. целой части произведения $q_n Q_n v$.

§ 7. Показанное нами разложение функции v по формуле

$$v = E v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots$$

особенно заслуживает внимания потому, что оно доставляет решение такого вопроса:

Найти значения полиномов X, Y , при которых разность $uX - Y$ выражает данную функцию v с наибольшей степенью точности, которую можно получить, оставляя полином X степени не выше данного предела.

Полиномы X, Y , для которых разность $uX - Y$ наиболее подходит к нулю, как известно, получаются непосредственно разложением u в непрерывную дробь, и через это алгебраические непрерывные дроби представляют средство для решения различных вопросов в анализе. Полиномы X, Y , для которых разность $uX - Y$ наиболее подходит не к нулю, а к какой-нибудь данной функции, не получаются непосредственно разложением u в непрерывную дробь, но, как увидим, определяются особыми рядами, члены которых находятся через разложение u

в непрерывную дробь, и это для алгебраических непрерывных дробей открывает новое поле приложений, пример которых можно видеть в нашем мемуаре „О непрерывных дробях“, где выведена формула для интерполирования по способу наименьших квадратов.

Пусть будет m предел степени полинома X , который вместе с полиномом Y ищется под условием, чтобы разность $uX - Y$ наиболее подходила к данной функции v , и пусть Q_n будет тот из знаменателей подходящих дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots,$$

который в ряду знаменателей

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

последний имеет степень не выше m . В этом предположении искомый полином X будет степени ниже, чем Q_{n+1} . Изображая через F_n и ρ_n частное и остаток, получаемые при делении X на Q_n , через F_{n-1} и ρ_{n-1} частное и остаток, получаемые при делении ρ_n на Q_{n-1} , и т. д. и замечая, что остаток при делении на $Q_1 = 1$ будет нуль, мы находим такой ряд уравнений:

$$\begin{aligned} X &= F_n Q_n + \rho_n, \\ \rho_n &= F_{n-1} Q_{n-1} + \rho_{n-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \rho_3 &= F_2 Q_2 + \rho_2, \\ \rho_2 &= F_1 Q_1, \end{aligned}$$

откуда, по исключении

$$\rho_n, \rho_{n-1}, \dots, \rho_2,$$

выходит такое выражение искомого полинома X :

$$X = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_{n-1} Q_{n-1} + F_n Q_n, \quad (8)$$

где

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$$

неизвестные целые функции. Так как эти функции получаются от деления функций

$$\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n, X$$

на

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n,$$

то они будут одинаковых степеней с выражениями

$$\frac{\rho_2}{Q_1}, \frac{\rho_3}{Q_2}, \dots, \frac{\rho_n}{Q_{n-1}}, \frac{X}{Q_n}.$$

Но функции

$$\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n,$$

получаемые в остатке при делении на

$$Q_2, Q_3, \dots, Q_n,$$

будут степеней ниже, чем

$$Q_2, Q_3, \dots, Q_n;$$

так же X будет, по вышезамеченному, степени ниже, чем

$$Q_{n+1};$$

а потому выражения

$$\frac{\rho_2}{Q_1}, \frac{\rho_3}{Q_2}, \dots, \frac{\rho_n}{Q_{n-1}}, \frac{X}{Q_n}$$

будут степеней ниже, чем

$$\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_2}, \dots, \frac{Q_n}{Q_{n-1}}, \frac{Q_{n+1}}{Q_n},$$

и, следовательно, ниже, чем $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$; ибо, по свойству подходящих дробей, находим

$$\begin{aligned} \frac{Q_2}{Q_1} &= q_1, & \frac{Q_3}{Q_2} &= q_2 + \frac{Q_1}{Q_2}, & \dots, & & \frac{Q_n}{Q_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}, \\ & & & & & & \frac{Q_{n+1}}{Q_n} &= q_n + \frac{Q_{n-1}}{Q_n}. \end{aligned}$$

Из этого видно, что в разложении (8) искомого полинома X множители

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$$

будут функции степеней низших сравнительно с знаменателями

$$q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n.$$

§ 8. Для определения функций

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n,$$

входящих в выражение искомого полинома X по формуле

$$X = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_{n-1} Q_{n-1} + F_n Q_n,$$

и для определения Y , другого неизвестного полинома, мы замечаем, что, по условию задачи, с искомыми полиномами X, Y разность

$$uX - Y$$

должна наиболее выражать данную функцию v , а это требует, чтобы выражение

$$uX - Y - v$$

наиближе подходило к нулю и, следовательно, чтобы полином Y выражал наиболее значение функции $uX - v$.

Откуда видно, что этот полином должен равняться целой части выражения $uX - v$, и, следовательно, по нашему знакоположению, для определения полинома Y будем иметь такое равенство:

$$Y = E(uX - v). \quad (9)$$

С другой стороны, находя по этому равенству

$$uX - Y - v = uX - v - E(uX - v),$$

мы заключаем, что степень точности, с которою формула $uX - Y$ дает выражение функции v , определяется степенью разности

$$uX - v - E(uX - v),$$

или, что одно и то же, степенью дробной части выражения $uX - v$.

Следовательно, по требованию задачи, дробная часть выражения

$$uX - v$$

должна быть сделана степени по возможности низшей.

На основании этого, имея разложение функции v по формуле

$$v = Ev + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots,$$

мы легко можем найти значение множителей

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$$

в выражении искомого полинома X по формуле

$$X = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_{n-1} Q_{n-1} + F_n Q_n$$

и определить другой неизвестный полином Y .

Для этого мы вносим в выражение

$$uX - v$$

вышепоказанные разложения полинома X и функции v , что дает нам

$$uX - v = F_1 Q_1 u + F_2 Q_2 u + \dots + F_{n-1} Q_{n-1} u + F_n Q_n u - Ev - \omega_1 R_1 - \\ - \omega_2 R_2 - \dots - \omega_n R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots$$

Но, по нашему знакоположению,

$$R_1 = Q_1 u - P_1, \quad R_2 = Q_2 u - P_2, \quad \dots, \quad R_n = Q_n u - P_n.$$

Внося отсюда значение произведений

$$Q_1 u, Q_2 u, \dots, Q_n u$$

в предыдущую формулу, мы находим

$$uX - v = -Ev + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_n P_n + (F_1 - \omega_1) R_1 + \\ + (F_2 - \omega_2) R_2 + \dots + (F_n - \omega_n) R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots$$

Рассматривая это выражение разности $uX - v$, мы замечаем, что здесь члены

$$-Ev + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_n P_n$$

составляют функцию целую; остальные же представляют функции отрицательных степеней, как это видно из того, что множители $R_1, R_2,$

$R_3, \dots$, по § 2, одинаковых степеней с выражениями

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1 q_1}, \quad \frac{1}{Q_3} = \frac{1}{Q_2 q_2 + Q_1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{Q_{n+1}} = \frac{1}{Q_n q_n + Q_{n-1}},$$

а множители

$$F_1 - \omega_1, \quad F_2 - \omega_2, \quad \dots, \quad F_n - \omega_n, \quad \omega_{n+1}, \quad \dots$$

состоят из функций

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots,$$

которые (§ 3, 7) степеней ниже, чем $q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots$. На основании этого для величины целой части выражения $uX - v$ находим

$$-Ev + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_n P_n,$$

а для величины дробной части

$$(F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \dots + (F_n - \omega_n) R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots;$$

первое нам дает, по (9), такое выражение полинома Y :

$$Y = -Ev + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_n P_n,$$

второе же нам послужит средством для определения множителей

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

входящих в выражение искомым полиномов X и Y .

§ 9. Рассматривая состав членов в вышенайденном выражении дробной части функции

$$uX - v,$$

мы замечаем (§ 8), что множители

$$R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}, \dots$$

одинаковых степеней с выражениями

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1 q_1}, \quad \frac{1}{Q_3} = \frac{1}{Q_2 q_2 + Q_1}, \quad \dots, \\ \frac{1}{Q_{n+1}} = \frac{1}{Q_n q_n + Q_{n-1}}, \quad \frac{1}{Q_{n+2}} = \frac{1}{Q_{n+1} q_{n+1} + Q_n}, \quad \dots,$$

а множители

$$F_1 - \omega_1, F_2 - \omega_2, \dots, F_n - \omega_n, \omega_{n+1}, \dots$$

степеней ниже, чем

$$q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots,$$

но не ниже x^0 , так как они состоят из функций целых. Вследствие же этого мы находим, что член

$$(F_1 - \omega_1) R_1$$

будет степени ниже, чем

$$\frac{q_1}{Q_2} = \frac{q_1}{Q_1 q_1} = \frac{1}{Q_1},$$

и не ниже, чем

$$\frac{x^0}{Q_2} = \frac{1}{Q_2};$$

член

$$(F_2 - \omega_2) R_2$$

будет степени ниже, чем

$$\frac{q_2}{Q_3} = \frac{q_2}{Q_2 q_2 + Q_1} = \frac{1}{Q_2 + \frac{Q_1}{q_2}},$$

и не ниже, чем

$$\frac{x^0}{Q_3} = \frac{1}{Q_3},$$

и т. д. По этим же пределам степеней членов в ряду

$$(F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \dots + (F_n - \omega_n) R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots$$

видно, что здесь степени членов идут постоянно понижаясь, и, следовательно, дробная часть выражения

$$uX - v,$$

определяемая этим рядом, будет степени тем ниже, чем больше членов в начале этого ряда сократится.

На основании этого нетрудно найти значение множителей

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

доставляющих решение нашей задачи. По условиям этой задачи, полином X , который выражается у нас формулою

$$X = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_n Q_n,$$

должен быть степени не ниже данного предела m , что, по § 7, предполагает F_n степени не выше $\frac{x^m}{Q_n}$, и, по § 8, этот полином должен делать дробную часть выражения

$$uX - v$$

по возможности низшей степени, что, как сейчас видели, требует сокращения по возможности большого числа членов в начале ряда

$$(F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \dots + (F_n - \omega_n) R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots$$

Так как здесь первые $n - 1$ членов сокращаются от принятия

$$F_1 = \omega_1, F_2 = \omega_2, \dots, F_{n-1} = \omega_{n-1}$$

и эти значения множителей $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ как степеней низших сравнительно с

$$q_1, q_2, \dots, q_{n-1},$$

по § 7, возможны, мы для решения нашей задачи находим

$$F_1 = \omega_1, F_2 = \omega_2, \dots, F_{n-1} = \omega_{n-1}.$$

При этих величинах множителей $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ дробная часть выражения $uX - v$ приводится к следующему:

$$(F_n - \omega_n) R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots,$$

где первый член может быть уничтожен приличным выбором множителя F_n только в том случае, когда

$$F_n = \omega_n$$

будет степени не выше $\frac{x^m}{Q_n}$, или, что одно и то же, когда $\omega_n Q_n$ будет

степени не выше m , предела степени полинома X . В противном случае, по условию нашей задачи, множитель F_n должен быть степени ниже ω_n и, следовательно, значение его не может иметь влияния на степень выражения

$$(F_n - \omega_n) R_n - \omega_{n+1} R_{n+1} - \dots$$

А потому при $\omega_n Q_n$ степени выше m за множитель F_n можно взять всякую целую функцию, для которой произведение $F_n Q_n$ не будет степени выше m , предела степени полинома X . Но из всех значений F_n , удовлетворяющих этому условию, особенно заслуживает внимания значение ее, *равное нулю*, так как при этом получается простейшая величина полиномов X, Y , доставляющих решение нашей задачи.

На основании показанного нами относительно множителей

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

в формулах

$$\begin{aligned} X &= F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_n Q_n, \\ Y &= -Ev + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_n Q_n \end{aligned}$$

видно, что ряд

$$\omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \omega_3 Q_3 + \dots,$$

остановленный на последнем члене степени не выше m , даст величину полинома X в решении нашей задачи и что ряд

$$-Ev + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \dots,$$

остановленный на соответствующем члене, даст величину полинома Y в этом решении. Это решение будет единственно возможное, если первый из откинутых членов в ряду

$$\omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \omega_3 Q_3 + \dots$$

будет иметь множителем Q_n степени выше m , предела степени X .

В противном случае это будет простейшее из бесконечного множества решений нашей задачи, которые все будут давать выражение v с одинаковою степенью точности, и все они получатся из простейшего решения, если в нем к величинам полиномов X, Y прибавятся члены

$$FQ_n, FP_n,$$

где F — какая-нибудь целая функция, которая по умножении на Q_n дает произведение степени не выше m , предела степени полинома X .

Таково решение нашей задачи в общем ее виде.

§ 10. Множители

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

входящие в разложение функции v по формуле

$$v = Ev + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots$$

и в ряды

$$\begin{aligned} X &= \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \omega_3 Q_3 + \dots, \\ Y &= -Ev + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 + \dots, \end{aligned}$$

определяющие значение полиномов X, Y , при которых разность $uX - Y$ наиболее выражает функцию v , найдутся, как видели (§ 6), по формуле

$$\omega_n = (-1)^{n-1} E q_n (Q_n v - E Q_n v),$$

или

$$\omega_n = (-1)^{n-1} (E q_n Q_n v - q_n E Q_n v).$$

В случае, обыкновенно представляющемся, когда знаменатели $q_1, q_2, q_3, \dots$ в непрерывной дроби

$$u = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}$$

все суть функции первой степени, множители

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

обращаются в постоянные количества, и величина их легко определяется.

В самом деле, если

$$q_1 = A_1 x + B_1, \quad q_2 = A_2 x + B_2, \quad \dots, \quad q_n = A_n x + B_n, \quad \dots,$$

то, по первому из вышепоказанных выражений множителя ω_n , находим

$$\omega_n = (-1)^{n-1} E (A_n x + B_n) (Q_n v - E Q_n v).$$

С другой стороны, замечая, что разность

$$Q_n v - E Q_n v$$

в разложении своем не будет содержать степеней x , ни положительных, ни нулевой, мы заключаем, что эта разность будет разлагаться в такой ряд:

$$\frac{L_n}{x} + \frac{M_n}{x^2} + \frac{N_n}{x^3} + \dots$$

А так как это, по умножении на $A_n x + B_n$, дает

$$A_n L_n + \frac{A_n M_n + L_n B_n}{x} + \dots,$$

то, отбрасывая здесь дробную часть по вышепоказанной формуле, для определения ω_n находим

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n L_n,$$

где, как видели, A_n есть коэффициент x в знаменателе q_n , а L_n есть коэффициент при $\frac{1}{x}$ в разности $Q_n v - E Q_n v$, или, что одно и то же, в выражении $Q_n v$, так как член $E Q_n v$ не содержит отрицательных степеней x .

Находя по этой формуле значение множителей

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

мы, по вышепоказанному, для разложения функции v получаем такой ряд:

$$v = E v + A_1 L_1 R_1 - A_2 L_2 R_2 + A_3 L_3 R_3 - \dots,$$

и для определения полиномов X, Y , при которых разность $uX - Y$ наиболее выражает функцию v , получаем такие ряды:

$$\begin{aligned} X &= A_1 L_1 Q_1 - A_2 L_2 Q_2 + A_3 L_3 Q_3 - \dots, \\ Y &= -E v + A_1 L_1 P_1 - A_2 L_2 P_2 + A_3 L_3 P_3 - \dots, \end{aligned}$$

где

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

означают коэффициенты при x в знаменателях непрерывной дроби

$$u = q_0 + \frac{1}{A_1x + B_1} + \frac{1}{A_2x + B_2} + \frac{1}{A_3x + B_3} + \dots,$$

а

$$L_1, L_2, L_3, \dots$$

коэффициенты при $\frac{1}{x}$ в разложении произведений

$$Q_1v, Q_2v, Q_3v, \dots$$

по нисходящим степеням переменной x .

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ

§ 1. В мемуаре под заглавием „О непрерывных дробях“* я дал формулу для интерполирования по *способу наименьших квадратов*, каковы бы ни были известные величины интерполируемой функции. Теперь я покажу упрощения, допускаемые этою формулою в случае особенно замечательном, а именно, когда известные величины функции взяты через равные промежутки. В этом случае общая формула интерполирования, соответствующая формуле Лагранжа, приводится к ряду, соответствующему формуле интерполирования Ньютона и, подобно ей, заключающему в своих членах конечные разности данных величин, последовательно в порядках 1, 2, 3, ..., что в практическом отношении, как известно, особенно выгодно. Этот ряд дает выражение интерполируемых величин под видом полиномов большей или меньшей степени, смотря по числу членов, в нем удерживаемых, и полиномы эти получаются с теми самыми коэффициентами, которые находят по способу наименьших квадратов, решая целую систему уравнений, составляемых особенно в каждом частном предположении относительно степени искомого выражения. Легко видеть, до какой степени разыскание таких выражений упрощается употреблением нашего ряда, из которого они прямо получаются, и последовательно всех степеней, начиная с нулевой. Но этим еще не ограничивается вся выгода употребления его при интерполировании: этот ряд представляет также особенные удобства для того, чтобы видеть, сколькими членами, или, что одно и то же, какими степенями можно ограничиться в искомом выражении для интерполирования.

* См. стр. 256—286.— *Ред.*

При обыкновенных приемах интерполирования по способу наименьших квадратов для этого нужно перечислять все данные величины по формуле, находимой в каждом частном предположении относительно степени ее. Это тем более затруднительно, что такие вычисления приходится повторять несколько раз, пока не дойдешь до выражения, представляющего данные с достаточной точностью, так как степень такого выражения трудно угадать вперед. В этом отношении наша формула представляет ту важную выгоду, что, прибавляя по ней член за членом в искомом выражении для интерполирования, мы в то же время прямо можем видеть, как последовательно убывает сумма квадратов погрешностей, представляемых этим выражением при определении по нему всех данных величин, откуда легко получается и среднее квадратическое этих погрешностей, по которому можно судить о достаточности взятых членов в искомом выражении.

§ 2. Пусть будет

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$$

ряд данных величин функции, соответствующих таким величинам переменной x :

$$x = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Прилагая к этому случаю общую формулу интерполирования*, мы находим для выражения u полиномом какой-нибудь степени, с коэффициентами, определяемыми правилом наименьших квадратов, такой ряд:

$$u = \frac{\sum_0^n \psi_0(i) u_i}{\sum_0^n \psi_0^2(i)} \psi_0(x) + \frac{\sum_0^n \psi_1(i) u_i}{\sum_0^n \psi_1^2(i)} \psi_1(x) + \frac{\sum_0^n \psi_2(i) u_i}{\sum_0^n \psi_2^2(i)} \psi_2(x) + \dots, \quad (1)$$

где

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$$

означают знаменателей в подходящих дробях, получаемых от разложения суммы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n+1}$$

* Формула (6) вышеупомянутого мемуара.

в непрерывную дробь вида

$$q_0 + \frac{L_1}{q_1} + \frac{L_2}{q_2} + \dots,$$

$L_1, L_2, L_3, \dots$ — постоянные величины.

В частном случае, нами рассматриваемом, функции

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$$

легко определяются без помощи разложения суммы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n+1}$$

в непрерывную дробь, и при этом, как мы увидим, открывается весьма замечательный закон их составления, вследствие чего ряд (1) и приводится к тому удобному для приложения виду, о котором сказано в предыдущем параграфе.

§ 3. Чтобы найти функции

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots,$$

не прибегая к разложению суммы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n+1}$$

в непрерывную дробь, мы замечаем, что, по доказанному в вышеупомянутом мемуаре, эти функции, с одной стороны, будут иметь степенями

$$0, 1, 2, \dots,$$

а с другой — они удовлетворяют таким уравнениям:

$$\sum_0^n \psi_0(i) \psi_\lambda(i) = 0, \quad \sum_0^n \psi_1(i) \psi_\lambda(i) = 0, \quad \dots \quad \sum_0^n \psi_{\lambda-1}(i) \psi_\lambda(i) = 0,$$

или, что одно и то же,

$$\sum_0^n \phi_\mu(i) \phi_\lambda(i) = 0, \quad (2)$$

при $\mu < \lambda$.

Этими же свойствами, как нетрудно убедиться, функции

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$$

определяются вполне, кроме постоянных множителей, которые в них остаются совершенно произвольными, пока не сделано никакого частного предположения относительно постоянных $L_1, L_2, L_3, \dots$ в непрерывной дроби

$$q_0 + \frac{L_1}{q_1} + \frac{L_2}{q_2} + \dots,$$

происходящей от разложения суммы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n+1},$$

и которые в формуле (1), очевидно, сокращаются.

Чтобы показать, что вышеприведенные свойства функций $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ определяют их верно до постоянных множителей, пусть будет

$$f(x)$$

целая функция, подобно $\phi_\lambda(x)$, степени λ и, подобно ей, удовлетворяющая уравнениям

$$\sum_0^n \phi_0(i) f(i) = 0, \quad \sum_0^n \phi_1(i) f(i) = 0, \quad \dots, \quad \sum_0^n \phi_{\lambda-1}(i) f(i) = 0.$$

Так как

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{\lambda-1}(x), \phi_\lambda(x)$$

представляют ряд целых функций, степени которых

$$0, 1, 2, \dots, \lambda-1, \lambda,$$

то целая функция $f(x)$ степени λ всегда представится суммой

$$A_0\psi_0(x) + A_1\psi_1(x) + \dots + A_{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}(x) + A_\lambda\psi_\lambda(x),$$

где

$$A_0, A_1, \dots, A_{\lambda-1}, A_\lambda$$

постоянные коэффициенты.

Внося же эту величину $f(x)$ в предыдущие уравнения, мы находим

$$\sum_0^n \psi_0(i) f(i) = A_0 \sum_0^n \psi_0^2(i) + A_1 \sum_0^n \psi_0(i) \psi_1(i) + \dots + A_\lambda \sum_0^n \psi_0(i) \psi_\lambda(i) = 0,$$

$$\sum_0^n \psi_1(i) f(i) = A_0 \sum_0^n \psi_0(i) \psi_1(i) + A_1 \sum_0^n \psi_1^2(i) + \dots + A_\lambda \sum_0^n \psi_1(i) \psi_\lambda(i) = 0,$$

.....

$$\begin{aligned} \sum_0^n \psi_{\lambda-1}(i) f(i) = A_0 \sum_0^n \psi_{\lambda-1}(i) \psi_0(i) + \dots + A_{\lambda-1} \sum_0^n \psi_{\lambda-1}^2(i) + \\ + A_\lambda \sum_0^n \psi_{\lambda-1}(i) \psi_\lambda(i) = 0, \end{aligned}$$

что по (2) приводится к таким равенствам:

$$A_0 \sum_0^n \psi_0^2(i) = 0, \quad A_1 \sum_0^n \psi_1^2(i) = 0, \quad \dots, \quad A_{\lambda-1} \sum_0^n \psi_{\lambda-1}^2(i) = 0,$$

а это предполагает

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \dots, \quad A_{\lambda-1} = 0,$$

так как суммы квадратов

$$\sum_0^n \psi_0^2(i), \quad \sum_0^n \psi_1^2(i), \quad \dots, \quad \sum_0^n \psi_{\lambda-1}^2(i),$$

составленные из действительных функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{\lambda-1}(x)$, не могут обращаться в 0. Равенство же нулю коэффициентов

$$A_0, A_1, \dots, A_{\lambda-1}$$

в формуле

$$f(x) = A_0\psi_0(x) + A_1\psi_1(x) + \dots + A_{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}(x) + A_\lambda\psi_\lambda(x)$$

показывает, что функция $f(x)$, удовлетворяющая, подобно $\psi_\lambda(x)$, вышеприведенным условиям, равняется

$$A_\lambda \psi_\lambda(x),$$

где A_λ — постоянный коэффициент, и, следовательно, она только таким коэффициентом и может отличаться от функции $\psi_\lambda(x)$, что и требовалось доказать.

§ 4. На основании доказанного нами, определение функций

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots,$$

верное до постоянных множителей, сведится вообще на отыскивание целой функции степени λ , способной удовлетворить уравнению

$$\sum_0^n \psi_\mu(i) f(i) = 0, \quad (3)$$

где $\psi_\mu(x)$ есть целая функция степени μ , а μ есть число, меняющееся от 0 до $\lambda - 1$ включительно.

Чтобы облегчить определение функции $f(i)$ под этим условием, мы будем ее рассматривать как выражение разности порядка λ некоторой функции $F(i)$. В этом предположении, внося в предыдущее уравнение величину $f(i)$ по формуле

$$f(i) = \Delta^\lambda F(i), \quad (4)$$

мы его приводим к такому виду:

$$\sum \psi_\mu(i) \Delta^\lambda F(i) = 0.$$

Замечая же, что всякая сумма вида $\sum U_i \Delta^\lambda V_i$ может быть преобразована таким образом:

$$\begin{aligned} \sum U_i \Delta^\lambda V_i = & U_{i-1} \Delta^{\lambda-1} V_i - \Delta U_{i-2} \Delta^{\lambda-2} V_i + \dots - (-1)^{\lambda-1} U_{i-\lambda} V_i + \\ & + (-1)^\lambda \sum \Delta^\lambda U_{i-\lambda} V_i + C \end{aligned} \quad (5)$$

(в чем нетрудно убедиться, взявши конечные разности первой и второй

части этого равенства), мы находим по этой формуле

$$\sum \phi_{\mu}(i) \Delta^{\lambda} F(i) = \phi_{\mu}(i-1) \Delta^{\lambda-1} F(i) - \Delta \phi_{\mu}(i-2) \Delta^{\lambda-2} F(i) + \dots - \\ - (-1)^{\lambda} \Delta^{\lambda-1} \phi_{\mu}(i-\lambda) F(i) + (-1)^{\lambda} \sum \Delta^{\lambda} \phi_{\mu}(i-\lambda) F(i) + C;$$

а так как у нас $\phi_{\mu}(x)$ — целая функция степени, меньшей λ , то $\Delta^{\lambda} \phi_{\mu}(i-\lambda)$ равняется нулю, и предыдущее выражение суммы $\sum \phi_{\mu}(i) \Delta^{\lambda} F(i)$ приводится к следующему:

$$\sum \phi_{\mu}(i) \Delta^{\lambda} F(i) = \phi_{\mu}(i-1) \Delta^{\lambda-1} F(i) - \Delta \phi_{\mu}(i-2) \Delta^{\lambda-2} F(i) + \dots - \\ - (-1)^{\lambda} \Delta^{\lambda-1} \phi_{\mu}(i-\lambda) F(i) + C,$$

откуда видно, что уравнение

$$\sum_0^n \phi_{\mu}(i) \Delta^{\lambda} F(i) = 0$$

будет удовлетворено, если при пределах

$$i=0, \quad i=n$$

функции

$$\Delta^{\lambda-1} F(i), \quad \Delta^{\lambda-2} F(i), \quad \dots, \quad F(i)$$

обращаются в 0, или, что одно и то же, если при этих величинах выражения

$$F(i), F(i+1), F(i+2), \dots, F(i+\lambda-1)$$

равны нулю; ибо в этом случае функция $F(i)$ и ее $\lambda-1$ конечных разностей, при $i=0$ и $i=n$, будут равняться нулю. Но обращение в 0 функций

$$F(i), F(i+1), F(i+2), \dots, F(i+\lambda-1),$$

при $i=0$ и $i=n$, предполагает, что функция $F(i)$ обращается в 0 при

$$i=0, 1, 2, \dots, \lambda-1$$

и при

$$i=n, n+1, n+2, \dots, n+\lambda-1,$$

и, следовательно, что она в составе своем имеет множители

$$i, i-1, i-2, \dots, i-\lambda+1, \\ i-n, i-n-1, i-n-2, \dots, i-n-\lambda+1.$$

Итак, уравнение (3) будет удовлетворено, если мы, полагая

$$f(i) = \Delta^\lambda F(i),$$

возьмем за $F(i)$ такую функцию, которая содержит в себе множителем произведение

$$i(i-1)(i-2)\dots(i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1)(i-n-2)\dots \\ \dots(i-n-\lambda+1).$$

С другой стороны, для того чтобы искомая функция $f(i)$ была степени λ , в выражении ее по формуле

$$f(i) = \Delta^\lambda F(i)$$

функция $F(i)$ должна быть, очевидно, степени 2λ и, следовательно, одинаковой степени с произведением

$$i(i-1)(i-2)\dots(i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1)(i-n-2)\dots(i-n-\lambda+1),$$

откуда видно, что функция $f(i)$ степени λ , удовлетворяющая уравнению (3), получится из формулы

$$f(i) = \Delta^\lambda F(i),$$

если взять

$$F(i) = i(i-1)(i-2)\dots(i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1)\dots(i-n-\lambda+1),$$

и, следовательно, по доказанному в предыдущем параграфе относительно функций

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots,$$

они выразятся вообще такою формулою:

$$\phi_\lambda(x) = C_\lambda \Delta^\lambda x(x-1)\dots(x-\lambda+1)(x-n)(x-n-1)\dots(x-n-\lambda+1), \quad (6)$$

где C_λ есть постоянный коэффициент.

§ 5. При помощи найденного нами выражения функций

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$$

определение сумм, входящих в нашу формулу

$$u = \frac{\sum_0^n \psi_0(i) u_i}{\sum_0^n \psi_0^2(i)} \psi_0(x) + \frac{\sum_0^n \psi_1(i) u_i}{\sum_0^n \psi_1^2(i)} \psi_1(x) + \frac{\sum_0^n \psi_2(i) u_i}{\sum_0^n \psi_2^2(i)} \psi_2(x) + \dots$$

значительно упрощается.

Мы покажем теперь, что суммы

$$\sum_0^n \psi_0(i) u_i, \sum_0^n \psi_1(i) u_i, \sum_0^n \psi_2(i) u_i, \dots,$$

содержащие величины $u_0, u_1, u_2, \dots$, приводятся к суммам, составленным из конечных разностей этих величин последовательно порядка 0, 1, 2, ... и удобным для вычисления; суммы же

$$\sum_0^n \psi_0^2(i), \sum_0^n \psi_1^2(i), \sum_0^n \psi_2^2(i), \dots,$$

не содержащие этих величин, определяются окончательно.

Для преобразования первых сумм мы замечаем, что общий вид их такой:

$$\sum_0^n \psi_\lambda(i) u_i,$$

что, по вставке найденного нами (6) выражения $\psi_\lambda(x)$, представляется так:

$$C_\lambda \sum_0^n u_i \Delta^\lambda i(i-1) \cdots (i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1). \quad (7)$$

Но по формуле

$$\begin{aligned} \sum U_i \Delta^\lambda V_i &= U_{i-1} \Delta^{\lambda-1} V_i - \Delta U_{i-2} \Delta^{\lambda-2} V_i + \dots \\ &\dots - (-1)^\lambda \Delta^{\lambda-1} U_{i-\lambda} V_i + (-1)^\lambda \sum \Delta^\lambda U_{i-\lambda} V_i + C, \end{aligned}$$

показанной выше, (5), полагая в ней

$$U_i = u_i,$$

$$V_i = i(i-1) \cdots (i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1)$$

и замечая, что в этом случае функция V_i и ее $\lambda-1$ разностей ΔV_i , $\Delta^2 V_i$, ..., $\Delta^{\lambda-1} V_i$ при $i=0$ и $i=n$ обращаются в нуль, мы находим

$$\begin{aligned} \sum_0^n u_i \Delta^\lambda i(i-1) \cdots (i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1) = \\ = (-1)^\lambda \sum_0^n i(i-1) \cdots (i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1) \cdots \\ \cdots (i-n-\lambda+1) \Delta^\lambda u_{i-\lambda}, \end{aligned}$$

что можно представить под видом более простым, заменяя во второй сумме i через $i+\lambda$; вследствие чего получаем

$$\begin{aligned} \sum_0^n u_i \Delta^\lambda i(i-1) \cdots (i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1) = \\ = (-1)^\lambda \sum_{-\lambda}^{n-\lambda} (i+\lambda)(i+\lambda-1) \cdots (i+1)(i+\lambda-n)(i+\lambda-n-1) \cdots \\ \cdots (i-n+1) \Delta^\lambda u_i, \end{aligned}$$

или, что одно и то же,

$$\begin{aligned} \sum_0^n u_i \Delta^\lambda i(i-1) \cdots (i-\lambda+1)(i-n)(i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1) = \\ = \sum_{-\lambda}^{n-\lambda} (i+1)(i+2) \cdots (i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda u_i. \end{aligned}$$

А так как в последней сумме, от $i=-\lambda$ до $i=-1$ и от $i=n-\lambda$ до $i=n-1$, функция обращается в 0, то в этой сумме пределы

$$i = -\lambda, \quad i = n-\lambda$$

без изменения ее величины могут быть заменены такими:

$$i = 0, \quad i = n,$$

и по вышенайденной формуле мы будем иметь:

$$\sum_0^n u_i \Delta^\lambda i (i-1) \cdots (i-\lambda+1) (i-n) (i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1) = \\ = \sum_0^n (i+1) (i+2) \cdots (i+\lambda) (n-i-1) (n-i-2) \cdots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda u_i,$$

что по (7) нам дает такую формулу для вычисления сумм $\sum_0^n \phi_0(i) u_i$,

$$\sum_0^n \phi_1(i) u_i, \sum_0^n \phi_2(i) u_i, \dots:$$

$$\sum_0^n \phi_\lambda(i) =$$

$$= C_\lambda \sum_0^n (i+1) (i+2) \cdots (i+\lambda) (n-i-1) (n-i-2) \cdots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda u_i. \quad (8)$$

§ 6. Переходя к вычислению сумм

$$\sum_0^n \phi_0^2(i), \sum_0^n \phi_1^2(i), \sum_0^n \phi_2^2(i), \dots,$$

мы замечаем, что уравнение (8), в предположении

$$u_i = \phi_\lambda(i),$$

дает относительно этих сумм такую общую формулу:

$$\sum_0^n \phi_\lambda^2(i) =$$

$$= C_\lambda \sum_0^n (i+1) (i+2) \cdots (i+\lambda) (n-i-1) (n-i-2) \cdots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda \phi_\lambda(i);$$

по формуле же (6) мы находим

$$\Delta^\lambda \phi_\lambda(i) =$$

$$= C_\lambda \Delta^{2\lambda} i (i-1) \cdots (i-\lambda+1) (i-n) (i-n-1) \cdots (i-n-\lambda+1),$$

что дает нам

$$\Delta^\lambda \phi_\lambda(i) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2\lambda C_\lambda,$$

и вследствие этого предыдущее выражение суммы

$$\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)$$

приводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \phi_\lambda^2(i) = \\ & = 1 \cdot 2 \cdots 2\lambda C_\lambda^2 \sum_0^n [(i+1)(i+2) \cdots (i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-i-\lambda)]. \quad (9) \end{aligned}$$

Для облегчения дальнейшего преобразования этой формулы мы замечаем, что

$$\begin{aligned} & \Delta^\lambda(i+\lambda)(i+\lambda-1) \cdots (i-\lambda+1) = \\ & = 2\lambda(2\lambda-1) \cdots (\lambda+1)(i+\lambda)(i+\lambda-1) \cdots (i+1), \end{aligned}$$

вследствие чего она может быть представлена так:

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \phi_\lambda^2(i) = \\ & = 1 \cdot 2 \cdots \lambda C_\lambda^2 \sum_0^n [(n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda(i+\lambda)(i+\lambda-1) \cdots (i-\lambda+1)]. \end{aligned}$$

Прилагая к сумме

$$\sum_0^n (n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda(i+\lambda)(i+\lambda-1) \cdots (i-\lambda+1)$$

формулу (5), по которой находим вообще

$$\begin{aligned} \sum U_i \Delta^\lambda V_i &= U_{i-1} \Delta^{\lambda-1} V_i - \Delta U_{i-2} \Delta^{\lambda-2} V_i + \cdots - (-1)^\lambda \Delta^{\lambda-1} U_{i-\lambda} V_i + \\ &+ (-1)^\lambda \sum \Delta^\lambda U_{i-\lambda} V_i + C, \end{aligned}$$

мы должны взять

$$\begin{aligned} U_i &= (n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-i-\lambda), \\ V_i &= (i+\lambda)(i+\lambda-1) \cdots (i-\lambda+1); \end{aligned}$$

а так как в этом случае функции

$$\Delta^{\lambda-1} V_i, \Delta^{\lambda-2} V_i, \dots, \Delta V_i, V_i$$

обращаются в 0 при $i=0$, а функции

$$U_{i-1}, \Delta U_{i-2}, \dots, \Delta^{\lambda-1} U_{i-\lambda}$$

при $i=n$, то в приложении этой формулы к нашей сумме члены

$$U_{i-1} \Delta^{\lambda-1} V_i - \Delta U_{i-2} \Delta^{\lambda-2} V_i + \dots - (-1)^{\lambda} \Delta^{\lambda-1} U_{i-\lambda} V_i$$

сократятся, и эта сумма приведет к следующему:

$$(-1)^{\lambda} \sum_0^n \Delta^{\lambda} U_{i-\lambda} V_i.$$

Находя же по вышеуказанной величине функции U_i , что

$$\begin{aligned} \Delta^{\lambda} U_{i-\lambda} &= \Delta^{\lambda} (n-i+\lambda-1)(n-i+\lambda-2) \dots (n-i) = \\ &= (-1)^{\lambda} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda, \end{aligned}$$

и замечая, что

$$V_i = (i+\lambda)(i+\lambda-1) \dots (i-\lambda+1),$$

мы таким образом сумму

$$\sum_0^n (n-i-1)(n-i-2) \dots (n-i-\lambda) \Delta^{\lambda} (i+\lambda)(i+\lambda-1) \dots (i-\lambda+1)$$

приводим к следующему виду:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda \sum_0^n (i+\lambda)(i+\lambda-1) \dots (i-\lambda+1).$$

Что касается до определения последней суммы, то она легко находится по известным приемам обратного способа разностей.

Так, зная, что

$$\sum (i+\lambda)(i+\lambda-1) \dots (i-\lambda+1) = \frac{1}{2\lambda+1} (i+\lambda)(i+\lambda-1) \dots (i-\lambda) + C,$$

и замечая, что выражение

$$\frac{1}{2\lambda+1} (i+\lambda)(i+\lambda-1) \dots (i-\lambda)$$

при $i=0$ обращается в 0, а при $i=n$ равняется

$$\frac{1}{2\lambda+1} (n+\lambda)(n+\lambda-1)\cdots(n-\lambda),$$

или

$$\frac{1}{2\lambda+1} n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-\lambda^2),$$

мы получаем

$$\sum_0^n (i+\lambda)(i+\lambda-1)\cdots(i-\lambda+1) = \frac{1}{2\lambda+1} n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-\lambda^2).$$

На основании этого, мы по предыдущей формуле находим, что сумма

$$\sum_0^n (n-i-1)(n-i-2)\cdots(n-i-\lambda) \Delta^\lambda (i+\lambda)(i+\lambda-1)\cdots(i-\lambda+1)$$

равняется произведению

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda \cdot \frac{1}{2\lambda+1} n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-\lambda^2);$$

а это, по внесении в вышенайденное выражение суммы $\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)$, дает

$$\sum_0^n \phi_\lambda^2(i) = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdots \lambda^2 \cdot n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-\lambda^2)}{2\lambda+1} C_\lambda^2. \quad (10)$$

§ 7. Вследствие показанного нами относительно значения функций $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ..., входящих в формулу

$$u = \frac{\sum_0^n \phi_0(i) u_i}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} \phi_0(x) + \frac{\sum_0^n \phi_1(i) u_i}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} \phi_1(x) + \frac{\sum_0^n \phi_2(i) u_i}{\sum_0^n \phi_2^2(i)} \phi_2(x) + \dots,$$

и сумм вида $\sum_0^n \phi_\lambda(i) u_i$, $\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)$, эта формула приводится к такому ряду:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{\sum_0^n u_i}{n} + \frac{3 \sum_0^n (i+1)(n-i-1) \Delta u_i}{1^2 \cdot n (n^2 - 1^2)} \Delta x (x - n) + \\
 & + \frac{5 \sum_0^n (i+1)(i+2)(n-i-1)(n-i-2) \Delta^2 u_i}{1^2 \cdot 2^2 \cdot n (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2)} \Delta^2 x (x-1)(x-n)(x-n-1) + \\
 & + \frac{7 \sum_0^n (i+1)(i+2)(i+3)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3) \Delta^3 u_i}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot n (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2) (n^2 - 3^2)} \times \\
 & \times \Delta^3 [x(x-1)(x-2)(x-n)(x-n-1)(x-n-2)] + \dots, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где общий вид членов есть такой:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(2\lambda + 1) \sum_0^n (i+1) \dots (i+\lambda) (n-i-1) \dots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda u_i}{1^2 \cdot 2^2 \dots \lambda^2 \cdot n (n^2 - 1^2) \dots (n^2 - \lambda^2)} \times \\
 & \times \Delta^\lambda [x(x-1) \dots (x-\lambda+1)(x-n)(x-n-1) \dots (x-n-\lambda+1)].
 \end{aligned}$$

Что касается до значения функций

$$\begin{aligned}
 & \Delta x (x - n), \\
 & \Delta^2 x (x - 1) (x - n) (x - n - 1), \\
 & \Delta^3 x (x - 1) (x - 2) (x - n) (x - n - 1) (x - n - 2), \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

входящих в члены этого ряда, и которые мы для сокращения будем обозначать так:

$$\Delta(x), \Delta^2(x), \Delta^3(x), \dots,$$

то они, по обыкновенным приемам исчисления конечных разностей, легко найдутся.

Также нетрудно вывести различные формулы для определения этих функций. Так, на основании известного равенства

$$\Delta^\lambda U_x V_x = V_{x+\lambda} \Delta^\lambda U_x + \frac{\lambda}{1} \Delta V_{x+\lambda-1} \Delta^{\lambda-1} U_x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 V_{x+\lambda-2} \Delta^{\lambda-2} U_x + \dots,$$

определяющего разность Δ^λ произведения двух функций, делая в нем

$$U_x = x(x-1)\cdots(x-\lambda+1),$$

$$V_x = (x-n)(x-n-1)\cdots(x-n-\lambda+1),$$

мы находим следующее выражение для $\Delta^\lambda(x)$:

$$1 \cdot 2 \cdots \lambda (x+\lambda-n)(x+\lambda-n-1)\cdots(x-n+1) +$$

$$+ \frac{\lambda}{1} \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda \cdot \lambda (x+\lambda-n-1)(x+\lambda-n-2)\cdots(x-n+1)x +$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 4 \cdots \lambda \cdot \lambda (\lambda-1)(x+\lambda-n-2)\cdots(x-n+1)x(x-1) + \dots,$$

которое короче можно написать так:

$$\Delta^\lambda(x) = 1 \cdot 2 \cdots \lambda [(x+\lambda-n)(x+\lambda-n-1)\cdots(x-n+1) + \dots$$

$$+ \frac{\lambda^2}{1^2} (x+\lambda-n-1)\cdots(x-n+1)x +$$

$$+ \frac{\lambda^2(\lambda-1)^2}{1^2 \cdot 2^2} (x+\lambda-n-2)\cdots(x-n+1)x(x-1) + \dots].$$

Другую формулу, более удобную для вычисления $\Delta^\lambda(x)$, мы найдем на основании известной формулы

$$f(x) = f(\lambda) + \frac{x-\lambda}{1} \Delta f(\lambda) + \frac{(x-\lambda)(x-\lambda-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(\lambda) + \dots,$$

разлагая по ней произведение

$$(x-n)(x-n-1)\cdots(x-n-\lambda+1)$$

под знаком Δ^λ в выражении

$$\Delta^\lambda(x) = \Delta^\lambda x(x-1)\cdots(x-\lambda+1)(x-n)(x-n-1)\cdots(x-n-\lambda+1),$$

что дает нам

$$\Delta^\lambda(x) = 1 \cdot 2 \cdots \lambda (\lambda-n)(\lambda-n-1)\cdots(1-n) +$$

$$+ \frac{x}{1} \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\lambda+1) \cdot \frac{\lambda}{1} (\lambda-n)(\lambda-n-1)\cdots(2-n) +$$

$$+ \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot 3 \cdots (\lambda+2) \cdot \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda-1}{2} (\lambda-n)(\lambda-n-1)\cdots(3-n) + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^\lambda 1 \cdot 2 \cdots \lambda (n-1)(n-2) \cdots (n-\lambda) \left[1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{n-1} \frac{x}{1^2} + \right. \\
&\quad + \frac{(\lambda-1)\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(n-1)(n-2)} \frac{x(x-1)}{1^2 \cdot 2^2} - \\
&\quad \left. - \frac{(\lambda-2)(\lambda-1) \cdots (\lambda+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{x(x-1)(x-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \cdots \right]. \quad (12)
\end{aligned}$$

Кроме того, можно найти уравнение для последовательного вычисления функций

$$\Delta^1(x), \Delta^2(x), \Delta^3(x), \dots$$

Для этого мы замечаем, что функции

$$\psi_{\lambda+1}(x), \psi_\lambda(x), \psi_{\lambda-1}(x),$$

которые, по выше показанному, выражаются так:

$$\psi_{\lambda+1}(x) = C_{\lambda+1} \Delta^{\lambda+1}(x),$$

$$\psi_\lambda(x) = C_\lambda \Delta^\lambda(x),$$

$$\psi_{\lambda-1}(x) = C_{\lambda-1} \Delta^{\lambda-1}(x),$$

должны быть связаны уравнением

$$\psi_{\lambda+1}(x) = q_{\lambda+1} \psi_\lambda(x) + L_{\lambda+1} \psi_{\lambda-1}(x),$$

так как функции

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\lambda-1}(x), \psi_\lambda(x), \psi_{\lambda+1}(x), \dots$$

означают знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби

$$\begin{aligned}
&q_0 + \frac{L_1}{q_1} + \\
&\quad \cdot + \frac{L_\lambda}{q_\lambda} + \frac{L_{\lambda+1}}{q_{\lambda+1}} + \cdot \\
&\quad \cdot
\end{aligned}$$

Притом функция

$$q_{\lambda+1}$$

должна быть линейная, вида

$$Ax + B,$$

ибо, как знаем, функции $\psi_{\lambda+1}(x)$, $\psi_{\lambda}(x)$, $\psi_{\lambda-1}(x)$ имеют степенями $\lambda+1$, λ , $\lambda-1$, что, по предыдущему уравнению, предполагает $q_{\lambda+1}$ первой степени. Внося же в это уравнение $Ax+B$ на место $q_{\lambda+1}$ и подставляя вышешоказанные величины функций $\psi_{\lambda+1}(x)$, $\psi_{\lambda}(x)$, $\psi_{\lambda-1}(x)$, мы находим

$$C_{\lambda+1}\Delta^{\lambda+1}(x) = (Ax+B)C_{\lambda}\Delta^{\lambda}(x) + L_{\lambda+1}C_{\lambda-1}\Delta^{\lambda-1}(x),$$

что, по разделении на $C_{\lambda+1}$, можно написать так:

$$\Delta^{\lambda+1}(x) = (Mx+N)\Delta^{\lambda}(x) + P\Delta^{\lambda-1}(x),$$

делая

$$M = \frac{AC_{\lambda}}{C_{\lambda+1}}, \quad N = \frac{BC_{\lambda}}{C_{\lambda+1}}, \quad P = \frac{L_{\lambda+1}C_{\lambda-1}}{C_{\lambda+1}}.$$

Определивши таким образом вид уравнения, связывающего между собою функции

$$\Delta^{\lambda+1}(x), \quad \Delta^{\lambda}(x), \quad \Delta^{\lambda-1}(x),$$

мы легко найдем постоянные M , N , P , в него входящие; для этого стоит только вставить в него значения функций

$$\Delta^{\lambda+1}(x), \quad \Delta^{\lambda}(x), \quad \Delta^{\lambda-1}(x)$$

при трех различных величинах x и найти, при каких постоянных M , N , P получаемые таким образом уравнения будут удовлетворяться. Так, делая в нем последовательно $x=0$, $x=1$, $x=2$, для определения постоянных

$$M, \quad N, \quad P$$

находим следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta^{\lambda+1}(0) &= N\Delta^{\lambda}(0) + P\Delta^{\lambda-1}(0), \\ \Delta^{\lambda+1}(1) &= (M+N)\Delta^{\lambda}(1) + P\Delta^{\lambda-1}(1), \\ \Delta^{\lambda+1}(2) &= (2M+N)\Delta^{\lambda}(2) + P\Delta^{\lambda-1}(2), \end{aligned}$$

из которых для M , N , P получаются такие величины:

$$P = \frac{\frac{\Delta^{\lambda+1}(2)}{\Delta^{\lambda}(2)} - 2\frac{\Delta^{\lambda+1}(1)}{\Delta^{\lambda}(1)} + \frac{\Delta^{\lambda+1}(0)}{\Delta^{\lambda}(0)}}{\frac{\Delta^{\lambda-1}(2)}{\Delta^{\lambda}(2)} - 2\frac{\Delta^{\lambda-1}(1)}{\Delta^{\lambda}(1)} + \frac{\Delta^{\lambda-1}(0)}{\Delta^{\lambda}(0)}},$$

$$N = \frac{\Delta^{\lambda+1}(0)}{\Delta^{\lambda}(0)} - P \frac{\Delta^{\lambda-1}(0)}{\Delta^{\lambda}(0)},$$

$$M = \frac{\Delta^{\lambda+1}(1)}{\Delta^{\lambda}(1)} - \frac{\Delta^{\lambda+1}(0)}{\Delta^{\lambda}(0)} - P \left(\frac{\Delta^{\lambda-1}(1)}{\Delta^{\lambda}(1)} - \frac{\Delta^{\lambda-1}(0)}{\Delta^{\lambda}(0)} \right),$$

что, по вставке значений

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\lambda-1}(0), & \Delta^{\lambda-1}(1), & \Delta^{\lambda-1}(2), \\ \Delta^{\lambda}(0), & \Delta^{\lambda}(1), & \Delta^{\lambda}(2), \\ \Delta^{\lambda+1}(0), & \Delta^{\lambda+1}(1), & \Delta^{\lambda+1}(2), \end{array}$$

получаемых из вышенайденных выражений функции $\Delta^{\lambda}(x)$, дает

$$\begin{aligned} P &= -\lambda^2(n^2 - \lambda^2), \\ N &= -(2\lambda + 1)(n - 1), \\ M &= 2(2\lambda + 1), \end{aligned}$$

а вследствие того, по предыдущему, получается такое уравнение между функциями $\Delta^{\lambda+1}(x)$, $\Delta^{\lambda}(x)$, $\Delta^{\lambda-1}(x)$:

$$\Delta^{\lambda+1}(x) = (2\lambda + 1)(2x - n + 1)\Delta^{\lambda}(x) - \lambda^2(n^2 - \lambda^2)\Delta^{\lambda-1}(x).$$

На основании этого уравнения и замечая, что

$$\begin{aligned} \Delta^0(x) &= 1, \\ \Delta^1(x) &= 2x - n + 1, \end{aligned}$$

мы находим последовательно

$$\begin{aligned} \Delta^2(x) &= 3(2x - n + 1)^2 - n^2 + 1, \\ \Delta^3(x) &= 15(2x - n + 1)^3 - 3(3n^2 - 7)(2x - n + 1), \\ \Delta^4(x) &= 105(2x - n + 1)^4 - 30(3n^2 - 13)(2x - n + 1)^2 + 9(n^2 - 1)(n^2 - 9), \\ \Delta^5(x) &= 945(2x - n + 1)^5 - 1050(n^2 - 7)(2x - n + 1)^3 + \\ &\quad + 15(15n^4 - 230n^2 + 407)(2x - n + 1), \end{aligned}$$

и т. д. *

* Эти функции, как нетрудно убедиться, удовлетворяют такому уравнению в конечных разностях:

$$(x + 2)(x + 2 - n)\Delta^2 Y + (2x + 3 - n - \lambda^2 - \lambda)\Delta Y - \lambda(\lambda + 1)Y = 0,$$

где λ — степень Y .

§ 8. Разлагая u по формуле, нами выведенной (§ 7), и ограничиваясь в этом разложении различным числом членов, мы получим выражения функции u под видом полиномов большей или меньшей степени и, соответственно с этим, представляющих u с большей или меньшей степенью точности. По этим приближенным выражениям u будут получаться ее значения

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$$

с погрешностями более или менее значительными; мы теперь займемся определением суммы квадратов погрешностей в получаемых таким образом значениях

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$$

при различном числе членов, удержанных в разложении u .

Продолжая разложение функции по формуле (1) до последнего члена, мы находим

$$u = \frac{\sum_0^n \phi_0(i) u_i}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} \phi_0(x) + \frac{\sum_0^n \phi_1(i) u_i}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} \phi_1(x) + \dots + \frac{\sum_0^n \phi_n(i) u_i}{\sum_0^n \phi_n^2(i)} \phi_n(x), \quad (13)$$

что, как замечено было в вышеупомянутом мемуаре, будет давать вполне точно все n значений функций u

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}.$$

Возводя обе части этой формулы в квадрат и суммируя для всех целых величин x , от $x=0$ до $x=n$, мы для определения суммы

$$\sum_0^n u_i^2$$

находим выражение

$$\sum_0^n \left[\frac{\sum_0^n \phi_0(i) u_i}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} \phi_0(i) + \frac{\sum_0^n \phi_1(i) u_i}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} \phi_1(i) + \dots + \frac{\sum_0^n \phi_n(i) u_i}{\sum_0^n \phi_n^2(i)} \phi_n(i) \right]^2.$$

А так как (§ 2) по свойству функций $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, ... сумма

$$\sum_0^n \phi_\mu(i) \phi_\nu(i)$$

для μ и ν различных обращается в 0, то это приводится к следующему:

$$\left[\frac{\sum_0^n \phi_0(i) u_i}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} \right]^2 \sum_0^n \phi_0^2(i) + \left[\frac{\sum_0^n \phi_1(i) u_i}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} \right]^2 \sum_0^n \phi_1^2(i) + \dots + \left[\frac{\sum_0^n \phi_n(i) u_i}{\sum_0^n \phi_n^2(i)} \right]^2 \sum_0^n \phi_n^2(i),$$

что по сокращении дает такое выражение суммы $\sum_0^n u_i^2$:

$$\sum_0^n u_i^2 = \frac{\left(\sum_0^n \phi_0(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} + \frac{\left(\sum_0^n \phi_1(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} + \dots + \frac{\left(\sum_0^n \phi_n(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_n^2(i)}.$$

С другой стороны, перенеся в формуле (13) $\lambda + 1$ членов справа налево, возведя в квадрат и суммируя от $x=0$ до $x=n$, мы подобным образом для определения суммы

$$\sum_0^n \left[u_i - \frac{\sum_0^n \phi_0(i) u_i}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} \phi_0(i) - \dots - \frac{\sum_0^n \phi_\lambda(i) u_i}{\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)} \phi_\lambda(i) \right]^2$$

получим такое выражение:

$$\frac{\left(\sum_0^n \phi_{\lambda+1}(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_{\lambda+1}^2(i)} + \frac{\left(\sum_0^n \phi_{\lambda+2}(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_{\lambda+2}^2(i)} + \dots + \frac{\left(\sum_0^n \phi_n(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_n^2(i)};$$

по составу же этой суммы видно, что она представляет сумму квадратов погрешностей в значениях

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1},$$

получаемых из разложения u в ряд

$$u = \frac{\sum_0^n \phi_0(i) u_i}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} \phi_0(x) + \frac{\sum_0^n \phi_1(i) u_i}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} \phi_1(x) + \dots,$$

когда его останавливают на $(\lambda + 1)$ -м члене,

$$\frac{\sum_0^n \phi_\lambda(i) u_i}{\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)} \phi_\lambda(x).$$

Поэтому, изображая для сокращения сумму квадратов таких погрешностей через

$$\sum d_\lambda^2,$$

мы, по предыдущему, будем иметь

$$\sum d_\lambda^2 = \frac{\left(\sum_0^n \phi_{\lambda+1}(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_{\lambda+1}^2(i)} + \frac{\left(\sum_0^n \phi_{\lambda+2}(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_{\lambda+2}^2(i)} + \dots + \frac{\left(\sum_0^n \phi_n(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_n^2(i)}.$$

Сличая это выражение суммы $\sum d_\lambda^2$ с вышенайденным выражением суммы $\sum_0^n u_i^2$, мы замечаем между ними такое соотношение:

$$\sum d_\lambda^2 = \sum_0^n u_i^2 - \frac{\left(\sum_0^n \phi_0(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_0^2(i)} - \frac{\left(\sum_0^n \phi_1(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_1^2(i)} - \dots - \frac{\left(\sum_0^n \phi_\lambda(i) u_i \right)^2}{\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)},$$

что и послужит нам для вычисления $\sum d_\lambda^2$.

Что касается до значения членов, входящих в эту формулу, то, по (8) и (10), мы находим вообще для какого-нибудь λ

$$\frac{\left(\sum_0^n \phi_\lambda(i) u_i\right)^2}{\sum_0^n \phi_\lambda^2(i)} = \frac{(2\lambda + 1) \left(\sum_0^n (i+1)(i+2)\dots(i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2)\dots(n-i-\lambda)\Delta^\lambda u_i\right)^2}{1^2 \cdot 2^2 \dots \lambda^2 \cdot n(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)\dots(n^2 - \lambda^2)},$$

вследствие чего эта формула приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} \sum d_\lambda^2 = & \sum_0^n u_i^2 - \frac{\left(\sum_0^n u_i\right)^2}{n} - \frac{3 \left(\sum_0^n (i+1)(n-i-1)\Delta u_i\right)^2}{1^2 \cdot n(n^2 - 1^2)} - \dots \\ & - \frac{(2\lambda + 1) \left(\sum_0^n (i+1)(i+2)\dots(i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2)\dots(n-i-\lambda)\Delta^\lambda u_i\right)^2}{1^2 \cdot 2^2 \dots \lambda^2 \cdot n(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)\dots(n^2 - \lambda^2)}, \end{aligned}$$

и дает такое соотношение между суммами $\sum d_\lambda^2$, $\sum d_{\lambda-1}^2$:

$$\sum d_\lambda^2 = \sum d_{\lambda-1}^2 - \frac{(2\lambda + 1) \left(\sum_0^n (i+1)(i+2)\dots(i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2)\dots(n-i-\lambda)\Delta^\lambda u_i\right)^2}{1^2 \cdot 2^2 \dots \lambda^2 \cdot n(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)\dots(n^2 - \lambda^2)},$$

по которому удобно вычислять последовательно суммы

$$\sum d_0^2, \sum d_1^2, \sum d_2^2, \dots$$

и легко видеть, как они уменьшаются по мере увеличения числа членов, удерживаемых в разложении u . Что касается до первой суммы $\sum d_0^2$, то она, как нетрудно заметить по предыдущим формулам, будет равна сумме квадратов разностей величин

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$$

и их *средней арифметической*

$$\frac{\sum_0^n u_i}{n},$$

так как эта *средняя* составляет первый член разложения u (11).

ВОПРОСЫ О НАИМЕНЬШИХ ВЕЛИЧИНАХ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ФУНКЦИЙ

I

§ 1. Пока переменная x остается в смежности одного значения, по правилам дифференциального исчисления можно прийти к представлению всякой функции $f(x)$ под данным видом с наибольшим приближением.

Таким образом, приближенное представление функции $f(x)$ в смежности $x=a$ в виде полинома степени n находим, останавливая ее разложение в ряд Тэйлора

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots$$

на члене $\frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a)$. Так же получаем приближенную величину $f(x)$ в некоторой форме Z , приравняв нулю при $x=a$ разность $f(x) - Z$ и ее первые производные.

Если дело идет только о величинах x смежных с a , эти выражения $f(x)$ представляют ее с наибольшею точностью, какую только допускают их формы.

Но это не имеет более места, если переменная x , подчинена только условию оставаться в пределах более или менее широких. В этом случае разыскание приближенных выражений для $f(x)$ требует методов, существенно отличных от тех, о которых мы сейчас упомянули.

Так как степень точности приближенных выражений функций определяется пределом их ошибок, то ясно, что для представления $f(x)$ надо взять то из выражений, которое между всеми другими того же вида наименее уклоняется от $f(x)$ в промежутке, для которого ищется

ее приближенное выражение. Но приближенные выражения функций, находимые по правилам дифференциального исчисления, никогда не удовлетворяют этому условию: они дают величину $f(x)$ с наибольшей точностью только в смежности одного значения x , или, что то же, в промежутке бесконечно тесном.

Следовательно, когда x меняется в пределах более или менее широких, как это бывает на практике, необходимо изменить более или менее приближенные выражения $f(x)$, получаемые обыкновенными способами.

§ 2. В нашем мемуаре, озаглавленном „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“, мы разобрали случай, когда отыскивается приближенное выражение функций в виде многочлена, и мы дали решение такой задачи:

Найти изменения, которые следует внести в приближенную величину $f(x)$, данную ее разложением по восходящим степеням $x - a$, когда требуется сделать наименьшим предел погрешностей между $x = a - h$ и $x = a + h$ при h довольно малом.

Решение этой задачи легко доставляет элементы параллелограмов, которые удовлетворяют условиям наиболее выгодным для точности хода этого механизма. Но, стараясь решить другие вопросы того же рода, мы убедились, как важно иметь общий метод для решения задач, аналогичных с указанной нами здесь и состоящих в определении выражений, которые, между всеми другими того же вида, наименее уклоняются от некоторой функции $f(x)$ между двумя данными пределами.

Именно решением подобных задач мы сейчас займемся.

§ 3. Начнем с изложения общей теоремы относительно решения этих задач, которые можно формулировать следующим образом:

Для некоторой функции $F(x)$ данного вида с n произвольными параметрами $p_1, p_2, \dots, p_n$ надо подходящим выбором значений $p_1, p_2, \dots, p_n$ сделать наименьшим предел ее отклонений от нуля между $x = -h$ и $x = +h$.

Переходя к приложениям этой теоремы, мы покажем, как ею пользоваться для получения уравнений, доставляющих решение задачи в

случае, когда требуется представить функцию в виде полинома или рациональной дроби.

Наконец, мы покажем, что можно извлечь в некоторых частных случаях из решения этих уравнений, которое производится при помощи методов, аналогичных с употребляемыми в анализе Диофанта и которое приводит ко многим алгебраическим теоремам совершенно нового рода.

§ 4. Заметим еще, что частные случаи, которые будут здесь рассмотрены, очень важны для решения такой общей задачи:

Для данного приближенного выражения $f(x)$, выведенного обыкновенными способами в виде многочлена или в виде дроби, найти изменения, которым надо подвергнуть коэффициенты, когда требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x = a - h$ и $x = a + h$, причем h — величина довольно малая.

Теперь, однако, мы не остановимся на этой задаче, решенной отчасти в вышеупомянутом мемуаре и решение которой составит предмет другого мемуара.

II

§ 5. Какая-нибудь функция $F(x)$ между пределами $x = -h$ и $x = +h$ отклоняется от нуля не более как на некоторое количество L , если все ее значения, от $x = -h$ до $x = +h$, заключены между $-L$ и $+L$, и по крайней мере одно из них равно $+L$ или $-L$.

Предположим, что это значение $F(x)$ соответствует $x = x_1$.

Так как $F(x)$ для всех величин x , заключенных между $x = -h$, $x = +h$, не должна ни превосходить $+L$, ни опускаться ниже $-L$, то ясно, что величина $x = x_1$, которая приводит $F(x)$ к $\pm L$, должна быть или одной из величин x , для которых $F(x)$ достигает либо максимума, либо минимума, или одной из предельных величин x , т. е. $x = +h$, $x = -h$.

Поэтому, отвлекаясь от случая, когда производная $F'(x)$ становится при $x = x_1$ бесконечной, мы заключаем, что x_1 должно удовлетворять одному из уравнений

$$(x - h)(x + h) = 0, \quad F'(x) = 0$$

и, следовательно, такому:

$$(x - h)(x + h)F'(x) = 0$$

или

$$(x^2 - h^2)F'(x) = 0.$$

То же самое будет иметь место для всех значений x , которые, в пределах $x = -h$, $x = +h$, приводят $F(x)$ либо к $+L$, либо к $-L$, или, что то же самое, которые удовлетворяют уравнению

$$F^2(x) = L^2.$$

Поэтому, обозначая через

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu$$

величины x , о которых мы сейчас сказали, заключаем, что уравнения

$$F^2(x) = L^2, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0 \quad (1)$$

будут иметь μ общих решений

$$x = x_1, x_2, \dots, x_\mu,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ — величины вещественные, различные между собой и заключенные между $x = -h$ и $x = +h$.

Имея в виду эти общие решения уравнений (1), мы постараемся определить величины параметров $p_1, p_2, \dots, p_n$ функции $F(x)$, для которых количество L , означающее, как мы видели, предел уклонений $F(x)$ от 0 между $x = -h$ и $x = +h$, становится возможно наименьшим.

§ 6. Чтобы упростить эти изыскания, мы оставляем в стороне случай, когда $F(x)$ и ее производные относительно $x, p_1, p_2, \dots, p_n$ перестают быть конечными и непрерывными между $x = -h$ и $x = +h$, и в этом предположении установим следующую теорему:

Теорема 1. *Количество L , которое означает, насколько $F(x)$ отклоняется от нуля между $x = -h$ и $x = +h$, не приведено к своей наименьшей величине, если система уравнений*

$$\frac{dF(x_1)}{dp_1} \lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1} \lambda_2 + \dots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1} \lambda_\mu = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{dF(x_1)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_1)}{dp_2} N_2 + \dots + \frac{dF(x_1)}{dp_n} N_n \right] \lambda_1 + \\ & + \left[\frac{dF(x_2)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2} N_2 + \dots + \frac{dF(x_2)}{dp_n} N_n \right] \lambda_2 + \\ & \\ & + \left[\frac{dF(x_\mu)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2} N_2 + \dots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n} N_n \right] \lambda_\mu = \\ & = F(x_1) \lambda_1 + F(x_2) \lambda_2 + \dots + F(x_\mu) \lambda_\mu, \end{aligned}$$
$$F(x_1)\lambda_1 + F(x_2)\lambda_2 + \dots + F(x_\mu)\lambda_\mu$$
$$\frac{dF(x_1)}{dp_1} \lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1} \lambda_2 + \dots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1} \lambda_\mu = 0,$$

$$\frac{dF(x_1)}{dp_2} \lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2} \lambda_2 + \dots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2} \lambda_\mu = 0,$$

$$\frac{dF(x_1)}{dp_n} \lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_n} \lambda_2 + \dots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n} \lambda_\mu = 0,$$

$$F(x_1)\lambda_1 + F(x_2)\lambda_2 + \dots + F(x_\mu)\lambda_\mu$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_\mu = 0.$$

30*

§ 8. Доказательство второго предложения. Пусть ω бесконечно малое положительное количество, $N_1, N_2, \dots, N_n$ — конечные величины, удовлетворяющие уравнениям (3), $F_0(x)$ — значение, которое принимает функция $F(x)$ по замене ее параметров

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

на

$$p_1 - N_1\omega, \quad p_2 - N_2\omega, \quad \dots, \quad p_n - N_n\omega.$$

Так как дело идет только о случае, в котором функция $F(x)$ и ее производные относительно $x, p_1, \dots, p_n$ остаются конечными и непрерывными для всех величин x , заключенных между $-h$ и $+h$ (единственных значений x , которые мы рассматриваем), функция $F_0(x)$, которая выводится из $F(x)$ через замену количеств

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

на

$$p_1 - N_1\omega, \quad p_2 - N_2\omega, \quad \dots, \quad p_n - N_n\omega,$$

может быть представлена так:

$$F_0(x) = F(x) - \left(\frac{dF(x)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x)}{dp_2} N_2 + \dots + \frac{dF(x)}{dp_n} N_n \right) \omega + R\omega^2, \quad (4)$$

где R — функция ω и x , не делающаяся бесконечною при $\omega = 0$.

Поэтому легко показать, что от $x = -h$ до $x = +h$ числовая величина $F_0(x)$ остается ниже L , предполагая, конечно, что количество L не нуль, или, иначе говоря, что функция $F(x)$ между $x = -h$ и $x = +h$ не постоянно равна нулю.

Чтобы в этом убедиться, заметим, что для $x = x_1$, по формуле (4) и в силу уравнений (3), находим

$$F_0(x) = F(x_1) - F(x_1)\omega + \omega^2 R = F(x_1)(1 - \omega) + \omega^2 R,$$

и так как $F(x_1)$, по (1), приводится к $\pm L$, величине, отличной от нуля, и ω , по нашему предположению, количество положительное, бесконечно малое, то числовая величина этого выражения $F_0(x_1)$, очевидно, ниже L .

То же самое имеет место, если дать x значение, разность которого с x_1 не превышает некоторого конечного предела.

Действительно, по уравнениям (1) и (3), при $x = x_1$ выражения

$$F(x),$$

$$\frac{dF(x)}{dp_1} N_1 + \frac{dF(x)}{dp_2} N_2 + \dots + \frac{dF(x)}{dp_n} N_n$$

имеют одну и ту же величину $\pm L$, отличную от нуля, и, в силу непрерывности функций, составляющих эти выражения, они не могут изменяться скачками.

Отсюда следует, что в смежности с $x = x_1$ эти выражения будут иметь значения, отличные от нуля и одного и того же знака. Но пока это имеет место, уравнение (4), где ω положительное и бесконечно малое, дает для $F_0(x)$ величину численно меньшую, чем $F(x)$ и, следовательно, меньшую L , т. е. предела значений $F(x)$ между $x = -h$ и $x = +h$.

Подобным же образом убедимся, что числовая величина $F_0(x)$ остается ниже L , если x находится в смежности со значениями

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu.$$

Остается доказать, что это имеет место также для всех прочих значений x , заключенных между $x = -h$ и $x = +h$. Но так как $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ представляют единственные значения x , для которых, функция $F(x)$ между $x = -h$ и $x = +h$ достигает своих предельных значений $-L$ и $+L$ и так как $F_0(x)$ отличается от $F(x)$ только бесконечно малыми членами, то ясно, что в случае, когда x не находится в смежности с $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, ни одна из функций $F_0(x)$ и $F(x)$ не может приближаться бесконечно близко ни к $-L$, ни к $+L$, и, следовательно, значения $F_0(x)$ будут заключаться в более тесных пределах.

Итак, приходится признать, что от $x = -h$ до $x = +h$ функция $F_0(x)$, найденная через замену в $F(x)$ параметров

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

на

$$p_1 - N_1\omega, p_2 - N_2\omega, \dots, p_n - N_n\omega,$$

не может достигнуть ни предела $+L$, ни предела $-L$, что и доказывает предложение.

III

§ 9. Выведенная теорема послужит нам для нахождения уравнений, определяющих значения параметров $p_1, p_2, \dots, p_n$, при которых функция $F(x)$ наименее отклоняется от 0 между $x = -h$ и $x = +h$. Легко было бы найти эти уравнения, если бы мы знали наперед число μ , которое означает, сколько раз от $x = -h$ до $x = +h$ функция $F(x)$ при искомах величинах параметров достигает своих предельных значений $-L$ и $+L$. Но незнание нами величины μ составляет обыкновенно главную трудность рассматриваемых вопросов о наименьших величинах.

Мы покажем теперь, как можно всегда устранить эту трудность до известной степени, а в некоторых особенных случаях даже вполне. Относительно числа μ можно сделать два предположения: 1) μ превосходит n , число произвольных параметров $F(x)$; 2) μ не превосходит n .

Каждое из этих предположений, как мы увидим впоследствии, может иметь место; разберем их.

§ 10. Число μ превосходит n . В этом случае не важно знать истинную величину μ ; ибо, если μ более n , ряд

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu$$

содержит по крайней мере $n+1$ различных величин, и тогда, по § 5, уравнения

$$F^2(x) = L^2, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0$$

должны иметь по меньшей мере $n+1$ общих решений, что влечет за собой $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными количествами, а именно: n искомыми параметрами функции $F(x)$ и количеством L , которое означает, насколько $F(x)$ уклоняется от нуля между пределами $x = -h$ и $x = +h$. Через решение этих уравнений получим все неизвестные, если только не встретим тождественных уравнений, что может представиться только в исключительных случаях. Мы не остановимся теперь на этих частных случаях, ибо они не встретятся вовсе при решении вопросов, которыми нам предстоит заниматься.

Итак, если число μ больше n , можно обойтись совершенно без уравнений (2). К тому же, нетрудно заметить, в этом случае они ни-

чего не дают ни относительно $L, p_1, p_2, \dots, p_n$, ни относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$, потому что, когда μ больше n , число уравнений (2) меньше числа неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$.

§ 11. Число μ не превышает n . В этом случае уравнения (2), по исключении μ неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, доставляют $n - \mu + 1$ уравнений между $n - \mu + 1$ количествами

$$\begin{aligned} p_1, p_2, \dots, p_n, \\ x_1, x_2, \dots, x_\mu. \end{aligned}$$

С другой стороны, делая в уравнениях (1)

$$x = x_1, x_2, \dots, x_\mu,$$

находим еще 2μ уравнений между $p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_\mu$ и L . Итак, всего будем иметь $n - \mu + 1$ уравнений с таким же числом неизвестных

$$p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_\mu, L.$$

Решая эти уравнения, мы достигнем определения и количества L и искомых параметров функции $F(x)$. Но так как эти уравнения изменяются существенно с величиною числа μ , их можно решить, только устанавливая заранее величину μ ; и, чтобы обнять все возможные случаи, надо рассматривать отдельно такие предположения:

$$\mu = 1, 2, \dots, n,$$

единственно возможные по той причине, что $0 < \mu \leq n$.

§ 12. Пока ничего не известно наперед о числе μ , можно узнать искомые параметры $F(x)$, при которых она наименее уклоняется от нуля, между $x = -h$ и $x = +h$, только сравнивая между собой значения L , находимые в различных предположениях о μ , именно: $\mu > n$ и $\mu = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что важность исследования различных систем параметров, входящих в $F(x)$, и выбора той из них, которая дает искомое решение, обуславливается природой нашей задачи, в которой ищется minimum minimum величины L , для чего необходимо знать все возможные минимумы.

Часто, однако, легко убедиться, что уравнения (2) при $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$, отличных от нуля, невозможны для некоторых значений μ ; тогда число возможных предположений о величине числа μ уменьшается, и потому решение нашей задачи значительно упрощается.

Один из таких случаев, наиболее интересный и вместе с тем наиболее встречающийся, тот, когда по природе функции $F(x)$ уравнения (2) влекут за собой

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_\mu = 0,$$

пока μ не превышает n .

Тогда, согласно теореме 1, нельзя привести L к его наименьшей величине, не делая $\mu > n$, и, как мы видели, количество L и искомые параметры $F(x)$ определяются условием, что уравнения

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0$$

имеют по крайней мере $n + 1$ общих решений. Так как эти решения суть

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad x = x_3, \quad \dots,$$

то мы заключаем, в силу показанного в § 5 относительно этих количеств, что $n + 1$ общих решений наших уравнений будут наверно не равными и будут заключаться между $x = -h$ и $x = +h$.

IV

§ 13. Чтобы показать, какую выгоду можно извлечь из установленных выше положений, рассмотрим, в частности, такие три выражения $F(x)$:

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y,$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m} - Y,$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \dots + p_n x + 1} - Y,$$

где Y — функция от x , остающаяся конечною и непрерывною, так же как и ее производные, от $x = -h$ до $x = +h$. Решение нашей задачи для этих трех выражений $F(x)$ тем важнее, что оно, очевидно, связано

с приближенным представлением функций или в виде многочлена, или в виде дроби с данным или произвольным знаменателем.

§ 14. Первый случай

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y.$$

В этом случае легко убедиться, что уравнения (2) требуют

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_\mu = 0,$$

если μ не превосходит n .

Действительно, дифференцирование выражения $F(x)$ по $p_1, p_2, \dots, p_n$ дает

$$\frac{dF(x)}{dp_1} = x^{n-1}, \quad \frac{dF(x)}{dp_2} = x^{n-2}, \quad \dots, \quad \frac{dF(x)}{dp_{n-1}} = x, \quad \frac{dF(x)}{dp_n} = 1.$$

В силу этого уравнения (2) становятся

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1} + \dots + \lambda_\mu x_\mu^{n-1} &= 0, \\ \lambda_1 x_1^{n-2} + \lambda_2 x_2^{n-2} + \dots + \lambda_\mu x_\mu^{n-2} &= 0, \\ . &. \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_\mu x_\mu &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\mu &= 0, \end{aligned}$$

и, взяв сумму этих уравнений, предварительно помноженных соответственно на какие-нибудь количества $K_{n-1}, K_{n-2}, \dots, K_0$, мы получаем

$$\lambda_1 \Phi(x_1) + \lambda_2 \Phi(x_2) + \dots + \lambda_u \Phi(x_u) = 0,$$

где

$$\Phi(x) = K_{n-1}x^{n-1} + K_{n-2}x^{n-2} + \dots + K_1x + K_0.$$

А так как $\Phi(x)$ может представлять все целые функции степени ниже n , можно положить

$$\begin{aligned} \Phi(x) = (x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_\mu) = & x^{\mu-1} - (x_2 + x_3 + \dots + x_\mu) x^{\mu-2} + \\ & + (x_2 x_3 + \dots + x_{\mu-1} x_\mu) x^{\mu-3} - \dots, \end{aligned}$$

если μ не превосходит n , и для этого значения $\Phi(x)$ предыдущее

уравнение становится

$$\lambda_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_\mu) = 0,$$

откуда следует

$$\lambda_1 = 0,$$

так как количества $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ различны между собой.

Таким же образом найдем

$$\lambda_2 = 0, \dots, \lambda_\mu = 0,$$

принимая

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_\mu),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{\mu-1}).$$

Из того, что мы доказали относительно уравнений (2) в случае

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y,$$

и из § 12 вытекает следующая теорема:

Теорема 2. Если количества $p_1, p_2, \dots, p_n$ выбраны так, что функция

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y$$

наименее уклоняется от нуля между $x = -h$ и $x = +h$, то уравнения

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0$$

имеют по крайней мере $n + 1$ общих решений, отличных друг от друга и заключенных между $x = -h$ и $x = +h$. Количество L означает предел уклонений $F(x)$ от нуля между $x = -h$ и $x = +h$.

§ 15. Второй случай

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m} - Y.$$

Стараясь решить нашу задачу для этого выражения $F(x)$, мы можем ограничиться случаем, когда знаменатель дроби

$$\frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m}$$

не исчезает между $x = -h$ и $x = +h$. Действительно, по свойству задачи, искомая дробь должна быть необходимо из числа тех, которые не перестают оставаться конечными от $x = -h$ до $x = +h$. Следовательно, если бы ее знаменатель

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$$

содержал множители, обращающиеся в нуль между $x = -h$ и $x = +h$, то ее числитель

$$p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n$$

должен был бы делиться на все эти множители. В силу этого искомая дробь приводилась бы к более простому виду, в котором знаменателем была бы функция $A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m$, лишенная всех множителей, способных обращаться в нуль между $x = -h$ и $x = +h$, а числителем была бы функция того же вида, как

$$p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n,$$

но степени ниже $n-1$ на столько единиц, сколько в функции

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$$

есть линейных множителей, которые исчезают между $x = -h$ и $x = +h$. Таким образом, наша задача для выражения

$$F(x) = \frac{p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n}{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m} - Y$$

сводится всегда к случаю, в котором знаменатель не обращается в нуль между пределами $x = -h$ и $x = +h$.

Именно этим случаем мы теперь займемся.

Так как Y , по предположению, представляет функцию, остающуюся между $x = -h$ и $x = +h$ конечною и непрерывною вместе со своими производными, и так как знаменатель дроби

$$\frac{p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n}{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m}$$

не обращается в нуль в этих пределах, то ясно, что в этом промежутке

и взяв их сумму, имеем

$$\frac{\lambda_1 \Phi(x_1)}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 \Phi(x_2)}{\varphi(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_\mu \Phi(x_\mu)}{\varphi(x_\mu)} = 0,$$

где

$$\Phi(x) = K_{n-1}x^{n-1} + K_{n-2}x^{n-2} + \dots + K_1x + K_0.$$

Повторяя рассуждения, употребленные в первом случае, заключаем, что это уравнение, в котором $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_\mu)$ имеют величины, отличные от нуля, требует $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_\mu = 0$, пока μ не превышает n . Вот почему мы приходим, как и в предыдущем случае, к теореме:

Теорема 3. Если количества $p_1, p_2, \dots, p_n$ выбраны таким образом, что функция

$$F(x) = \frac{p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n}{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m} - Y,$$

от $x = -h$ до $x = +h$, наименее уклоняется от нуля, то уравнения

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0$$

имеют по крайней мере $n+1$ общих решений, различных между собой и заключающихся между $x = -h$ и $x = +h$. Количество L представляет предел значений $F(x)$ между $x = -h$ и $x = +h$.

§ 16. Третий случай

$$F(x) = \frac{p_1x^{n-l-1} + p_2x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \dots + p_nx + 1} - Y.$$

Всегда можно предположить, что дробь

$$\frac{p_1x^{n-l-1} + p_2x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \dots + p_nx + 1}$$

приведена к своему простейшему виду. Предполагая это и замечая, что дробь, которая решает нашу задачу о минимуме, не перестает быть конечной между $x = -h$ и $x = +h$, заключаем, что ее знаменатель остается отличным от нуля между этими пределами, а в таком случае ни функция

$$F(x) = \frac{p_1x^{n-l-1} + p_2x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \dots + p_nx + 1} - Y,$$

ни ее производные относительно $x, p_1, p_2, \dots, p_n$ не могут становиться бесконечными или прерывными для рассматриваемых значений x . Следовательно, теорема § 6 приложима также и к этому выражению $F(x)$. Чтобы извлечь из этой теоремы уравнения, относящиеся к $p_1, p_2, \dots, p_n, L$, начнем с разыскания выражений

$$\frac{dF(x)}{dp_1}, \quad \frac{dF(x)}{dp_2}, \quad \dots, \quad \frac{dF(x)}{dp_n}.$$

Из выражения $F(x)$, полагая для сокращения

$$p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l} = \psi(x),$$

$$p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \dots + p_n x + 1 = \varphi(x),$$

находим

$$\frac{dF(x)}{dp_1} = \frac{x^{n-l-1}}{\varphi(x)}, \quad \frac{dF(x)}{dp_2} = \frac{x^{n-l-2}}{\varphi(x)}, \quad \dots, \quad \frac{dF(x)}{dp_{n-l}} = \frac{1}{\varphi(x)},$$

$$\frac{dF(x)}{dp_{n-l+1}} = -\frac{x^l \psi(x)}{\varphi^2(x)}, \quad \frac{dF(x)}{dp_{n-l+2}} = -\frac{x^{l-1} \psi(x)}{\varphi^2(x)}, \quad \dots, \quad \frac{dF(x)}{dp_n} = -\frac{x \psi(x)}{\varphi^2(x)}.$$

После этого уравнения (2) становятся

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1 x_1^{n-l-1}}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2^{n-l-1}}{\varphi(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_\mu x_\mu^{n-l-1}}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\ & \frac{\lambda_1 x_1^{n-l-2}}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2^{n-l-2}}{\varphi(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_\mu x_\mu^{n-l-2}}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{\lambda_1 x_1}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2 x_2}{\varphi(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_\mu x_\mu}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\ & \frac{\lambda_1}{\varphi(x_1)} + \frac{\lambda_2}{\varphi(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_\mu}{\varphi(x_\mu)} = 0, \\ & -\frac{\lambda_1 \psi(x_1) x_1^l}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2 \psi(x_2) x_2^l}{\varphi^2(x_2)} - \dots - \frac{\lambda_\mu \psi(x_\mu) x_\mu^l}{\varphi^2(x_\mu)} = 0, \\ & -\frac{\lambda_1 \psi(x_1) x_1^{l-1}}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2 \psi(x_2) x_2^{l-1}}{\varphi^2(x_2)} - \dots - \frac{\lambda_\mu \psi(x_\mu) x_\mu^{l-1}}{\varphi^2(x_\mu)} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & -\frac{\lambda_1 \psi(x_1) x_1^2}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2 \psi(x_2) x_2^2}{\varphi^2(x_2)} - \dots - \frac{\lambda_\mu \psi(x_\mu) x_\mu^2}{\varphi^2(x_\mu)} = 0, \\ & -\frac{\lambda_1 \psi(x_1) x_1}{\varphi^2(x_1)} - \frac{\lambda_2 \psi(x_2) x_2}{\varphi^2(x_2)} - \dots - \frac{\lambda_\mu \psi(x_\mu) x_\mu}{\varphi^2(x_\mu)} = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что эти уравнения, в случае $\mu \leq n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$, отличных от нуля, влекут за собой следующие:

$$\left. \begin{array}{lll} p_1 = 0, & p_2 = 0, & \dots, \quad p_d = 0, \\ p_{n-l+1} = 0, & p_{n-l+2} = 0, & \dots, \quad p_{n-l+d} = 0, \end{array} \right\} \quad (5)$$

где

$$d = n - l + 1 - \mu.$$

Для доказательства возьмем сумму этих уравнений, предварительно помножив их соответственно на произвольные множители

$$B_{n-l-1}, B_{n-l-2}, \dots, B_1, B_0, C_l, C_{l-1}, \dots, C_2, C_1,$$

что дает нам

$$\frac{\lambda_1 \Phi(x_1)}{\varphi^2(x_1)} + \frac{\lambda_2 \Phi(x_2)}{\varphi^2(x_2)} + \dots + \frac{\lambda_\mu \Phi(x_\mu)}{\varphi^2(x_\mu)} = 0,$$

если для сокращения положим

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \varphi(x) (B_{n-l-1} x^{n-l-1} + B_{n-l-2} x^{n-l-2} + \dots + B_1 x + B_0) - \\ & - x \psi(x) (C_l x^{l-1} + C_{l-1} x^{l-2} + \dots + C_2 x + C_1). \end{aligned}$$

Из этого уравнения мы нашли бы

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_\mu = 0,$$

как в предыдущих случаях, если бы приличным выбором количеств

$$B_{n-l-1}, B_{n-l-2}, \dots, B_1, B_0, C_l, C_{l-1}, \dots, C_2, C_1$$

в выражении

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \varphi(x) (B_{n-l-1} x^{n-l-1} + B_{n-l-2} x^{n-l-2} + \dots + B_1 x + B_0) - \\ & - x \psi(x) (C_l x^{l-1} + C_{l-1} x^{l-2} + \dots + C_2 x + C_1) \end{aligned}$$

можно было сделать

$$\Phi(x) = (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_\mu) = x^{\mu-1} - (x_2 + x_3 + \dots + x_\mu) x^{\mu-2} + \dots,$$

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_\mu) = x^{\mu-1} - (x_1 + x_3 + \dots + x_\mu) x^{\mu-2} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{\mu-1}) = x^{\mu-1} - (x_1 + x_2 + \dots + x_{\mu-1}) x^{\mu-2} + \dots$$

Поэтому для доказательства, что уравнения (2) в случае $\mu \leq n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$, отличных от нуля, влекут за собой уравнения (5), достаточно показать, что формула

$$\varphi(x)(B_{n-l-1}x^{n-l-1} + B_{n-l-2}x^{n-l-2} + \dots + B_1x + B_0) - \\ - x\psi(x)(C_lx^{l-1} + C_{l-1}x^{l-2} + \dots + C_2x + C_1)$$

может представлять все выражения $\Phi(x)$, упомянутые выше, если уравнения (5) не удовлетворены, что мы и сделаем.

Так как дробь

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{p_1x^{n-l-1} + p_2x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \dots + p_nx + 1}$$

несократима и так как ее знаменатель

$$\varphi(x) = p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \dots + p_nx + 1$$

не делится на x , то функции $\varphi(x)$ и $x\psi(x)$ взаимно простые, и, следовательно, можно найти функции M и N , удовлетворяющие такому уравнению:

$$\varphi(x)M - x\psi(x)N = 1.$$

Отсюда мы выводим

$$\Phi(x) = \Phi(x)(\varphi(x)M - x\psi(x)N) = \varphi(x)(\Phi(x)M - x\psi(x)Q) - \\ - x\psi(x)(\Phi(x)N - \varphi(x)Q),$$

где Q — какая угодно функция.

Из этого выражения функции $\Phi(x)$ заключаем, что она представляется формулой

$$\varphi(x)(B_{n-l-1}x^{n-l-1} + B_{n-l-2}x^{n-l-2} + \dots + B_1x + B_0) - x\psi(x)(C_lx^{l-1} + \\ + C_{l-1}x^{l-2} + \dots + C_2x + C_1),$$

если только подходящий выбор Q понижает степени функций

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q, \quad \Phi(x)N - \varphi(x)Q$$

соответственно ниже $n-l$ и l . Как мы сейчас увидим, в случае, если

уравнения

$$p_1=0, \quad p_2=0, \quad \dots, \quad p_d=0$$

не удовлетворяются, всегда достигнем этого, принимая за Q частное от деления $\Phi(x)M$ на $x\psi(x)$.

В самом деле, для этого значения Q функция

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q$$

приводится к R , остатку от деления $\Phi(x)M$ на $x\psi(x)$, и, следовательно, ее степень ниже степени $x\psi(x)$ или x^{n-1} .

Переходя к выражению

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q,$$

заметим, что уравнения

$$\varphi(x)M - x\psi(x)N = 1, \quad \Phi(x)M - x\psi(x)Q = R$$

дают

$$M = \frac{1 + x\psi(x)N}{\varphi(x)}, \quad Q = \frac{\Phi(x)M - R}{x\psi(x)},$$

откуда следует такое выражение для Q :

$$Q = \frac{\Phi(x) + x\psi(x)\Phi(x)N - R\varphi(x)}{x\psi(x)\varphi(x)}$$

и затем

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q = \Phi(x)N - \frac{\Phi(x) + x\psi(x)N - R\varphi(x)}{x\psi(x)} = -\frac{\Phi(x)}{x\psi(x)} + \frac{R\varphi(x)}{x\psi(x)}.$$

Из этого выражения функции

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q$$

легко узнаем, что ее степень будет ниже l , пока уравнения

$$p_1=0, \quad p_2=0, \quad \dots, \quad p_d=0$$

не будут удовлетворены, или, что сводится к тому же, пока степень функции

$$\psi(x) = p_1x^{n-l-1} + p_2x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}$$

будет превосходить $n-l-d-1$, или $\mu-l-2$, ибо d равно $n+1-\mu$.

Чтобы в этом удостовериться, заметим, что в этом случае член $\frac{\Phi(x)}{x\psi(x)}$ будет степени ниже $\mu - 1 - (\mu - l - 1) = d$, так как функция $\Phi(x)$ только степени $\mu - 1$.

Что касается другого члена выражения

$$\Phi(x)N - \varphi(x)Q = -\frac{\Phi(x)}{x\psi(x)} + \frac{R\varphi(x)}{x\psi(x)},$$

степень его также ниже l , ибо степень R , как мы видели, ниже степени $x\psi(x)$, а степень функции

$$\varphi(x) = p_{n-l+1}x^l + p_{n-l+2}x^{l-1} + \dots + p_n x + 1$$

не может быть выше l .

Таким образом, мы убеждаемся, что в случае, когда уравнения

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \dots, \quad p_d = 0$$

не удовлетворены и когда Q представляет частное от деления $\Phi(x)M$ на $x\psi(x)$, степени выражений

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q, \quad \Phi(x)N - \varphi(x)Q = 0$$

будут соответственно ниже $n - l$ и l , что и требовалось доказать.

Так же можно убедиться, что в случае, когда уравнения

$$p_{n-l+1} = 0, \quad p_{n-l+2} = 0, \quad \dots, \quad p_{n-l+d} = 0$$

не удовлетворены, степени функций

$$\Phi(x)M - x\psi(x)Q, \quad \Phi(x)N - \varphi(x)Q$$

будут соответственно меньше $n - l$ и l , если только взять за Q частное от деления $\Phi(x)N$ на $\varphi(x)$.

В силу чего, как мы видели, уравнения (2), при $\mu \leq n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$, отличных от нуля, влекут за собой неизбежно такие равенства:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, & p_2 &= 0, & \dots, & p_d &= 0, \\ p_{n-l+1} &= 0, & p_{n-l+2} &= 0, & \dots, & p_{n-l+d} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$d = n + 1 - \mu.$$

Отсюда, по § 2, вытекает следующая теорема:

Теорема 4. Если количества $p_1, p_2, \dots, p_n$ выбраны так, что функция

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \dots + p_n x + 1} - Y$$

от $x = -h$ до $x = +h$ уклоняется наименее от нуля, то число различных решений, общих для двух уравнений

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0$$

и заключенных между $x = -h$ и $x = +h$, может быть ниже $n + 1$ на d единиц не иначе, как только при условиях

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, & p_2 &= 0, & \dots, & p_d &= 0, \\ p_{n-l+1} &= 0, & p_{n-l+2} &= 0, & \dots, & p_{n-l+d} &= 0. \end{aligned}$$

Количество L означает предел значений $F(x)$ между $x = -h$ и $x = +h$.

Так как всякий общий корень двух уравнений доставляет особое соотношение между их коэффициентами, то ясно, что из этой теоремы получатся $n + 1 - d$ уравнений между количествами

$$p_1, p_2, \dots, p_n, L,$$

которые входят в функции $F^2(x) - L^2$, $(x^2 - h^2) F'(x)$, и, так как в то же время имеем

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, & p_2 &= 0, & \dots, & p_d &= 0, \\ p_{n-l+1} &= 0, & p_{n-l+2} &= 0, & \dots, & p_{n-l+d} &= 0, \end{aligned}$$

то окончательно будем иметь $n + d + 1$ уравнений между $n + 1$ искомыми количествами $p_1, p_2, \dots, p_n, L$.

Отсюда следует, что, кроме случая $d = 0$, эти уравнения могут быть удовлетворены не иначе, как если данные задачи сами подчиняются некоторым условиям; а это приводит нас к заключению, что число d может отличаться от нуля только в исключительных случаях, когда входящие в функцию Y количества вместе с данной величиной h удовлетворяют некоторым уравнениям.

Оставляя в стороне эти случаи, будем иметь

$$d=0,$$

и тогда, согласно доказанной теореме, число различных решений, общих для двух уравнений

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0$$

и заключенных между $x = -h$ и $x = +h$, будет по меньшей мере равно $n + 1$, как это всегда имеет место для двух других уже рассмотренных выражений $F(x)$.

V

§ 17. Чтобы показать приложение теорем, относящихся к трем частным видам $F(x)$, займемся решением таких трех задач:

1) *Какая из всех целых функций вида*

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

уклоняется возможно менее от нуля между пределами $x = -h$ и $x = +h$?

2) *Какая из дробей вида*

$$\frac{x^n + p' x^{n-1} + p'' x^{n-2} + \dots + p^{(n-1)} x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2} x + A_{n-l-1}},$$

имеющих один и тот же знаменатель

$$A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2} x + A_{n-l-1},$$

уклоняется возможно менее от нуля между пределами $x = -h$ и $x = +h$?

3) *Какая из дробей вида*

$$\frac{p' x^{n-l-1} + p'' x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)} x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)} x^l + p^{n-l+2} x^{l-1} + \dots + p^{(n)} x + p^{(n+1)}}$$

между $x = -h$ и $x = +h$ уклоняется возможно менее от данного полинома $x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \dots$?

§ 18. Все эти задачи, очевидно, представляют только частные случаи тех, которыми мы занимались в § 14, 15, 16, и на основании трех выше доказанных теорем легко притти к уравнениям, которые определяют их решение. Но переходя к разысканию окончательных результатов, тотчас увидим, что уравнения, определяющие искомые количества

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

не могут быть решены известными методами алгебры, если только число этих количеств не очень ограничено; ибо по причине очень сложной формы этих уравнений их решение в случае многих неизвестных требует выкладок, совершенно невыполнимых. Итак, если пытаться решать наши задачи посредством этих уравнений, то нельзя идти далее небольшого числа частных случаев, которые, отдельно взятые, не представляют большого интереса. Мы покажем в следующих параграфах, что можно дать общее решение наших задач, приводя их к вопросам неопределенного анализа.

Мы выполним это приведение, замечая, что, в силу выше доказанных теорем, решение этих задач характеризуется одним очень простым свойством, которым обладает система двух уравнений, составленных из искомых функций, и аналитическое выражение которого, как мы увидим, доставляет неопределенные уравнения второй степени между искомыми многочленами, заключающимися в функциях, и некоторыми другими многочленами, которые играют роль вспомогательных неизвестных. С помощью этих-то неопределенных уравнений мы получаем окончательное решение наших задач, которое нельзя было бы найти с помощью обыкновенных способов алгебры.

§ 19. Тот же способ может быть с выгодой употреблен во многих других случаях и, между прочим, в общих исследованиях о приближенном представлении функции в виде многочлена или в виде какой-нибудь дроби, причем он дает решение задачи, упомянутой в § 4.

Мы предполагаем это сделать в другом мемуаре, где будет видно, как важно решение частных задач, которое мы дадим теперь, для общих исследований о приближенном представлении функций в представленном рациональном виде.

VI

О функции вида

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n,$$

которая наименее уклоняется от нуля между пределами $x = -h$ и $x = +h$.

§ 20. Так как функция

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

представляет выражение

$$p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n - Y$$

в случае $Y = -x^n$, то мы заключаем, в силу теоремы 2, что при таком выборе коэффициентов

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

для которого выражение

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

уклоняется возможно менее от нуля между $x = -h$ и $x = +h$, уравнения

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0 \quad (6)$$

имеют по крайней мере $n + 1$ общих решений, различных между собой.

Положим, что

$$x = x_0$$

будет одним из этих решений.

Нетрудно убедиться, что тогда выражение

$$(x^2 - h^2) (F^2(x) - L^2)$$

будет делиться на $(x - x_0)^2$. Действительно, на основании первого из предыдущих уравнений выражение

$$(x^2 - h^2) (F^2(x) - L^2)$$

обращается в нуль при $x = x_0$.

Сверх того, его первая производная

$$2(x^2 - h^2)F(x)F'(x) + 2x(F^2(x) - L^2),$$

в силу тех же уравнений, также приводится к нулю при $x = x_0$; а это и доказывает нам, что выражение

$$(x^2 - h^2)(F^2(x) - L^2)$$

делится на $(x - x_0)^2$.

То же самое имеет место относительно других общих решений уравнений (6), и так как число этих решений, различных между собой, не меньше $n + 1$, то из этого следует, что выражение

$$(x^2 - h^2)(F^2(x) - L^2)$$

делится на $n + 1$ различных множителей

$$(x - x_0)^2, (x - x_1)^2, (x - x_2)^2, \dots, (x - x_n)^2$$

и, следовательно, на их произведение

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Но выражение

$$(x^2 - h^2)(F^2(x) - L^2),$$

в котором

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

только степени $2n + 2$, и потому частное от деления этого выражения на произведение

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2$$

может быть только постоянным. Поэтому

$$(x^2 - h^2)(F^2(x) - L^2) = C(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Это уравнение будет иметь место только, если $x + h$ и $x - h$ входят в числе множителей

$$x - x_0, \quad x - x_1, \quad x - x_2, \quad \dots, \quad x - x_n.$$

А если предположить

$$x - x_0 = x + h, \quad x - x_1 = x - h,$$

то, по разделении на $(x + h)(x - h) = x^2 - h^2$, оно становится таким:

$$F^2(x) - L^2 = C(x^2 - h^2)(x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2,$$

или

$$F^2(x) - L^2 = (x^2 - h^2) \Phi^2(x), \quad (7)$$

причем через $\Phi(x)$ обозначена целая функция

$$\sqrt{C}(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Именно из этого уравнения мы найдем $F(x)$, т. е. ту из функций вида $x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$, которая уклоняется возможно менее от нуля. Количество L , как мы знаем, определяет наибольшую величину этой функции для x , заключенного между пределами $x = -h$ и $x = +h$.

§ 21. Чтобы найти функцию $F(x)$ по уравнению (7), заметим, что оно дает

$$(F(x) - \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2})(F(x) + \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2}) = L^2$$

и затем

$$F(x) - \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{F(x) + \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2}}.$$

Отсюда мы выводим

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \sqrt{x^2 - h^2} + \frac{L^2}{\Phi(x)(F(x) + \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2})},$$

а это доказывает, что дробь $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ представляет величину $\sqrt{x^2 - h^2}$ с точностью до членов порядка $\frac{1}{\Phi^2(x)}$ включительно.

Но это может иметь место только, если $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ будет одною из подходящих дробей $\sqrt{x^2 - h^2}$, которые находятся разложением этого радикала в непрерывную дробь. Сверх того, так как функции $F(x)$,

$\Phi(x)$, в силу уравнения (7), необходимо взаимно простые и так как

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n,$$

то ясно, что $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ будет тою из подходящих дробей $\sqrt{x^2 - h^2}$, числитель которой степени n , и что ее части могут отличаться только постоянным множителем от $F(x)$ и $\Phi(x)$. Следовательно, будем иметь, обозначая через $\frac{P_n}{Q_n}$ ту из подходящих дробей $\sqrt{x^2 - h^2}$, числитель которой степени n ,

$$F(x) = C_0 P_n, \quad \Phi(x) = C_0 Q_n.$$

Значение постоянной C_0 мы найдем, замечая, что $F(x)$ должна быть вида $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n$ и, следовательно, коэффициент при x^n должен быть равным 1.

§ 22. Через разложение $\sqrt{x^2 - h^2}$ в непрерывную дробь нетрудно найти ряд ее подходящих дробей, следовательно, и обозначенную нами через $\frac{P_n}{Q_n}$, которою определяются $F(x)$ и $\Phi(x)$. Но можно найти прямо выражения функций P_n и Q_n , как мы сейчас покажем.

Из тождества

$$(x - \sqrt{x^2 - h^2})(x + \sqrt{x^2 - h^2}) = h^2,$$

которое легко проверить, имеем

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x = -\frac{h^2}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} = -\frac{h^2}{2x + \sqrt{x^2 - h^2} - x},$$

потому находим

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - h^2} - x &= -\frac{h^2}{2x + \sqrt{x^2 - h^2} - x} = -\frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x + \sqrt{x^2 - h^2} - x}} = \\ &= -\frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x + \sqrt{x^2 - h^2} - x} = -\frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} \dots - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{\sqrt{x^2 - h^2} + x}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выражение $\sqrt{x^2 - h^2}$ разворачивается в непрерывную дробь

$$x - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

и что полное частное равно $\sqrt{x^2 - h^2} + x$. Итак, обозначая через

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \dots, \quad \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}, \quad \frac{P_m}{Q_m}, \quad \dots$$

ряд подходящих дробей для

$$\sqrt{x^2 - h^2} = x - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

имеем

$$\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{P_m (\sqrt{x^2 - h^2} + x) - h^2 P_{m-1}}{Q_m (\sqrt{x^2 - h^2} + x) - h^2 Q_{m-1}}$$

и затем

$$P_m - Q_m \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{h^2 (P_{m-1} - Q_{m-1} \sqrt{x^2 - h^2})}{x + \sqrt{x^2 - h^2}}.$$

Так как

$$h^2 = (x + \sqrt{x^2 - h^2})(x - \sqrt{x^2 - h^2}),$$

эта величина $P_m - Q_m \sqrt{x^2 - h^2}$ дает нам

$$P_m - Q_m \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_{m-1} - Q_{m-1} \sqrt{x^2 - h^2}),$$

или, что сводится к тому же,

$$\frac{P_m - Q_m \sqrt{x^2 - h^2}}{P_{m-1} - Q_{m-1} \sqrt{x^2 - h^2}} = x - \sqrt{x^2 - h^2}.$$

Делая в этой формуле

$$m = n, \quad m = n - 1, \quad \dots, \quad m = 3, \quad m = 2,$$

получаем ряд уравнений

$$\begin{aligned} \frac{P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2}}{P_{n-1} - Q_{n-1} \sqrt{x^2 - h^2}} &= x - \sqrt{x^2 - h^2}, \\ \frac{P_{n-1} - Q_{n-1} \sqrt{x^2 - h^2}}{P_{n-2} - Q_{n-2} \sqrt{x^2 - h^2}} &= x - \sqrt{x^2 - h^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{P_3 - Q_3 \sqrt{x^2 - h^2}}{P_2 - Q_2 \sqrt{x^2 - h^2}} &= x - \sqrt{x^2 - h^2}, \\ \frac{P_2 - Q_2 \sqrt{x^2 - h^2}}{P_1 - Q_1 \sqrt{x^2 - h^2}} &= x - \sqrt{x^2 - h^2}, \end{aligned}$$

которые, по перемножении, дают

$$\frac{P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2}}{P_1 - Q_1 \sqrt{x^2 - h^2}} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-1},$$

откуда мы заключаем

$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2}) (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-1} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n,$$

замечая, что первая подходящая дробь для

$$\sqrt{x^2 - h^2} = x - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

равна $\frac{x}{1}$ и что, следовательно,

$$P_1 = x, \quad Q_1 = 1, \quad P_1 - Q_1 \sqrt{x^2 - h^2} = x - \sqrt{x^2 - h^2}.$$

Уравнение

$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n$$

через перемену знака $\sqrt{x^2 - h^2}$ становится

$$P_n + Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x + \sqrt{x^2 - h^2})^n,$$

и, следовательно, мы имеем

$$P_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2},$$

$$Q_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2\sqrt{x^2 - h^2}}.$$

Поэтому искомая функция $F(x)$, равная, как мы видели (§ 21) $C_0 P_n$, выражается так:

$$F(x) = C_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2}.$$

Это выражение $F(x)$, разложенное по возрастающим степеням x , имеет первым членом $2^{n-1}C_0 x^n$, а $F(x)$ должна быть вида

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n,$$

следовательно, $2^{n-1}C_0 = 1$, откуда

$$C_0 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Внося эту величину в предыдущее выражение функции $F(x)$, находим окончательно

$$F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}. \quad (8)$$

Таково выражение $F(x)$, той из функций вида

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n,$$

которая уклоняется возможно менее от нуля между $x = -h$ и $x = +h$.

VII

§ 23. Найденное выражение $F(x)$ легко доставляет предел уклонений этой функции от нуля между $x = -h$ и $x = +h$, предел, обозначенный нами буквой L .

Для этого заметим, что уравнение (7) при $x = h$ дает

$$F^2(h) - L^2 = 0,$$

и потому

$$L = \pm F^2(h).$$

Но, делая $x = h$ в найденной величине $F(x)$, имеем

$$F(h) = \frac{h^n}{2^{n-1}},$$

следовательно,

$$L = \frac{h^n}{2^{n-1}}.$$

Найдя величину L и замечая, что между всеми функциями вида

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

наша функция $F(x)$ наименее уклоняется от нуля между $x = -h$ и $x = +h$, мы приходим к такой теореме:

Теорема 5. Числовая величина функции $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n$ между $x = -h$ и $x = +h$ не может оставаться ниже $2 \left(\frac{h}{2}\right)^n$.

§ 24. Из этой теоремы выводится много других; мы укажем некоторые из них.

Теорема 6. Если функция $f(x)$ имеет вид $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n$, и разность между двумя значениями $f(a-h)$, $f(a+h)$ меньше $4 \left(\frac{h}{2}\right)^n$, то первая производная от $f(x)$ меняет знак между $x = a-h$ и $x = a+h$.

Для доказательства предположим противное, именно, что $f'(x)$ не меняет знака между $x = a-h$ и $x = a+h$.

В этом предположении функция

$$f(a+x) - \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$$

от $x = -h$ до $x = +h$ могла бы быть только постоянно возрастающею

или постоянно убывающею и, следовательно, оставалась бы заключенною между своими двумя значениями

$$f(a-h) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2} = \frac{f(a-h) - f(a+h)}{2},$$

$$f(a+h) - \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = -\frac{f(a-h) - f(a+h)}{2},$$

откуда следует, что ее числовая величина, от $x = -h$ до $x = +h$, не превосходила бы числовой величины $\frac{f(a-h) - f(a+h)}{2}$ и, следовательно, была бы ниже $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$, так как последняя величина, по сказанному в теореме, численно больше, чем

$$\frac{f(a-h) - f(a+h)}{2}.$$

Но функция

$$f(a+x) - \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2}$$

имеет вид

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n,$$

и, следовательно, этого не может быть в силу теоремы 5, что и доказывает высказанную теорему.

Теорема 7. Если числовая величина интеграла

$$\int_{H_0}^H (x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K) dx$$

меньше $\frac{4}{n} \left(\frac{H-H_0}{4} \right)^n$, то между $x = H_0$ и $x = H$ лежит по крайней мере один корень уравнения.

$$x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K = 0.$$

Для доказательства заметим, что, полагая

$$n \int_0^x (x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K) dx = f(x),$$

$$H_0 = a-h, \quad H = a+h,$$

находим

$$f(a+h) - f(a-h) = n \int_{H_0}^H (x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K) dx,$$

$$\left(\frac{H-H_0}{4}\right)^n = \left(\frac{h}{2}\right)^n,$$

и так как, согласно условию теоремы, определенный интеграл

$$\int_{H_0}^H (x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K) dx$$

численно ниже $\frac{4}{n} \left(\frac{H-H_0}{4}\right)^n$, то, следовательно, числовая величина $f(a+h) - f(a-h)$ меньше $4 \left(\frac{h}{2}\right)^n$, откуда, замечая, что функция

$$f(x) = n \int_0^x (x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K) dx$$

имеет вид

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n,$$

мы заключаем, по предыдущей теореме, что уравнение

$$f'(x) = n(x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots + K) = 0$$

должно иметь по меньшей мере один корень, лежащий между $a-h=H_0$, $a+h=H$, что и требовалось доказать.

Теорема 8. Число перемен знака в ряде

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x),$$

где

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + \dots + K,$$

всегда меняется, когда переходим от какой-нибудь подстановки $x=t$ к другой, определяемой формулой $x = t \pm 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{16}}$, принимая корень со знаком, противоположным знаку $\frac{f(t)}{f'(t)}$.

Мы разберем здесь только случай, когда $f(t)$ и $f'(t)$ положительны. Но легко убедиться, что то же доказательство приложимо ко всем другим случаям.

Для доказательства нашей теоремы в случае, когда $f(t)$ и $f'(t)$ положительны, мы покажем, что по меньшей мере одна из функций $f(x)$, $f'(x)$ меняет знак между $x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ и $x = t$. Действительно, если бы функции $f(x)$, $f'(x)$ оставались положительными между этими двумя пределами, то величина

$$f\left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)$$

была бы положительною и ниже $f(t)$, а, следовательно, численное значение разности

$$f(t) - f\left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)$$

оставалось бы ниже $f(t)$, или, что сводится к тому же, ниже

$$4 \left[\frac{t - \left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)}{4} \right]^n.$$

Но этого нельзя допустить, ибо, в силу теоремы 6, числовая величина разности

$$f(t) - f\left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)$$

не может быть ниже

$$4 \left[\frac{t - \left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}\right)}{4} \right]^n,$$

если только $f'(x)$ не меняет знака в пределах

$$x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}, \quad x = t.$$

Итак, наверно в этих пределах по меньшей мере одна из функций $f(x)$, $f'(x)$ перестает быть положительной.

Наша теорема становится очевидной, если $f(x)$ меняет знак между $x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ и $x = t$; поэтому остается только разобрать случай, когда в этих пределах функция $f(x)$ остается положительной, а $f'(x)$ меняет знак.

Так как $f'(t)$ число положительное, то ясно, что в случае изменения знака функции $f'(x)$ между $x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ и $x = t$ она должна переходить от отрицательных значений к положительным. Но эта перемена знака унесет две перемены знака в ряде

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x),$$

ибо, по предположению, $f(x)$ положительна от $x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$ до $x = t$, а $f''(x)$ не может быть отрицательной, когда $f'(x)$ переходит от отрицательных значений к положительным, что и доказывает нашу теорему.

В частном случае, когда уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет только вещественные корни, только что установленная теорема влечет за собой следующую:

Теорема 9. Если уравнение

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + \dots + K$$

имеет только вещественные корни, какова бы ни была величина t , всегда существует один из его корней между $x = t$ и $x = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{16}}$, если радикал взят со знаком, противным знаку $\frac{f(t)}{f'(t)}$.

Теорема 10. Если уравнение $x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx + K = 0$ содержит только нечетные степени x , то между пределами $-2\sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}$, $+2\sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}$ лежит по меньшей мере один из его корней.

Действительно, если бы уравнение

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx + K = 0$$

не имело вовсе корней между

$$x = -2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}, \quad x = +2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}},$$

то же самое относилось бы и к уравнению

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx - K = 0.$$

Отсюда, взяв произведение этих уравнений, мы пришли бы к заключению, что в тех же пределах уравнение

$$(x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx)^2 - K^2 = 0$$

не имеет корней.

Но так как функция

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx$$

обращается в нуль при $x=0$, это предполагает, что ее численное значение от $x = -2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}$ до $x = +2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}$ остается ниже K , чего нельзя допустить, ибо, по теореме 5, функция вида $x^{2l+1} + p_1x^{2l} + \dots + p_{2l+1}$ между этими пределами не может оставаться численно ниже

$$2 \left(\frac{2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}}{2} \right)^{2l+1} = K,$$

откуда и вытекает наша теорема.

Теорема 11. Если уравнение

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx + K - K_0x^{2\lambda} = 0$$

содержит только один член $-K_0x^{2\lambda}$ с четною степенью x и этот член имеет знак, противный знаку известного члена K , то между пределами $x = -2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}$, $x = +2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}}$ лежит по меньшей мере один из его корней.

Замечая, что уравнение

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx + K - K_0x^{2\lambda} = 0$$

с переменной x на $-x$ становится

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx - K + K_0x^{2\lambda} = 0$$

и что эти уравнения, перемноженные между собой, дают

$$(x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx)^2 - (K - K_0x^{2\lambda})^2 = 0,$$

мы заключаем, как и в предыдущем доказательстве, что последнее уравнение не имело бы вовсе корней между

$$x = -2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{K}{2}}, \quad x = +2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{K}{2}},$$

если бы ни один из корней уравнения

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx + K - K_0x^{2\lambda} = 0$$

не заключался в этих пределах, и потому численное значение функции

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx$$

от $x = -2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{K}{2}}$ до $x = +2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{K}{2}}$ осталось бы ниже численного значения $K - K_0x^{2\lambda}$. А это, очевидно, невозможно, если выражение $K - K_0x^{2\lambda}$ обращается в нуль в этих пределах, так как числовая величина никогда не меньше нуля.

Это невозможно и в том случае, если в этих пределах выражение $K - K_0x^{2\lambda}$ не обращается в нуль: ибо в этом случае, при одинаковых знаках K_0 и K , числовая величина $K - K_0x^{2\lambda}$ остается ниже численного значения K , и на основании того, что мы видели при доказательстве предыдущей теоремы, функция

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \dots + Jx$$

в пределах

$$x = -2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{K}{2}}, \quad x = +2^{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{K}{2}}$$

не может оставаться численно ниже K и тем более ниже величины численно меньшей, что и доказывает нашу теорему.

VIII

§ 25. Кроме данных нами теорем и многих других того же рода, можно извлечь еще много других результатов из рассмотрения целой функции, которая среди всех функций того же вида возможно менее уклоняется от нуля между данными пределами.

Мы покажем теперь, какую выгоду можно извлечь из этого рассмотрения относительно интерполирования.

Пусть $f(x)$ то точное выражение величин, которое требуется представить приближенно целою функциею

$$A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^{n-1}$$

и

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n),$$

суть n значений $f(x)$, при помощи которых определяются коэффициенты $A, B, C, \dots, H$ искомого выражения $f(x)$.

Так как коэффициенты

$$A, B, C, \dots, H$$

находятся посредством приравнивания функции $f(x)$ и его искомого выражения

$$A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^{n-1}$$

при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, то разность этих двух функций будет приводиться к нулю для всех этих значений x . Поэтому, пока функция $f(x)$ и ее производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ не перестают быть конечными и непрерывными в пределах, где заключены $x, x_1, x_2, \dots, x_n$, находим

$$f(x) - (A + Bx + \dots + Hx^{n-1}) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где α — некоторое среднее количество между $x, x_1, x_2, \dots, x_n$.

§ 26. Так как разность

$$f(x) - (A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^{n-1})$$

означает погрешность приближенной величины $f(x)$, полученной по формуле

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^{n-1},$$

то предыдущее уравнение показывает нам, что степень точности значений $f(x)$, находимых по этой формуле, или, что то же самое, посредством интерполирования, будет больше или меньше, смотря по величине выражения

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Из того, что это выражение в промежутке, где производится интерполирование, может достигать пределов более или менее значительных сообразно с величинами $x_1, x_2, \dots, x_n$, ясно, что степень точности значений, получаемых интерполированием, зависит не только от природы интерполируемой функции и от числа значений $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, употребляемых при интерполировании, но также от более или менее подходящего выбора этих значений. Чем более выражение

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

приближается к нулю в пределах интерполирования, тем выгоднее величины

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

для точности результатов.

Но так как ничего не известно о точном выражении интерполируемой функции $f(x)$ и, следовательно, о связи между величиной $f^{(n)}(x)$ и величинами $x, x_1, x_2, \dots, x_n$, то остается только выбором $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ стараться уменьшить по возможности множитель

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

между пределами интерполирования.

Итак, относительно точности результатов интерполирования всем системам величин

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

следует предпочесть ту, для которой функция

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

между пределами интерполирования наименее уклоняется от нуля, и, следовательно, по § 22, следует взять

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n},$$

если интерполирование производится между пределами

$$x = -h, \quad x = +h.$$

§ 27. Только что полученная формула показывает, что величины, которые должно взять за $x_1, x_2, \dots, x_n$ при интерполировании между пределами $x = -h$ и $x = +h$, суть n корней уравнения

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n} = 0,$$

а если положим

$$x = h \cos \varphi,$$

это уравнение становится

$$\cos n\varphi = 0.$$

Отсюда следует

$$\varphi = \frac{2k + 1}{2n} \pi,$$

где k — какое-нибудь целое число.

Поэтому n корней уравнения

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n} = 0,$$

и, следовательно, величины $x_1, x_2, \dots, x_n$, о которых мы говорим, выражаются так:

$$h \cos \frac{\pi}{2n}, \quad h \cos \frac{3\pi}{2n}, \quad \dots, \quad h \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}. \quad (9)$$

Преимущество этих значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ перед значениями равноотстоящими, употребляемыми обыкновенно при интерполировании,

обнаруживается очень ясно. В самом деле, по § 23, в случае, когда

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2n},$$

произведение

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

от $x = -h$ до $x = +h$ достигает только удвоенного $\left(\frac{h}{2}\right)^n$, между тем как в случае $x_1, x_2, \dots, x_n$ равноотстоящих

$$x_1 = h, \quad x_2 = \frac{n-3}{n-1}h, \quad x_3 = \frac{n-5}{n-1}h, \quad \dots, \quad x_n = -h,$$

находим, что произведение

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

в тех же пределах не остается ниже утроенного $\left(\frac{h}{2}\right)^n$. Например, при $n = 2, 3, 4, 5$

находим, что для этих значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ произведение

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

в пределах $x = -h, x = +h$ достигает следующих величин:

$$4 \left(\frac{h}{2}\right)^2, \quad \frac{16}{\sqrt{27}} \left(\frac{h}{2}\right)^3, \quad \frac{256}{81} \left(\frac{h}{2}\right)^4, \quad 2\sqrt{3} \left(\frac{h}{5}\right)^5.$$

Сверх того, отыскивая максимум максимум этой функции между $x = -h, x = +h$ в случае большого n , находим для его асимптотической величины выражение

$$\frac{1}{\log n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{4}{e}\right)^n \left(\frac{h}{2}\right)^n,$$

где множитель при $\left(\frac{h}{2}\right)^n$ стремится к ∞ по мере того, как возрастает число n .

§ 28. Так как значение $f^{(n)}(\alpha)$ в выражении погрешности интерполирования

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \dots n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

остается неизвестным, то нельзя ясно представить себе, насколько уменьшается ее максимум максимум между $x = -h$ и $x = +h$ от замены величин равноотстоящих $x_1, x_2, \dots, x_n$ величинами определенными, как мы только что показали, по (9). Но легко убедиться, что, кроме исключительного случая, когда $f^{(n)}(0) = 0$, отношения максимум максимум выражения

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \dots n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

и его множителя

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

которые получаются между $x = -h$ и $x = +h$ при двух выше указанных системах величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, стремятся к одному и тому же пределу, по мере того как h приближается к пределу нуль.

В самом деле, пусть E, M — наибольшие величины выражений

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \dots n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

в случае, когда $x_1, x_2, \dots, x_n$ определены по (9) и когда x остается между пределами $-h$ и $+h$. Так как отношение $\frac{E}{M}$ будет заключаться между наибольшей и наименьшей из величин, которые может иметь выражение

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \dots n}$$

от $x = -h$ до $x = +h$, и так как α — количество, остающееся в тех же пределах, как $x, x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. между $-h$ и $+h$, то мы находим

$$\frac{E}{M} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

обозначая через θ величину, заключенную между -1 и $+1$.

Тем же способом мы получаем

$$\frac{E'}{M'} = \frac{f^{(n)}(\theta_1 h)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

где θ_1 представляет количество, заключенное между -1 и $+1$, а E' , M' обозначают наибольшие значения выражений

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \dots n} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

которые получаются между $x = -h$ и $x = +h$ при равноотстоящих $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Деля одну на другую величины

$$\frac{E}{M}, \frac{E'}{M'},$$

имеем

$$\frac{E}{E'} \cdot \frac{M}{M'} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{f^{(n)}(\theta_1 h)},$$

что доказывает, что отношение величин

$$\frac{E}{E'}, \frac{M}{M'}$$

стремится к единице, когда h приближается к нулю и $f^{(n)}(\theta h)$, $f^{(n)}(\theta_1 h)$ при $h=0$ не обращаются в нуль, что и требовалось доказать.

Мы видели, что отношение $\frac{M}{M'}$ остается ниже $\frac{2}{3}$. Итак, в силу доказанного нами, наверно отношение $\frac{E}{E'}$, кроме исключительного случая $f^{(n)}(0)=0$, необходимо ниже 1, пока h будет достаточно малым.

IX

О дроби, которая из числа всех дробей вида

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}},$$

имеющих тот же знаменатель $A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}$, возможно менее уклоняется от нуля между пределами $x = -h$ и $x = +h$.

§ 29. Дробь, о которой идет речь, очевидно, можно представить под видом

$$\frac{p'x^{n-1} + p''x^{n-2} + \dots + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}} - \frac{x^n}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}}$$

и так как это выражение представляет частный случай такого

$$\frac{p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n}{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m} - Y,$$

которое мы разбирали в § 15, то из теоремы 3 мы заключаем, что искомая дробь

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}},$$

которую мы для сокращения будем обозначать через $F(x)$, должна обладать следующим свойством:

Уравнения

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0$$

имеют по меньшей мере $n+1$ общих решений, различных между собой и заключенных в пределах $x = -h$, $x = +h$.

Сообразуясь со сказанным в § 15, мы предполагаем, что знаменатель

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}$$

не обращается в нуль между $x = -h$ и $x = +h$.

§ 30. Полагая для сокращения

$$\begin{aligned} x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)} &= U, \\ A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1} &= v, \end{aligned}$$

находим

$$F(x) = \frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}} = \frac{U}{v};$$

через это уравнения

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0$$

сводятся к таким:

$$U^2 - L^2 v^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) \frac{v \frac{dU}{dx} - U \frac{dv}{dx}}{v^2} = 0.$$

В силу этого легко убедиться, что если $x = x_0$ будет общим решением уравнений

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0,$$

то это значение x удовлетворит также двум следующим уравнениям:

$$(x^2 - h^2) (U^2 - L^2 v^2) = 0, \quad \frac{d(x^2 - h^2) (U^2 - L^2 v^2)}{dx} = 0.$$

Действительно, первое из этих уравнений представляет непосредственное следствие такого:

$$U^2 - L^2 v^2 = 0.$$

Что же касается второго, то оно приводится к уравнению

$$2x(U^2 - L^2 v^2) + 2(x^2 - h^2) \left(U \frac{dU}{dx} - L^2 v \frac{dv}{dx} \right) = 0,$$

где, в силу уравнения

$$U^2 - L^2 v^2 = 0,$$

при $x = x_0$ первый член исчезает, а второй, по замене $L^2 v$ на $\frac{U^2}{v}$, обращается в

$$\frac{2(x^2 - h^2) U}{v} \left(v \frac{dU}{dx} - U \frac{dv}{dx} \right),$$

что будет нулем, по уравнению

$$(x^2 - h^2) \frac{v \frac{dU}{dx} - U \frac{dv}{dx}}{v^2} = 0,$$

имеющему корень $x = x_0$.

Но, коль скоро $x = x_0$ удовлетворяет двум уравнениям

$$(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2) = 0, \quad \frac{d(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2)}{dx} = 0,$$

функция

$$(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2)$$

необходимо имеет множителем $(x - x_0)^2$.

Из показанного нами относительно общего решения двух уравнений

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0$$

следует, что высказанное выше свойство искомой дроби $\frac{U}{v}$ предполагает делимость функции

$$(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2)$$

на множители

$$(x - x_0)^2, \quad (x - x_1)^2, \quad \dots, \quad (x - x_n)^2,$$

где $x_0, x_1, \dots, x_n$ — величины неравные и заключенные между $x = -h$ и $x = +h$.

Откуда следует, что эта функция делится на произведение

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2$$

и что этот делитель не имеет с v общих множителей, ибо функция v , по предположению, не обращается в нуль между $x = -h$ и $x = +h$, а $x_0, x_1, \dots, x_n$ заключены в этих пределах.

Но так как функции U и v суть соответственно степеней n и $n - l - 1$, степень $(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2)$ не может превосходить степени произведения

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2,$$

и потому частное от деления

$$(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2)$$

на

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2$$

может быть только количеством постоянным. Итак, будем иметь

$$(x^2 - h^2)(U^2 - L^2v^2) = C_0(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Это уравнение предполагает, что два из множителей

$$x - x_0, \quad x - x_1, \quad \dots, \quad x - x_n$$

соответственно равны

$$x + h, \quad x - h.$$

А если положим

$$x - x_0 = x + h, \quad x - x_1 = x - h,$$

это уравнение обратится в

$$U^2 - L^2v^2 = C_0(x + h)(x - h)(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2,$$

и потому

$$U^2 - L^2v^2 = (x^2 - h^2)W^2,$$

или

$$U^2 - W^2(x^2 - h^2) = L^2v^2, \tag{10}$$

где для сокращения принято

$$\sqrt{C_0}(x - x_2) \dots (x - x_n) = W.$$

§ 31. По уравнению

$$U^2 - W^2(x^2 - h^2) = L^2v^2$$

мы и будем искать функцию U , означающую, как мы видели, числитель дроби

$$\frac{U}{v} = \frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}},$$

которая из всех дробей того же вида уклоняется наименее от нуля, от $x = -h$ до $x = +h$. Положим, что, по разложении функции

$$v = A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}$$

на линейные множители, находим

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ величины различные между собой. Так как функция v , по предположению, не исчезает между $x = -h$ и $x = +h$, то количества $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, если они вещественны, лежат вне пределов $x = -h, x = +h$. С другой стороны, в силу того, что функция v степени $n - l - 1$ и v равняется $A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots$, будем иметь

$$l_1 + l_2 + \dots = n - l - 1. \quad (11)$$

Наконец, так как

$$(x^2 - h^2) W = V \overline{C_0} (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$$

и значения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ заключены между $x = -h$ и $x = +h$, функция $(x^2 - h^2) W$ не может обращаться в нуль при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$

X

§ 32. Переходя к определению U по уравнению

$$U^2 - W^2 (x^2 - h^2) = L^2 v^2,$$

начнем с разыскания всех решений уравнения

$$X^2 - Y^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} v^2,$$

где $(x^2 - h^2) Y^2$ не обращается в нуль при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, а функция v разлагается на линейные множители следующим образом:

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots$$

Чтобы достигнуть этого, условимся обозначать через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ единицу, взятую с одним из двух знаков $\pm$, через P рациональную часть выражения

$$\left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots$$

или, что сводится к тому же, выражения

$$\left(\frac{x-h}{\alpha_1-h} + \frac{x+h}{\alpha_1+h} + 2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{x^2-h^2}{\alpha_1^2+h^2}} \right)^{l_1} \left(\frac{x-h}{\alpha_2-h} + \frac{x+h}{\alpha_2+h} + 2\varepsilon_2 \sqrt{\frac{x^2-h^2}{\alpha_2^2+h^2}} \right)^{l_2} \dots$$

и через $Q \sqrt{x^2-h^2}$ другую его часть, содержащую иррациональный множитель $\sqrt{x^2-h^2}$. Согласно этому, находим

$$\begin{aligned} P + Q \sqrt{x^2-h^2} &= \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots, \\ P - Q \sqrt{x^2-h^2} &= \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

что по перемножении даст

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2(x^2-h^2) &= \left(\frac{x-h}{\alpha_1-h} - \frac{x+h}{\alpha_1+h} \right)^{2l_1} \left(\frac{x-h}{\alpha_2-h} - \frac{x+h}{\alpha_2+h} \right)^{2l_2} \dots = \\ &= \left(\frac{2h}{\alpha_1^2-h^2} \right)^{2l_1} \left(\frac{2h}{\alpha_2^2-h^2} \right)^{2l_2} \dots (x-\alpha_1)^{2l_1} (x-\alpha_2)^{2l_2} \dots, \end{aligned}$$

откуда, замечая, что произведение

$$(x-\alpha_1)^{2l_1} (x-\alpha_2)^{2l_2} \dots$$

отличается от v^2 только постоянным множителем, мы заключаем, что определенные таким образом функции P и $Q \sqrt{x^2-h^2}$ удовлетворяют уравнению

$$P^2 - Q^2(x^2-h^2) = C^{(1)}v^2. \quad (13)$$

Сверх того легко убедиться, что функции P и $Q \sqrt{x^2-h^2}$ не обращаются в нуль при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ и что их отношение $\frac{P}{Q \sqrt{x^2-h^2}}$ для этих значений x приводится соответственно к $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$

Чтобы обнаружить это, заметим, что $x = \alpha_1$ обращает в нуль или выражение

$$\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}},$$

или выражение

$$\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}},$$

смотря по тому, будет ли $\varepsilon_1 = +1$, или $\varepsilon_1 = -1$, и что для этого значения x ни одно из выражений

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}, & \quad \sqrt{\frac{x-h}{\alpha_3-h}} + \varepsilon_3 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}, \quad \dots, \\ \sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}, & \quad \sqrt{\frac{x-h}{\alpha_3-h}} - \varepsilon_3 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_3+h}}, \quad \dots \end{aligned}$$

не может обращаться в нуль, так как количества $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ не равны между собой.

Поэтому формулы (12) при $x = \alpha_1$ дают или

$$P - Q\sqrt{x^2 - h^2} = 0, \quad P + Q\sqrt{x^2 - h^2} = \text{конечной величины},$$

или

$$P + Q\sqrt{x^2 - h^2} = 0, \quad P - Q\sqrt{x^2 - h^2} = \text{конечной величины},$$

смотря по тому, будет ли $\varepsilon_1 = +1$, или $\varepsilon_1 = -1$. Итак, всегда

$$P - \varepsilon_1 Q\sqrt{x^2 - h^2} = 0, \quad P + \varepsilon_1 Q\sqrt{x^2 - h^2} = \text{конечной величины}.$$

Но из этих уравнений находим, очевидно, конечные величины для P и $Q\sqrt{x^2 - h^2}$, и первое из них дает $\frac{P}{Q\sqrt{x^2 - h^2}} = \varepsilon_1$, что и требовалось доказать.

§ 33. Теперь легко найти все возможные решения уравнения

$$X^2 - Y^2(x^2 - h^2) = C^{(0)}v^2,$$

где $Y\sqrt{x^2 - h^2}$ не обращается в нуль при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$

Во-первых, замечаем, что это уравнение, где

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots,$$

при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ дает

$$X^2 - Y^2 (x^2 - h^2) = 0,$$

и потому

$$X = \pm Y \sqrt{x^2 - h^2},$$

а так как функция $Y \sqrt{x^2 - h^2}$ не обращается в нуль при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, то это предполагает, что отношение $\frac{X}{Y \sqrt{x^2 - h^2}}$ для этих значений x должно приводиться к 1 с одним из двух знаков $\pm$, откуда следует, что мы не пропустим ни одного из решений, предполагая, что $\frac{X}{Y \sqrt{x^2 - h^2}}$ при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ приводится соответственно к $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, которыми мы обозначаем ± 1 . Установив это, мы покажем, что искомые решения уравнения

$$X^2 - Y^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} v^2 \quad (14)$$

и функции P и Q , определенные по (12), связаны между собой следующим образом:

- 1) Выражения $PX - QY(x^2 - h^2)$, $PY - QX$ делятся на v^2 .
- 2) Функции

$$X_0 = \frac{PX - QY(x^2 - h^2)}{v^2}, \quad Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2}$$

удовлетворяют уравнению

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = \text{постоянной}.$$

В самом деле, из уравнений (13) и (14) находим

$$X^2 = Y^2 (x^2 - h^2) + C^{(0)} v^2, \quad P^2 = Q^2 (x^2 - h^2) + C^{(1)} v^2,$$

и, в силу этих значений X^2 и P^2 , произведение

$$(PX - QY(x^2 - h^2))(PX + QY(x^2 - h^2)) = P^2 X^2 - Q^2 Y^2 (x^2 - h^2)^2$$

приводится к

$$(Y^2(x^2 - h^2) + C^{(0)}v^2)(Q^2(x^2 - h^2) + C^{(1)}v^2) - Q^2Y^2(x^2 - h^2)^2 = \\ = C^{(0)}Q^2(x^2 - h^2)v^2 + C^{(1)}Y^2(x^2 - h^2)v^2 + C^{(0)}C^{(1)}v^4.$$

Отсюда ясно, что произведение

$$(PX - QY(x^2 - h^2))(PX + QY(x^2 - h^2))$$

делится на v^2 .

С другой стороны, легко показать, что множитель

$$PX + QY(x^2 - h^2)$$

не обращается в нуль при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$

Чтобы удостовериться, заметим, что функции

$$Q\sqrt{x^2 - h^2}, \quad Y\sqrt{x^2 - h^2}$$

не обращаются в нуль для этих величин x , и, пока они остаются отличными от 0, выражение

$$PX + QY(x^2 - h^2)$$

не может исчезнуть, если только не имеем

$$\frac{PX}{QY(x^2 - h^2)} + 1 = 0,$$

или, что сводится к тому же,

$$\frac{P}{Q\sqrt{x^2 - h^2}} \cdot \frac{X}{Y\sqrt{x^2 - h^2}} = -1.$$

А этого не может быть при $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, ибо мы видели, что для этих величин x отношения

$$\frac{P}{Q\sqrt{x^2 - h^2}}, \quad \frac{X}{Y\sqrt{x^2 - h^2}}$$

приводятся к $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, и потому их произведение становится равным $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \dots$, т. е. 1.

Итак, мы удостоверились, что выражение

$$PX + QY (x^2 - h^2)$$

не обращается в нуль для $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ и что, следовательно, оно не имеет общего множителя с функцией

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots$$

Но так как мы нашли, что произведение

$$(PX - QY (x^2 - h^2)) (PX + QY (x^2 - h^2))$$

делится на v^2 , то из этого следует, что v^2 делит $PX - QY (x^2 - h^2)$.

Нам остается показать, что функции

$$X_0 = \frac{PX - QY (x^2 - h^2)}{v^2}, \quad Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2}$$

удовлетворяют уравнению

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = \text{постоянной}.$$

Но этого очень легко достигнуть, замечая, что произведение уравнений (13) и (14) может быть представлено под видом

$$(PX - QY (x^2 - h^2))^2 - (PY - QX)^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} C^{(1)} v^4,$$

откуда, разделив на v^4 , получаем

$$\left(\frac{PX - QY (x^2 - h^2)}{v^2} \right)^2 - \left(\frac{PY - QX}{v^2} \right)^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} C^{(1)},$$

и потому

$$X_0^2 - Y_0^2 (x^2 - h^2) = C^{(0)} C^{(1)},$$

где X_0, Y_0 означают частные от деления функций

$$PX - QY (x^2 - h^2), \quad PY - QX$$

на v^2 .

§ 34. Из того, что мы знаем о связи между функциями P и Q , определенными по формулам (12), и искомыми решениями уравнения

$$X^2 - Y^2(x^2 - h^2) = C^{(0)}v^2,$$

ясно, что можно извлечь все эти решения из формул

$$X_0 = \frac{PX - QY(x^2 - h^2)}{v^2}, \quad Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2},$$

принимая за X_0 и Y_0 все целые функции, способные удовлетворить уравнению

$$X_0^2 - Y_0^2(x^2 - h^2) = \text{постоянной}.$$

А на основании того, что мы видели в § 22 относительно уравнения

$$F^2(x) - \Phi^2(x)(x^2 - h^2) = L^2,$$

можно удовлетворить уравнению

$$X_0^2 - Y_0^2(x^2 - h^2) = \text{постоянной}$$

при X_0 степени n только величинами X_0 , Y_0 , определенными таким образом:

$$\begin{aligned} X_0 &= C_0 P_n, \quad Y_0 = C_0 Q_n, \\ P_n + Q_n \sqrt{x^2 - h^2} &= (x + \sqrt{x^2 - h^2})^n, \\ P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} &= (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n, \end{aligned}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} X_0 + Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= C_0 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^n, \\ X_0 - Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= C_0 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что мы найдем всевозможные решения этого уравнения по формулам

$$\begin{aligned} X_0 + Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= C_0 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda, \\ X_0 - Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= C_0 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda, \end{aligned}$$

принимая за показатель λ какое-нибудь целое число.

Из этого мы заключаем, что все искомые решения уравнения

$$X^2 - Y^2(x^2 - h^2) = C^{(0)}v^2$$

определяются такой системой равенств:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{PX - QY(x^2 - h^2)}{v^2}, \quad Y_0 = \frac{PY - QX}{v^2}, \\ X_0 + Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= C_0 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda, \\ X_0 - Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= C_0 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda, \end{aligned}$$

где P и Q суть целые функции, находимые по формулам (12).

§ 35. Переходя к разысканию величин X и Y , заметим, что два первых равенства дают

$$\begin{aligned} X_0 + Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= \frac{(P - Q \sqrt{x^2 - h^2})(X + Y \sqrt{x^2 - h^2})}{v^2}, \\ X_0 - Y_0 \sqrt{x^2 - h^2} &= \frac{(P + Q \sqrt{x^2 - h^2})(X - Y \sqrt{x^2 - h^2})}{v^2}, \end{aligned}$$

а, в силу двух последних, эти формулы становятся

$$\begin{aligned} C_0 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda &= \frac{(P - Q \sqrt{x^2 - h^2})(X + Y \sqrt{x^2 - h^2})}{v^2}, \\ C_0 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda &= \frac{(P + Q \sqrt{x^2 - h^2})(X - Y \sqrt{x^2 - h^2})}{v^2}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь, по (13), v^2 на $\frac{P^2 - Q^2(x^2 - h^2)}{C^{(1)}}$, мы получаем

$$\begin{aligned} C_0 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda &= C^{(1)} \frac{(P - Q \sqrt{x^2 - h^2})(X + Y \sqrt{x^2 - h^2})}{P^2 - Q^2(x^2 - h^2)} = \\ &= C^{(1)} \frac{X + Y \sqrt{x^2 - h^2}}{P + Q \sqrt{x^2 - h^2}}, \\ C_0 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda &= C^{(1)} \frac{(P + Q \sqrt{x^2 - h^2})(X - Y \sqrt{x^2 - h^2})}{P^2 - Q^2(x^2 - h^2)} = \\ &= C^{(1)} \frac{X - Y \sqrt{x^2 - h^2}}{P - Q \sqrt{x^2 - h^2}}, \end{aligned}$$

откуда вытекают такие величины для $X + Y \sqrt{x^2 - h^2}$ и $X - Y \sqrt{x^2 - h^2}$:

$$\begin{aligned} X + Y \sqrt{x^2 - h^2} &= \frac{C_0}{C^{(1)}} (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda (P + Q \sqrt{x^2 - h^2}), \\ X - Y \sqrt{x^2 - h^2} &= \frac{C_0}{C^{(1)}} (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda (P - Q \sqrt{x^2 - h^2}), \end{aligned}$$

которые после подстановки величин (12) $P + Q\sqrt{x^2 - h^2}$, $P - Q\sqrt{x^2 - h^2}$ и после того, как сделано

$$\frac{C_0}{C^{(1)}} = C_1,$$

становятся

$$\begin{aligned} X + Y\sqrt{x^2 - h^2} &= C_1 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots, \\ X - Y\sqrt{x^2 - h^2} &= C_1 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots \end{aligned}$$

Так мы приходим к определению всех решений уравнений

$$X^2 - Y^2(x^2 - h^2) = C^{(0)}v^2,$$

где $Y\sqrt{x^2 - h^2}$ не обращается в нуль для $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$. Количество C_1 и число λ — произвольные постоянные; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ означают ± 1 .

XI

§ 36. Из найденных решений уравнения

$$X^2 - Y^2(x^2 - h^2) = C^{(0)}v^2$$

мы видим, что уравнение

$$U^2 - W^2(x^2 - h^2) = L^2v^2,$$

установленное относительно искомой функции U (§ 30), предполагает

$$\begin{aligned} U + W\sqrt{x^2 - h^2} &= C_1 (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots, \\ U - W\sqrt{x^2 - h^2} &= C_1 (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots \end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{C_1}{2} (x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda \times \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots \\
 &+ \frac{C_1}{2} (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda \times \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots, \\
 W &= \frac{C_1}{2} \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda}{\sqrt{x^2 - h^2}} \times \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots \\
 &- \frac{C_1}{2} \frac{(x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda}{\sqrt{x^2 - h^2}} \times \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots
 \end{aligned}$$

Чтобы определить величины λ и C_1 , заметим, что найденное выражение U , будучи разложено по убывающим степеням x , дает для первого члена

$$2^{\lambda-1} C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots x^{\lambda+l_1+l_2+\dots},$$

и так как искомая функция U имеет вид

$$x^n + p' x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)} x + p^{(n)},$$

то отсюда следует

$$\lambda + l_1 + l_2 + \dots = n,$$

$$2^{\lambda-1} C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}} \right)^{2l_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}} \right)^{2l_2} \dots = 1.$$

Первое из этих уравнений, в силу (11), дает

$$\lambda = n - (n - l - 1) = l + 1,$$

и, внося эту величину λ в последнее, выводим

$$C_1 = \frac{1}{2^l} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1 - h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1 + h}} \right)^{2l_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2 - h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2 + h}} \right)^{2l_2}}.$$

Вследствие этого предыдущие выражения U и W становятся

$$\begin{aligned} U = & \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - h^2}}{2} \right)^{l+1} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}} \right)^{2l_1} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}} \right)^{2l_2} + \\ & + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - h^2}}{2} \right)^{l+1} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}} \right)^{2l_1} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}} \right)^{2l_2} \dots, \\ W = & \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{l+1}}{2^{l+1} \sqrt{x^2 - h^2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}} \right)^{2l_1} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}} \right)^{2l_2} + \\ & + \frac{(x - \sqrt{x^2 - h^2})^{l+1}}{2^{l+1} \sqrt{x^2 - h^2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_1-h}} - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_1+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1+h}}} \right)^{2l_1} \left(\frac{\sqrt{\frac{x-h}{\alpha_2-h}} - \varepsilon_2 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2-h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2+h}}} \right)^{2l_2} \dots \end{aligned}$$

§ 37. Чтобы найти величину L , заметим, что при $x = h$ уравнение

$$U^2 - W^2 (x^2 - h^2) = L^2 v^2$$

дает

$$U^2 = L^2 v^2, \quad U = \pm Lv;$$

это доказывает, что количество L равно значению $\frac{U}{v}$ при $x = h$, а так

как предыдущие выражения U и v в случае $x = h$ дают

$$\begin{aligned}
 U &= 2 \left(\frac{h}{2} \right)^{l+1} \left(\frac{\varepsilon_1 \sqrt{\frac{2h}{\alpha_1 + h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1 - h}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha_1 + h}}} \right)^{2l_1} \left(\frac{\varepsilon_2 \sqrt{\frac{2h}{\alpha_2 + h}}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2 - h}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\alpha_2 + h}}} \right)^{2l_2} \dots = \\
 &= \frac{(\alpha_1 - h)^{l_1} (\alpha_2 - h)^{l_2} \dots h^{l+l_1+l_2+\dots+1}}{2^l (\alpha_1 + \varepsilon_1 \sqrt{\alpha_1^2 - h^2})^{l_1} (\alpha_2 + \varepsilon_2 \sqrt{\alpha_2^2 - h^2})^{l_2} \dots}, \\
 v &= \pm A_0 (\alpha_1 - h)^{l_1} (\alpha_2 - h)^{l_2} \dots,
 \end{aligned}$$

и, по (11),

$$l_1 + l_2 + \dots = n - l - 1,$$

то отсюда вытекает такое значение для L :

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_0 (\alpha_1 + \varepsilon_1 \sqrt{\alpha_1^2 - h^2})^{l_1} (\alpha_2 + \varepsilon_2 \sqrt{\alpha_2^2 - h^2})^{l_2} \dots},$$

или, что все равно,

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_0 \alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \dots \left(1 + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \right)^{l_1} \left(1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \right)^{l_2} \dots}$$

Но так как

$$v = A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1} = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots$$

и потому

$$\alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \dots = \pm \frac{A_{n-l-1}}{A_0},$$

то найденное выражение приводится к такому:

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_{n-l-1} \left(1 + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \right)^{l_1} \left(1 + \varepsilon_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \right)^{l_2} \dots}. \quad (15)$$

§ 38. В выражениях искомой функции U и количества L остаются неизвестными только знаки $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, ... Мы покажем теперь, что должно взять

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1, \quad \dots,$$

если под радикалами

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \dots$$

подразумевать те из корней уравнений

$$x^2 = 1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}, \quad x^2 = 1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}, \dots,$$

вещественная часть которых положительна.

Из выражения L видно, что его модуль при всех возможных предположениях о знаках $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, ... получает наименьшее значение, когда $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, ...; ибо модули

$$1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \dots$$

соответственно выше модулей

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \dots,$$

так как вещественные части количеств

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \dots$$

положительны.

С другой стороны, легко убедиться, что значение L , которое находим, принимая $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, ..., вещественно. Действительно, количества α_1 , α_2 , ... не могут иметь, как мы видели (§ 31), вещественных значений, заключенных между $x = -h$ и $x = +h$, и отсюда видно, что выражения

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \dots$$

могут быть мнимыми только в случае, когда α_1 , α_2 , ... мнимы. Но мнимые множители вещественной функции

$$v = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots$$

сопряжены попарно, следовательно, то же самое будет с мнимыми множителями произведения

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_2^2}}\right)^{l_2} \dots,$$

и наша формула дает для L величину вещественную.

В силу показанного нами относительно величины L в случае $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, ... видно, что она будет наименьшею среди всех вещественных величин L , которые можно найти из нашей формулы.

Но так как L означает предел значений искомой функции $\frac{U}{v}$ между $x = -h$ и $x = +h$ и так как, согласно нашей задаче, требуется сделать этот предел по возможности близким к нулю, то отсюда следует, что предположение

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1, \quad \dots$$

дает искомое решение, если только, принимая эти значения ε_1 , ε_2 , ... в наших формулах, найдем, что дробь $\frac{U}{v}$ от $x = -h$ до $x = +h$ остается действительно заключенною между $-L$ и $+L$.

В этом последнем очень легко убедиться, как мы сейчас покажем.

Полагая $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, ... в найденных выражениях U и W , мы замечаем, что они приводятся к такому виду:

$$\begin{aligned} U = & \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - h^2}}{2} \right)^{l+1} \times \\ & \times \left(\frac{\frac{x_1 x - h^2}{x_1} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_1^2}}} \right)^{l_1} \left(\frac{\frac{x_2 x - h^2}{x_2} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_2^2}}} \right)^{l_2} \dots + \\ & + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - h^2}}{2} \right)^{l+1} \times \\ & \times \left(\frac{\frac{x_1 x - h^2}{x_1} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_1^2}}} \right)^{l_1} \left(\frac{\frac{x_2 x - h^2}{x_2} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{x_2^2}}} \right)^{l_2} \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{l+1}}{2^{l+1} \sqrt{x^2 - h^2}} \times \\
 & \times \left(\frac{\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}} \right)^{l_1} \left(\frac{\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}} \right)^{l_2} \dots \\
 & - \frac{(x - \sqrt{x^2 - h^2})^{l+1}}{2^{l+1} \sqrt{x^2 - h^2}} \times \\
 & \times \left(\frac{\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}} \right)^{l_1} \left(\frac{\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}} \right)^{l_2} \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

и так как множители произведений

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \right)^{l_2} \dots, \\
 & \left(\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_1} \left(\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_2} \dots, \\
 & \left(\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_1} \left(\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_2} \dots,
 \end{aligned}$$

в силу показанного нами относительно количеств $\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}$, $\sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}$, ...,

или вещественные, или мнимые, сопряженные по два, то видим, что значения U и W необходимо вещественны. Но пока функции U , W и количество L вещественны, уравнение

$$U^2 - W^2 (x^2 - h^2) = L^2 v^2$$

предполагает, что от $x = -h$ до $x = +h$ функция U^2 не превосходит $L^2 v^2$, и, следовательно, дробь $\frac{U}{v}$ остается заключенною между $-L$ и $+L$, что и требовалось доказать. Итак, мы приходим к убеждению, что при функции U , определенной по формуле (16), дробь $\frac{U}{v}$ будет та,

которая из всех дробей вида

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}}$$

с одинаковым знаменателем

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}$$

наименее уклоняется от нуля между $x = -h$ и $x = +h$.

Что касается L , предела значений этой дроби между $x = -h$ и $x = +h$, то, принимая в формуле (15) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, ..., мы находим, что он выражается так:

$$L = \pm \frac{h^n}{2^l A_{n-l-1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \dots}.$$

Так как все другие дроби с знаменателем

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}$$

и числителем

$$x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)},$$

между $x = -h$ и $x = +h$, будут уклоняться от нуля более, чем та, о которой мы говорили, отсюда следует, что в этом промежутке их величина не может оставаться ниже найденной величины L .

XII

§ 39. Укажем теперь ту выгоду, какую можно извлечь для алгебры из полученных результатов о дробях вида

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}}.$$

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ вещественны, количества

$$1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}, \quad \dots,$$

как мы видели, также вещественны, и их значения, очевидно, ниже 2. С другой стороны, если $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ величины мнимые и ρ — нижний предел их модулей, то очевидно, что модули количеств

$$1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}, \quad 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}$$

не превосходят $1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{\rho^2}}$ и, следовательно, остаются ниже $2 + \frac{h}{\rho}$, ибо $\sqrt{1 + \frac{h^2}{\rho^2}} < 1 + \frac{h}{\rho}$. Поэтому, предполагая, что уравнение

$$A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1} = A_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots = 0$$

имеет μ мнимых корней и $n - l - \mu - 1$ вещественных корней, мы находим, что произведение

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \dots$$

менее $2^{n-l-\mu-1} \left(2 + \frac{h}{\rho}\right)^\mu = 2^{n-l-1} \left(\frac{2\rho + h}{2\rho}\right)^\mu$, и потому

$$\frac{h^n}{2^l \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \dots} > 2 \left(\frac{h}{2}\right)^n \left(\frac{2\rho}{2\rho + h}\right)^\mu,$$

откуда, в силу того, что

$$L = \frac{h^n}{2^l A_{n-l-1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}\right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}\right)^{l_2} \dots},$$

следует, в случае $A_{n-l-1} = 1$, такая теорема:

Теорема 12. Если знаменатель дроби

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0 x^{n-l-1} + A_1 x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1}$$

не обращается в нуль между $x = -h$ и $x = +h$, то числовая величина этой дроби от $x = -h$ до $x = +h$ не может оставаться

ниже $2\left(\frac{h}{2}\right)^n\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^\mu$, где μ — число мнимых корней уравнения

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1 = 0$$

и ρ — нижний предел их модулей.

Если функция $A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + 1$ обращается в нуль между $x = -h$ и $x = +h$, то в этих пределах дробь

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1}$$

не может оставаться конечною, если только ее числитель не обращается в нуль одновременно с знаменателем. Поэтому только что доказанная теорема влечет за собой следующую:

Теорема 13. В пределах $x = -h$ и $x = +h$, где дробь

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1}$$

не становится $\frac{0}{0}$, ее численное значение не может оставаться ниже

$2\left(\frac{h}{2}\right)^n\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^\mu$, где μ — число мнимых корней уравнения

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1 = 0,$$

а ρ — нижний предел их модулей.

В случае, когда знаменатель

$$A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1$$

содержит только вещественные множители, число μ приводится к нулю и предыдущая теорема изменяется в такую другую:

Теорема 14. Если дробь

$$\frac{x^n + p'x^{n-1} + \dots + p^{(n-1)}x + p^{(n)}}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-2}x + 1},$$

знаменатель которой составлен из вещественных линейных

множителей, не обращается в $\frac{0}{0}$ между $x = -h$ и $x = +h$, ее численное значение в этих пределах не может оставаться ниже $2\left(\frac{h}{2}\right)^n$.

§ 40. На основании этих теорем можно доказать много очень простых предложений относительно решения уравнений. Вот некоторые из них.

Теорема 15. Если уравнение $Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K = 0$ имеет μ мнимых корней и их модули не ниже ρ , то найдется по крайней мере один корень уравнения

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

между $x = -h$ и $x = +h$, коль скоро численное значение K не превосходит $2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\lambda+1} \left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^\mu$.

В самом деле, если бы уравнение

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

не имело решений между $x = -h$ и $x = +h$, то не имело бы таковых и уравнение

$$x^{2\lambda+1} - Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} - Cx^{2\lambda-2} + \dots - Hx^2 + Jx - K = 0,$$

которое получаем, меняя x на $-x$ в уравнении

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0,$$

и потому следовало бы заключить, что в пределах $x = -h$ и $x = +h$ нельзя удовлетворить уравнению

$$(x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \dots + Jx)^2 - (Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K)^2 = 0,$$

полученному через перемножение двух предыдущих уравнений.

А этого нельзя допустить, как мы сейчас покажем.

Это уравнение, очевидно, имеет решение между $x = -h$ и $x = +h$, если в этих пределах обе функции

$$\begin{aligned} & x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \dots + Jx, \\ & Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K \end{aligned}$$

обращаются в нуль одновременно. В противном случае дробь

$$\frac{x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \dots + Jx}{\frac{A}{K}x^{2\lambda} + \frac{C}{K}x^{2\lambda-2} + \dots + \frac{H}{K}x^2 + 1}$$

между $x = -h$ и $x = +h$ не обращается в $\frac{0}{0}$, и тогда, по теореме 13, ее числовая величина не может оставаться ниже $2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^\mu$ и, следовательно, ниже числовой величины K , так как, по предположению, эта величина по большей мере равна $2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^\mu$. Но, представляя уравнение

$$(x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \dots + Jx)^2 - (Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K)^2 = 0$$

под видом

$$\left(\frac{x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \dots + Jx}{\frac{A}{K}x^{2\lambda} + \frac{C}{K}x^{2\lambda-2} + \dots + \frac{H}{K}x^2 + 1}\right)^2 - K^2 = 0,$$

легко убеждаемся, что оно имеет по меньшей мере один корень между $x = -h$ и $x = +h$, если только дробь

$$\frac{x^{2\lambda+1} + Bx^{2\lambda-1} + \dots + Jx}{\frac{A}{K}x^{2\lambda} + \frac{C}{K}x^{2\lambda-2} + \dots + \frac{H}{K}x^2 + 1},$$

которая обращается в нуль при $x = 0$, не остается численно ниже K , что и доказывает высказанную теорему.

С помощью этой теоремы всегда можно найти пределы $-h$ и $+h$, между которыми уравнение

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

имеет по меньшей мере один корень, именно принимая за h положительную величину, удовлетворяющую условию

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda+2}\left(\frac{2\rho}{2\rho+h}\right)^{2\mu} \geq K^2. \quad (17)$$

А если уравнение

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K = 0$$

имеет только вещественные корни, число μ сводится к нулю, и тогда это условие становится

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda+2} \geq K^2$$

или

$$h \geq 2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{K^2}{4}},$$

чему удовлетворим, принимая за h ту из двух величин $+2^{2\lambda+1} \sqrt[4]{\frac{K}{2}}$, $-2^{2\lambda+1} \sqrt[4]{\frac{K}{2}}$, которая положительна.

Отсюда вытекает следующая теорема:

Теорема 16. В пределах $-2^{2\lambda+1} \sqrt[4]{\frac{K}{2}}$, $+2^{2\lambda+1} \sqrt[4]{\frac{K}{2}}$ находится по меньшей мере один корень уравнения

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0,$$

если уравнение $Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + K = 0$ имеет только вещественные корни.

§ 41. Замечая, что условие (17) можно представить под видом

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda-2\mu+2} \geq K^2 \left(\frac{2}{h} + \frac{1}{\rho}\right)^{2\mu},$$

легко видеть, что ему можно удовлетворить положительным значением h , принимая

$$h = 2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{K^2}{4}} \left(1 + \frac{1}{\rho} 2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{K^2}{4}}\right)^{\frac{\mu}{2\lambda+1-\mu}}.$$

Чтобы в этом удостовериться, достаточно заметить, что при этом значении h находим, с одной стороны,

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda-2\mu+2} = 4\left(\frac{K^2}{4}\right)^{\frac{4\lambda-2\mu+2}{4\lambda+2}} \left(1 + \frac{1}{\rho} 2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{K^2}{4}}\right)^{2\mu} = K^2 \left(2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{4}{K^2}} + \frac{1}{\rho}\right)^{2\mu}$$

и, с другой стороны (по причине $h > 2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{K^2}{4}}$),

$$K^2 \left(\frac{2}{h} + \frac{1}{\rho}\right)^{2\mu} < K^2 \left(2^{4\lambda+2} \sqrt[4]{\frac{4}{K^2}} + \frac{1}{\rho}\right)^{2\mu},$$

откуда следует неравенство

$$4\left(\frac{h}{2}\right)^{4\lambda-2\mu+2} > K^2 \left(\frac{2}{h} + \frac{1}{\rho}\right)^{2\mu},$$

которое и надо было проверить.

Замечая, что вышеуказанное выражение h , способное удовлетворить условию (17), равно

$$\pm 2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2}} \left(1 + \frac{1}{\rho} \sqrt[4\lambda+2]{\frac{K^2}{4}}\right)^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}}$$

с одним из двух знаков $\pm$, мы выводим из теоремы 15 такую:

Теорема 17. *Существует всегда по меньшей мере один корень уравнения*

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

между пределами

$$\begin{aligned} & -2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2}} \left(1 + \frac{1}{\rho} \sqrt[4\lambda+2]{\frac{K^2}{4}}\right)^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}}, \\ & + 2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2}} \left(1 + \frac{1}{\rho} \sqrt[4\lambda+2]{\frac{K^2}{4}}\right)^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}}, \end{aligned}$$

где μ — число мнимых корней уравнения

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K = 0,$$

и ρ — нижний предел их модулей.

Если μ не превосходит λ , дробь $\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}$ остается меньше единицы и тогда *

$$\left(1 + \frac{1}{\rho} \sqrt[4\lambda+2]{\frac{K^2}{4}}\right)^{\frac{\mu}{2\lambda-\mu+1}} < 1 + \rho^{\frac{-\mu}{2\lambda-\mu+1}} \left(\frac{K^2}{4}\right)^{\frac{\mu}{(4\lambda+2)(2\lambda-\mu+1)}},$$

* Легко убедиться, что в случае $z > 0$, $m < 1$ и > 0 количество $(1+z)^m$ меньше, чем $1+z^m$, замечая, что функция $(1+z)^m - 1 - z^m$, первая производная которой равна $m[(1+z)^{m-1} - z^{m-1}]$, остается убывающей для всех положительных значений z и обращается в нуль для $z=0$.

откуда следует

$$2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda+1]{\frac{K}{2}} \left(1 + \frac{1}{\rho} \sqrt[4\lambda+2]{\frac{K^2}{4}}\right)^{2\lambda+1-\mu} < 2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda+1]{\frac{K}{2}} + 2^{2\lambda-\mu+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^\mu}}$$

и предыдущая теорема влечет за собой такую:

Теорема 18. Если μ , число мнимых корней уравнения

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K = 0,$$

не превосходит λ , а их модули не ниже ρ , то найдется всегда по меньшей мере один корень уравнения

$$x^{2\lambda+1} + Ax^{2\lambda} + Bx^{2\lambda-1} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + Jx + K = 0$$

между пределами

$$-2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda+1]{\frac{K}{2}} - 2^{2\lambda-\mu+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^\mu}} \quad + \quad 2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda+1]{\frac{K}{2}} + 2^{2\lambda-\mu+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^\mu}}.$$

В случае, когда уравнение

$$Ax^{2\lambda} + Cx^{2\lambda-2} + \dots + Hx^2 + K = 0$$

сводится к

$$K_0 x^{2\lambda_0} + K = 0,$$

причем количества K_0 , K одного и того же знака, находим, что μ , число его мнимых корней, равно $2\lambda_0$ и что все эти корни имеют модулем $\sqrt[2\lambda_0]{\frac{K}{K_0}}$. Принимая же эту величину за ρ и полагая $\mu = 2\lambda_0$, получаем

$$2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda+1]{\frac{K}{2}} + 2^{2\lambda-\mu+1} \sqrt[2\lambda-\mu+1]{\frac{K}{2\rho^\mu}} = 2^{2\lambda+1} \sqrt[2\lambda+1]{\frac{K}{2}} + 2^{2(\lambda-\lambda_0)+1} \sqrt[2(\lambda-\lambda_0)+1]{\frac{K_0}{2}},$$

откуда, в силу предыдущей теоремы, вытекает следующая:

Теорема 19. Если уравнение

$$x^{2\lambda+1} + Cx^{2\lambda-1} + \dots + K_0 x^{2\lambda_0} + \dots + Jx + K = 0$$

содержит только один член $K_0 x^{2\lambda_0}$ с четною степенью x и коэффициент этого члена одинакового знака с известным членом K , а показатель не превосходит λ , то это уравнение имеет по мень-

шей мере один корень, заключенный между пределами

$$-2^{2\lambda+1}\sqrt{\frac{K}{2}}-2^{2(\lambda-\lambda_0)+1}\sqrt{\frac{K_0}{2}}, \quad +2^{2\lambda+1}\sqrt{\frac{K}{2}}+2^{2(\lambda-\lambda_0)+1}\sqrt{\frac{K_0}{2}}.$$

Если члены $K_0x^{2\lambda_0}$ и K противоположных знаков, то найдется, по теореме 11, по меньшей мере один из корней уравнения

$$x^{2\lambda+1}+Cx^{2\lambda-1}+\dots+K_0x^{2\lambda_0}+\dots+Jx+K=0$$

в более тесных пределах

$$-2^{2\lambda+1}\sqrt{\frac{K}{2}}, \quad +2^{2\lambda+1}\sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Итак, если через K_0 , K обозначим величины положительные, пределы

$$-2^{2\lambda+1}\sqrt{\frac{K}{2}}-2^{2(\lambda-\lambda_0)+1}\sqrt{\frac{K_0}{2}}, \quad +2^{2\lambda+1}\sqrt{\frac{K}{2}}+2^{2(\lambda-\lambda_0)+1}\sqrt{\frac{K_0}{2}}$$

содержат necessarily по меньшей мере один корень уравнения

$$x^{2\lambda+1}+Cx^{2\lambda-1}+\dots\pm K_0x^{2\lambda_0}+\dots+Jx\pm K=0,$$

каковы бы ни были знаки у членов $K_0x^{2\lambda_0}$ и K .

ХІІІ

О дробі вида

$$\frac{p'x^{n-l-1}+p''x^{n-l-2}+\dots+p^{(n-l-1)}x+p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l+p^{(n-l+2)}x^{l-1}+\dots+p^{(n)}x+p^{(n+1)}}$$

которая между $x=-h$ и $x=+h$ наименее уклоняется от данного многочлена $x^{n-l}+Ax^{n-l-1}+Bx^{n-l-2}+\dots$

§ 42. Ясно, что эта дробь не должна становиться бесконечной при $x=0$, а это предполагает, что в ее выражении

$$\frac{p'x^{n-l-1}+p''x^{n-l-2}+\dots+p^{(n-l-1)}x+p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l+p^{(n-l+2)}x^{l-1}+\dots+p^{(n)}x+p^{(n+1)}}$$

член $p^{(n+1)}$ не приводится к нулю. Но если $p^{(n+1)}$ не нуль, очевидно,

эту функцию можно представить под видом

$$\frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l+1} + \dots + p_n x + 1},$$

обозначая

$$\frac{p'}{p^{(n+1)}}, \frac{p''}{p^{(n+1)}}, \dots, \frac{p^{(n-l-1)}}{p^{(n+1)}}, \frac{p^{(n-l)}}{p^{(n+1)}}, \frac{p^{(n-l+1)}}{p^{(n+1)}}, \dots, \frac{p^{(n)}}{p^{(n+1)}}$$

через

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-l-1}, p_{n-l}, p_{n-l+1}, \dots, p_n.$$

Именно в этом виде мы и будем рассматривать искомую дробь. Обозначая через $F(x)$ разность данного многочлена

$$x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \dots$$

и искомой дроби

$$\frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l+1} + \dots + p_n x + 1},$$

мы заключаем из теоремы 4 (§ 16), что число различных между собой решений, общих двум уравнениям

$$F^2(x) - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) F'(x) = 0,$$

не может понижаться до $n + 1 - d$, если только искомая дробь

$$\frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l+1} + \dots + p_n x + 1}$$

не сводится к виду

$$\frac{p_{d+1} x^{n-l-d-1} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+d+1} x^{l-d} + \dots + p_n x + 1}.$$

Полагая же для сокращения

$$\begin{aligned} x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \dots &= u, \\ p_{d+1} x^{n-l-d-1} + \dots + p_{n-l-1} x + p_{n-l} &= U, \\ p_{n-l+d+1} x^{l-d} + \dots + p_n x + 1 &= V, \end{aligned}$$

находим

$$F(x) = u - \frac{U}{V} = \frac{uV - U}{V},$$

и затем уравнения, о которых мы будем говорить, становятся

$$(uV - U)^2 - L^2 V^2 = 0, \quad (x^2 - h^2) \frac{d \frac{uV - U}{V}}{dx} = 0.$$

§ 43. Следуя тому же пути, как в § 30, легко убедиться, что если $x = x_0$ есть общее решение этих двух уравнений, то выражение

$$(x^2 - h^2) [(uV - U)^2 - L^2 V^2]$$

делится на $(x - x_0)^2$; а так как число этих корней, различных между собой, по меньшей мере равно $n + 1 - d$, то мы заключаем, что выражение

$$(x^2 - h^2) [(uV - U)^2 - L^2 V^2]$$

делится на $n + 1 - d$ различных множителей

$$(x - x_0)^2, \quad (x - x_1)^2, \quad (x - x_2)^2, \quad \dots, \quad (x - x_{n-d})^2,$$

откуда мы выводим уравнение

$$\begin{aligned} & (x^2 - h^2) [(uV - U)^2 - L^2 V^2] = \\ & = C (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-d})^2, \end{aligned}$$

замечая, что функция $(x^2 - h^2) [(uV - U)^2 - L^2 V^2]$, где

$$\begin{aligned} u &= x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \dots, \\ V &= p_{n-l+d+1}x^{l-d} + \dots + p_n x + 1, \\ U &= p_{d+1}x^{n-l-d-1} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}, \end{aligned}$$

не может быть высшей степени, чем ее делитель

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{n-d})^2.$$

Но это уравнение, очевидно, невозможно, если только $x - h$ и $x + h$ не находятся среди множителей

$$x - x_0, \quad x - x_1, \quad x - x_2, \quad \dots, \quad x - x_{n-d};$$

если же для определенности мы положим, что имеем

$$x - x_0 = x - h, \quad x - x_1 = x + h,$$

то оно становится

$$\begin{aligned} & (x^2 - h^2) [(uV - U)^2 - L^2 V^2] = \\ & = C(x - h)^2 (x + h)^2 (x - x_2)^2 \cdots (x - x_{n-d})^2, \end{aligned}$$

и поэтому

$$(uV - U)^2 - L^2 V^2 = C(x^2 - h^2)(x - x_2)^2 \cdots (x - x_{n-d})^2,$$

отсюда мы выводим уравнение

$$(uV - U)^2 - L^2 V^2 = W^2 (x^2 - h^2), \quad (18)$$

обозначая через W целую функцию

$$V \bar{C}(x - x_2) \cdots (x - x_{n-d}).$$

Так как функции U и V вида

$$\begin{aligned} & p_{d+1}x^{n-l-d-1} + \cdots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}, \\ & p_{n-l+d+1}x^{l-d} + \cdots + p_n x + 1, \end{aligned}$$

то их степени не превзойдут $n - l - d + 1$, $l - d$. Сверх того, легко видеть, что степень V не может быть ниже $l - d$, ибо иначе функция

$$(uV - U)^2 - L^2 V^2$$

была бы степени низшей, чем $2(n - d)$, и, следовательно, уравнение (18), где

$$W^2 (x^2 - h^2) = C(x - x_2)^2 \cdots (x - x_{n-d})^2 (x^2 - h^2),$$

было бы невозможным.

Итак, функция V необходимо будет степени $l - d$.

§ 44. Согласно сказанному в § 16, дробь

$$\frac{U}{V} = \frac{p_{d+1}x^{n-l-d-1} + \cdots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+d+1}x^{l-d} + \cdots + p_n x + 1}$$

представляет искомую в ее простейшем виде, и, следовательно, функции U и V взаимно простые. Это выражение искомой дроби может представить два случая, именно: случай, когда d число четное, и слу-

чай, когда d число нечетное. Но мы сведем последний случай к первому, предполагая, что в случае нечетного d в функции U, V, W вводится общий множитель $1 \pm \frac{x}{h}$ или $1 - \frac{x}{h}$, что не изменяет ни вида уравнения (18), ни величины дроби $\frac{U}{V}$, только ее члены становятся делимыми на одну и ту же функцию $x \pm h$ или $x - h$.

В силу этого мы будем отныне предполагать, что d число четное и что функции U и V могут иметь общий делитель $x \pm h$, который не представит никаких усложнений в наших исследованиях, как мы увидим впоследствии.

§ 45. Переходя к определению функций U и V , заметим, что уравнение (18) можно представить в таком виде:

$$(uV - U \pm LV)(uV - U - LV) = (x^2 - h^2) W^2,$$

а это доказывает, что функция $(x^2 - h^2) W^2$ разлагается на два множителя

$$uV - U \pm LV, \quad uV - U - LV.$$

Так как эти множители, помноженные соответственно на $L - u$, $L \pm u$, дают в сумме $-2LU$, а их разность приводится к $2LV$, то ясно, что их общий делитель должен делить также обе функции

$$U, \quad V$$

и, следовательно, может быть только вида $x \pm h$, ибо функции U и V , как мы видели (§ 44), не могут иметь общего делителя другого вида. В силу этого, замечая, что функция $(x^2 - h^2) W^2$ может разлагаться на два множителя, взаимно простые или с общим делителем $x \pm h$, только двумя способами:

$$\begin{aligned} & W_0^2 \cdot (x^2 - h^2) W_1^2, \\ & (x - h) W_0^2 \cdot (x + h) W_1^2, \end{aligned}$$

мы заключаем, что уравнение

$$(uV - U \pm LV)(uV - U - LV) = (x^2 - h^2) W^2$$

необходимо влечет за собой одну из таких четырех пар уравнений:

$$\begin{aligned} uV - U + LV &= W_0^2, & uV - U - LV &= (x^2 - h^2) W_1^2; \\ uV - U + LV &= (x - h) W_0^2, & uV - U - LV &= (x + h) W_1^2; \\ uV - U + LV &= (x^2 - h^2) W_0^2, & uV - U - LV &= W_1^2; \\ uV - U + LV &= (x + h) W_0^2, & uV - U - LV &= (x - h) W^2. \end{aligned}$$

Из этих четырех систем уравнений нам следует рассмотреть только две первые

$$\begin{aligned} uV - U + LV &= W_0^2, & uV - U - LV &= (x^2 - h^2) W_1^2; \\ uV - U + LV &= (x - h) W_0^2, & uV - U - LV &= (x + h) W_1^2, \end{aligned}$$

ибо последние выводятся из них через изменение знака у количества L . Сверх того, так как функции u , V соответственно степеней $n - l$, $l - d$, и степень U не превосходит $n - l - d - 1$, то находим, что выражение

$$uV - U + LV$$

степени $n - d$, и, следовательно, при d четном это выражение будет четной или нечетной степени, смотря по тому, четное или нечетное само число n . Поэтому, замечая, что из двух систем уравнений

$$\begin{aligned} uV - U + LV &= W_0^2, & uV - U - LV &= (x^2 - h^2) W_1^2; \\ uV - U + LV &= (x - h) W_0^2, & uV - U - LV &= (x + h) W_1^2, \end{aligned}$$

первая предполагает, что функция

$$uV - U + LV$$

четной степени, а вторая, что она нечетной степени, мы заключаем, что первая система будет иметь место в случае четного n , а вторая в случае нечетного n .

Мы разберем отдельно каждый из этих случаев.

XIV

Число n четное

§ 46. В этом случае будем иметь такие два уравнения:

$$uV - U + LV = W_0^2, \quad uV - U - LV = (x^2 - h^2) W_1^2, \quad (19)$$

которые, будучи решены относительно U и V , дают

$$2LV = W_0^2 - (x^2 - h^2) W_1^2, \quad (20)$$

$$2LU = (u - L) W_0^2 - (u + L)(x^2 - h^2) W_1^2. \quad (21)$$

Так как функции u , V соответственно степеней $n - l$, $l - d$, и степень U не превосходит $n - l - d - 1$, уравнения (19) показывают нам, что функции W_0 , W_1 соответственно степеней $\frac{n-d}{2}$, $\frac{n-d}{2} - 1$.

С другой стороны, уравнение (21), будучи представлено под видом

$$2LU = [W_0 \sqrt{u - L} - W_1 \sqrt{(u + L)(x^2 - h^2)}] [W_0 \sqrt{u - L} + W_1 \sqrt{(u + L)(x^2 - h^2)}],$$

дает нам

$$\frac{W_0}{W_1} - \sqrt{\frac{(u + L)(x^2 - h^2)}{u - L}} = \frac{2LU}{W_1 [W_0(u - L) + W_1 \sqrt{(u^2 - L^2)(x^2 - h^2)}]},$$

что доказывает, что дробь $\frac{W_0}{W_1}$ представляет величину $\sqrt{\frac{(u + L)(x^2 - h^2)}{u - L}}$ точно до членов того же порядка, как

$$\frac{2LU}{W_1 [W_0(u - L) + W_1 \sqrt{(u^2 - L^2)(x^2 - h^2)}]}.$$

А так как функции W_0 , W_1 , u , в силу показанного выше, соответственно степеней $\frac{n-d}{2}$, $\frac{n-d}{2} - 1$, $n - l$, и степень U не превышает $n - l - d - 1$, то находим, что выражение

$$\frac{2LU}{W_1 [W_0(u - L) + W_1 \sqrt{(u^2 - L^2)(x^2 - h^2)}]}$$

не более высокой степени, чем

$$\frac{x^{n-l-d-1}}{x^{\frac{n-d}{2}-1} x^{\frac{n-d}{2}} x^{n-l}} = \frac{1}{x^n}.$$

Итак, дробь $\frac{W_0}{W_1}$, на основании указанного выше уравнения, представляет

величину $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$ тоже по меньшей мере до членов порядка $\frac{1}{x^n}$. Но так как W_1 , знаменатель дроби $\frac{W_0}{W_1}$, только степени $\frac{n-d}{2} - 1 < \frac{n}{2}$, то это невозможно, если только она не будет одною из подходящих дробей выражения

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}},$$

которые находятся разложением его в непрерывную дробь, так как степень W_1 знаменателя дроби $\frac{W_0}{W_1}$ равна $\frac{n-d}{2} - 1$. Сверх того, дробь $\frac{W_0}{W_1}$, имея знаменателя степени $\frac{n-d}{2} - 1$, не может представлять выражение $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$ точно до членов $\frac{1}{x^n}$, если только следующая непосредственно за ней подходящая дробь того же выражения не имеет знаменателем функцию по меньшей мере степени $\frac{n+d}{2} + 1$.

Откуда видно, с одной стороны, что $\frac{W_0}{W_1}$ в ряду дробей, подходящих к $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$, будет последнею со знаменателем степени ниже $\frac{n}{2}$ и, с другой стороны, что среди этих дробей ни одна не имеет знаменателем функцию степени $\frac{n}{2}$. Первое показывает нам, что функции W_1 и W_0 , а следовательно, и искомая дробь $\frac{U}{V}$, вполне определяются величиной L ; второе послужит для нахождения постоянной L , а по ней легко получим величину дроби $\frac{U}{V}$.

§ 47. Чтобы этого достичь, положим, что

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots$$

будет разложением $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$ в непрерывную дробь и

$$q_{\sigma} + \frac{G_{\sigma}}{x} + \frac{H_{\sigma}}{x^2} + \dots$$

будет величина полного частного, получаемого при остановке на знаменателе q_{σ} . В этом предположении имеем

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} = q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h^2}{q_{\sigma} + \frac{G_{\sigma}}{x} + \frac{H_{\sigma}}{x^2} + \dots}, \quad (22)$$

$$q_{\sigma+1} + \frac{G_{\sigma+1}}{x} + \frac{H_{\sigma+1}}{x^2} + \dots = - \frac{h^2 x}{G_{\sigma} + \frac{H_{\sigma}}{x} + \dots}. \quad (23)$$

Последняя из этих формул показывает нам, что знаменатели

$$q_1, q_2, \dots, q_{\frac{n}{2}}$$

будут функциями первой степени, если количества

$$G_0, G_1, \dots, G_{\frac{n}{2}-1}$$

остаются отличными от нуля.

Но коль скоро $q_1, q_3, \dots, q_{\frac{n}{2}}$ функции первой степени, разложение

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

в непрерывную дробь

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

остановленное на знаменателе $q_{\frac{n}{2}}$, дает, очевидно, подходящую дробь

со знаменателем степени $\frac{n}{2}$. В силу же уравнения (21), где L означает

предел значений $u - \frac{U}{V}$ между $x = -h$ и $x = +h$, этого не должно быть, как мы видели; итак, для этого значения L по меньшей мере одно из уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-1} = 0$$

будет необходимо иметь место.

§ 48. Положим теперь, что из всех возможных значений L , удовлетворяющих этому условию, численно наименьшее будет L_0 . Так как $-L$ и $+L$ определяют пределы, в которых от $x = -h$ до $x = +h$ остается заключенною разность искомой дроби

$$\frac{U}{V} = \frac{p_{d+1}x^{n-l-d-1} + \dots + p_{n-l-1}x + p_{n-l}}{p_{n-l+d+1}x^{l-d} + \dots + p_nx + 1},$$

или, что все равно (§ 41),

$$\frac{U}{V} = \frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+l)}},$$

и многочлена

$$u = x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \dots$$

и так как, по смыслу нашей задачи, требуется сделать эти пределы по возможности близкими к нулю, то ясно, что в ее решении будем иметь

$$L = L_0,$$

если только возможно получить дробь

$$\frac{U}{V} = \frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+l)}},$$

разность которой с u , от $x = -h$ до $x = +h$, остается заключенною между пределами столь близкими, как $-L_0$ и $+L_0$.

Мы покажем теперь, что это возможно и что такая дробь найдется по нашим формулам (20), (21), если взять

$$L = L_0, \quad W_0 = M, \quad W_1 = N,$$

где $\frac{M}{N}$ — подходящая дробь для

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} = q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

которая соответствует знаменателю q_s , причем

$$G_s = 0$$

первое из уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-1} = 0,$$

имеющее место в случае $L = L_0$.

§ 49. Для достижения этого замечаем прежде всего, что для таких величин L_0, W_0, W_1 уравнения (20), (21) становятся $2L_0 V = M^2 - (x^2 - h^2) N^2$, $2L_0 U = (u - L_0) M^2 - (u + L)(x^2 - h^2) N^2$, откуда следует такое выражение для дроби $\frac{U}{V}$:

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0) M^2 - (u + L)(x^2 - h^2) N^2}{M^2 - (x^2 - h^2) N^2}. \quad (24)$$

С другой стороны, так как

$$G_s = 0$$

первое из уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-1} = 0,$$

которое имеет место в случае $L = L_0$, то видно из (22), что при этой величине L функции

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

первой степени, а q_{s+1} более высокой степени, откуда следует, что, останавливая разложение

$$\sqrt{\frac{(u+L_0)(x^2-h^2)}{u-L_0}}$$

в непрерывную дробь

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots$$

на знаменателе q_σ , найдем подходящую дробь, члены которой соответственно степеней $\sigma + 1$, σ и величина которой отличается от

$$\sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$$

только членами степеней низших $\frac{1}{x^{2\sigma+1}}$. Следовательно, так как $\frac{M}{N}$ подходящая дробь для $\sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$, соответствующая знаменателю q_σ , то функции M , N будут соответственно степеней $\sigma + 1$, σ , и разность

$$\frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$$

— функция степени низшей, чем $-(2\sigma + 1)$.

В силу показанного нами о функциях

$$M, N, \frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}},$$

легко видеть, что дробь

$$\frac{U}{V},$$

определенная по формуле (24), приводится к виду

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}.$$

Действительно, ее числитель

$$(u - L_0)M^2 - (u + L_0)(x^2 - h^2)N^2$$

может быть представлен под видом

$$(u - L_0)N^2 \left(\frac{M}{N} + \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}} \right) \left(\frac{M}{N} - \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}} \right),$$

и так как функции

$$u, M, N, \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$$

соответственно степеней

$$n - l, \sigma + 1, \sigma, 1,$$

а степень разности

$$\frac{M}{N} = \sqrt{\frac{(u + L_0)(x^2 - h^2)}{u - L_0}}$$

меньше — $(2\sigma + 1)$, то находим для этого выражения степень низшую, чем $n - l$, и, следовательно, оно будет вида

$$p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-1)}.$$

Переходя к ее знаменателю

$$M^2 = (x^2 - h^2) N^2,$$

заметим, что его можно представить под видом

$$\frac{(u - L_0) M^2 - (u + L_0)(x^2 - h^2) N^2}{u} + L_0 \frac{M^2 + (x^2 - h^2) N^2}{u},$$

и так как функции

$$M, N, u$$

соответственно степеней

$$\sigma + 1, \sigma, n - l,$$

а

$$(u - L_0) M^2 - (u + L_0)(x^2 - h^2) N^2,$$

в силу того, что мы только что видели, степени меньшей, чем $n - l$, то находим, что степень этого выражения равна $2\sigma + 2 - (n - l)$. Но при σ , равном одному из чисел

$$0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

число $2\sigma + 2 - (n - l)$ не может превосходить l . Откуда следует, что функция

$$M^2 = (x^2 - h^2) N^2$$

имеет вид

$$p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}.$$

Так мы приходим к убеждению, что дробь $\frac{U}{V}$, находящаяся по (24), имеет вид

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}.$$

Нам остается показать, что ее разность с u , между $x = -h$ и $x = +h$, заключается в пределах $-L_0$ и $+L_0$. Для этого заметим, что, по (24), имеем

$$\left(u - \frac{U}{V}\right)^2 - L_0^2 = \frac{4L_0^2 M^2 N^2}{[M^2 - N^2(x^2 - h^2)]^2} (x^2 - h^2),$$

и так как M, N — функции вещественные и, следовательно, выражение

$$\frac{4L_0^2 M^2 N^2}{[M^2 - (x^2 - h^2) N^2]^2}$$

не может становиться отрицательным, то это уравнение показывает, что от $x = -h$ до $x = +h$ функция

$$\left(u - \frac{U}{V}\right)^2$$

не превосходит L_0^2 , а это и доказывает, что разность

$$u - \frac{U}{V}$$

от $x = -h$ до $x = +h$ остается заключенною в пределах $-L_0$ и $+L_0$.

§ 50. Таким образом, мы удостоверяемся, что дробь, находящаяся по (24), имеет вид

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}$$

и что ее разность с u , от $x = -h$ до $x = +h$, остается заключенною в пределах $-L_0$ и $+L_0$. Откуда следует, в силу § 48, что

$$L = L_0$$

представляет действительно то значение L , которое отвечает нашей задаче и которое, следовательно, определяет пределы значений $u - \frac{U}{V}$, наиболее близкие к нулю.

Замечая, что $-L_0$ и $+L_0$ суть пределы разности $u - \frac{U}{V}$ между $x = -h$ и $x = +h$, наиболее близкие к нулю, из того, что показано

относительно дроби $\frac{U}{V}$, определенной по (24), мы видим, что она дает решение нашей задачи, состоящей в нахождении дроби $\frac{U}{V}$ вида

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}},$$

которая, от $x = -h$ до $x = +h$, наименее уклоняется от u .

Сверх того, легко убедиться, что это будет единственно возможное решение нашей задачи (кроме случая, когда получается для L_0 два значения противоположных знаков, каждое из которых, по (24), может дать решение); ибо, в силу показанного об уравнении (21), функции W_0 и W_1 и, следовательно, дробь $\frac{U}{V}$ вполне определены величиною L . Таким образом, количество $L = L_0$ и искомая дробь $\frac{U}{V}$ находятся только при помощи разложения выражения

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

в непрерывную дробь

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}},$$

продолженную до знаменателя $q_{\frac{n}{2}}$, что требует очень длинных вычислений. Мы покажем теперь, как можно упростить определение L_0 и $\frac{U}{V}$.

XV

§ 51. Так как функция u степени $n-l$, выражение

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

отличается от

$$\sqrt{x^2-h^2}$$

только членами порядка $\frac{1}{x^{n-l-1}}$ или низших, откуда следует, что через разложение выражений

$$\sqrt{x^2 - h^2}, \quad \sqrt{\frac{(u+L)(x^2 - h^2)}{u-L}}$$

в непрерывную дробь получится одна и та же формула, если не продолжать этого разложения за предел, при котором непрерывные дроби дают их точные величины до членов порядка $\frac{1}{x^{n-l-1}}$.

Поэтому, замечая, что $\sqrt{x^2 - h^2}$ (§ 22) разлагается в непрерывную дробь

$$x - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots,$$

которая не дает величину $\sqrt{x^2 - h^2}$, точную до $\frac{1}{x^{n-l-1}}$, если число ее знаменателей не превосходит

$$\frac{n-l-2}{2} = \frac{n}{2} - \frac{l-2}{2},$$

мы заключаем, что в разложении

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2 - h^2)}{u-L}} = q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots$$

окажется

$$q_0 = x, \quad q_1 = 2x, \quad q_2 = 2x, \quad \dots, \quad q_{\frac{n}{2}-k} = 2x,$$

где k — наибольшее целое, содержащееся в $\frac{l+3}{2}$.

Откуда следует, что $\frac{n}{2} - k + 1$ подходящих дробей $\sqrt{\frac{(u+L)(x^2 - h^2)}{u-L}}$ равны подходящим дробям $\sqrt{x^2 - h^2}$, которые мы обозначили (§ 22) через

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \dots$$

и члены которых, как мы видели, определяются так:

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda}{2}, \\ Q_\lambda &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^\lambda}{2\sqrt{x^2 - h^2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

§ 52. На основании этого легко найти некоторую функцию, которая своим разложением дает часть непрерывной дроби

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}},$$

следующую за знаменателем $q_{\frac{n}{2}-k}$.

В самом деле, так как подходящие дроби

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} = q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}},$$

которые соответствуют знаменателям $q_{\frac{n}{2}-k-1}$, $q_{\frac{n}{2}-k}$, суть

$$\frac{P_{\frac{n}{2}-k}}{Q_{\frac{n}{2}-k}}, \quad \frac{P_{\frac{n}{2}-k+1}}{Q_{\frac{n}{2}-k+1}},$$

то мы находим

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}} &= q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k} - Z}}} \\ &= \frac{P_{\frac{n}{2}-k+1} - ZP_{\frac{n}{2}-k}}{Q_{\frac{n}{2}-k+1} - ZQ_{\frac{n}{2}-k}}, \end{aligned}$$

обозначая через Z величину непрерывной дроби

$$\frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+2}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+3}} - \dots,$$

и поэтому

$$Z = \frac{\sqrt{(u+L)(x^2-h^2)} Q_{\frac{n}{2}-k+1} - \sqrt{u-L} P_{\frac{n}{2}-k+1}}{\sqrt{(u+L)(x^2-h^2)} Q_{\frac{n}{2}-k} - \sqrt{u-L} P_{\frac{n}{2}-k}}.$$

Подставляя сюда величины

$$P_{\frac{n}{2}-k}, P_{\frac{n}{2}-k+1}, Q_{\frac{n}{2}-k}, Q_{\frac{n}{2}-k+1},$$

извлеченные из вышеупомянутых формул (25), имеем

$$\begin{aligned} Z = & \frac{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k+1} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k+1}] \sqrt{u+L} -}{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k} - (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k}] \sqrt{u+L} -} \\ & - \frac{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k+1} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k+1}] \sqrt{u-L}}{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{\frac{n}{2}-k}] \sqrt{u-L}}, \end{aligned}$$

и так как

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2 - h^2})(x - \sqrt{x^2 - h^2}) &= h^2, \\ x - \sqrt{x^2 - h^2} &= \frac{h^2}{x + \sqrt{x^2 - h^2}}, \end{aligned}$$

то это выражение Z сводится к такому:

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}] \sqrt{u+L} -}{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}] \sqrt{u+L} -} \\ & - \frac{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} + h^{n-2k+2}] \sqrt{u-L}}{[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} + h^{n-2k}] \sqrt{u-L}}. \end{aligned}$$

Помножая в последнем выражении Z числитель и знаменатель на

$$\sqrt{u+L} + \sqrt{u-L},$$

мы находим окончательно

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}.$$

Так мы находим функцию Z , которая своим разложением определяет часть непрерывной дроби

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}},$$

следующую за знаменателем $q_{\frac{n}{2}-k}$, и вместе с тем величины

$$G_{\frac{n}{2}-k}, G_{\frac{n}{2}-k+1}, \dots, G_{\frac{n}{2}-1},$$

которые обозначают коэффициенты при $\frac{1}{x}$ в полных частных непрерывной дроби

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}},$$

остановленной на знаменателях

$$q_{\frac{n}{2}-k}, q_{\frac{n}{2}-k+1}, \dots, q_{\frac{n}{2}-1}.$$

Поэтому имеем

$$G_{\frac{n}{2}-k} = g_1, G_{\frac{n}{2}-k+1} = g_2, \dots, G_{\frac{n}{2}-1} = g_k, \quad (26)$$

обозначая через

$$g_1, g_2, \dots, g_k$$

коэффициенты при $\frac{1}{x}$ в k первых полных частных разложения Z в непрерывную дробь

$$\frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1} - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+2} - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+3} - \dots}}}$$

Что касается величин

$$G_0, G_1, \dots, G_{\frac{n}{2}-k-1},$$

то, замечая, что знаменатели

$$q_1, q_2, \dots, q_{\frac{n}{2}-k}$$

в непрерывной дроби

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}},$$

как мы видели (§ 51), равны $2x$, мы находим

$$G_0 = -\frac{h^2}{2}, \quad G_1 = -\frac{h^2}{2}, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-k-1} = -\frac{h^2}{2}. \quad (27)$$

§ 53. На основании показанного нами относительно разложения

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

в непрерывную дробь

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1 - \frac{h^2}{q_2 - \dots}}$$

определение постоянного L_0 и искомой дроби $\frac{U}{V}$ значительно упрощается, как мы сейчас покажем.

По § 48 найдем величину L_0 , отыскивая среди корней уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-1} = 0$$

численно наименьший.

А так как мы нашли (27)

$$G_0 = -\frac{h^2}{2}, \quad G_1 = -\frac{h^2}{2}, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-k-1} = -\frac{h^2}{2},$$

то ясно, что $L = L_0$ может быть только корнем уравнений

$$G_{\frac{n}{2}-k} = 0, \quad G_{\frac{n}{2}-k+1} = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-1} = 0,$$

или, что сводится к тому же на основании (26), таких:

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_k = 0$$

Поэтому при определении L_0 мы приходим к такому окончательному заключению:

Значение L_0 находится как численно наименьший из корней уравнений

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_k = 0,$$

где $g_1, g_2, \dots, g_k$ — коэффициенты $\frac{1}{x}$ в k первых полных частных разложения

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}$$

в непрерывную дробь и k означает наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{l+3}{2}$.

Мы не говорим ничего о виде непрерывной дроби, в которую будем разлагать Z , отыскивая величины $g_1, g_2, \dots, g_k$; ибо ясно, что полные частные, за исключением постоянных множителей, будут те же, разлагаем ли Z в непрерывную дробь вида

$$\frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+2}} - \dots,$$

как мы предполагали до сих пор, или в непрерывную дробь вида

$$\frac{\alpha'}{q'} + \frac{\alpha''}{q''} + \dots,$$

где $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ какие-нибудь постоянные величины.

Заметим, что то же обстоятельство представится еще для членов подходящих дробей, которые мы должны будем рассматривать впоследствии.

§ 54. Переходя к определению искомой дроби $\frac{U}{V}$, положим, что

$$g_i = 0$$

— первое из уравнений

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_k = 0,$$

которое оправдывается, если взять

$$L = L_0.$$

Так как мы нашли (§ 52), что

$$\begin{aligned} G_0 &= -\frac{h^2}{2}, & G_1 &= -\frac{h^2}{2}, & \dots, & & G_{\frac{n}{2}-k-1} &= -\frac{h^2}{2}, \\ G_{\frac{n}{2}-k} &= g_1, & G_{\frac{n}{2}-k+1} &= g_2, & \dots, & & G_{\frac{n}{2}-1} &= g_k, \end{aligned}$$

то, следовательно, в этом предположении уравнение

$$G_{\frac{n}{2}-k+i-1} = 0$$

будет первым среди

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n}{2}-1} = 0,$$

которое имеет место при $L = L_0$.

Откуда мы заключаем, в силу § 48, что искомая дробь будет определена формулой (24), если взять

$$\sigma = \frac{n}{2} - k + i - 1,$$

что нам дает

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0) M^2 - (u + L_0) (x^2 - h^2) N^2}{M^2 - (x^2 - h^2) N^2},$$

где

$$\frac{M}{N} = q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+i-1}}.$$

Но, обозначая через

$$\frac{M_1}{N_1}, \quad \frac{M_2}{N_2}, \quad \frac{M_3}{N_3}, \quad \dots$$

ряд подходящих дробей выражения

$$Z = \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1}} - \frac{h^2}{p_{\frac{n}{2}-k+2}} - \dots,$$

где

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k+1}}, \quad \dots,$$

имеем

$$\frac{M}{N} = q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h^2}{q_{\frac{n}{2}-k}} - \frac{M_i}{N_i},$$

откуда, замечая, что подходящие дроби

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

которые соответствуют знаменателям $q_{\frac{n}{2}-k}$, $q_{\frac{n}{2}-k-1}$, суть

$$\frac{P_{\frac{n}{2}-k+1}}{Q_{\frac{n}{2}-k+1}}, \quad \frac{P_{\frac{n}{2}-k}}{Q_{\frac{n}{2}-k}},$$

мы заключаем, что

$$\frac{M}{N} = \frac{P_{\frac{n}{2}-k+1} N_i - P_{\frac{n}{2}-k} M_i}{Q_{\frac{n}{2}-k+1} N_i - Q_{\frac{n}{2}-k} M_i}$$

и потому предыдущее выражение $\frac{U}{V}$ становится

$$\frac{(u - L_0) (P_{\frac{n}{2}-k+1} N_i - P_{\frac{n}{2}-k} M_i)^2 - (u + L_0) (x^2 - h^2) (Q_{\frac{n}{2}-k+1} N_i - Q_{\frac{n}{2}-k} M_i)^2}{(P_{\frac{n}{2}-k+1} N_i - P_{\frac{n}{2}-k} M_i)^2 - (x^2 - h^2) (Q_{\frac{n}{2}-k+1} N_i - Q_{\frac{n}{2}-k} M_i)^2},$$

где числитель приводится к

$$\begin{aligned} & [(P_{\frac{n}{2}-k+1}^2 - Q_{\frac{n}{2}-k+1}^2 (x^2 - h^2)) u - (P_{\frac{n}{2}-k+1}^2 + Q_{\frac{n}{2}-k+1}^2 (x^2 - h^2)) L_0] N_i^2 - \\ & - 2 [(P_{\frac{n}{2}-k+1} P_{\frac{n}{2}-k} - Q_{\frac{n}{2}-k+1} Q_{\frac{n}{2}-k} (x^2 - h^2)) u - \\ & - (P_{\frac{n}{2}-k+1} P_{\frac{n}{2}-k} + Q_{\frac{n}{2}-k+1} Q_{\frac{n}{2}-k} (x^2 - h^2)) L_0] N_i M_i + \\ & + [(P_{\frac{n}{2}-k}^2 - Q_{\frac{n}{2}-k}^2 (x^2 - h^2)) u - (P_{\frac{n}{2}-k}^2 + Q_{\frac{n}{2}-k}^2 (x^2 - h^2)) L_0] M_i^2, \end{aligned}$$

а знаменатель — к

$$\begin{aligned} & (P_{\frac{n}{2}-k+1}^2 - Q_{\frac{n}{2}-k+1}^2 (x^2 - h^2)) N_i^2 + (P_{\frac{n}{2}-k}^2 - Q_{\frac{n}{2}-k}^2 (x^2 - h^2)) M_i^2 - \\ & - 2 (P_{\frac{n}{2}-k+1} P_{\frac{n}{2}-k} - Q_{\frac{n}{2}-k+1} Q_{\frac{n}{2}-k} (x^2 - h^2)) N_i M_i. \end{aligned}$$

Но так как, по (25), находим

$$\begin{aligned} P_\lambda^2 - Q_\lambda^2 (x^2 - h^2) &= h^{2\lambda}, \\ P_\lambda^2 + Q_\lambda^2 (x^2 - h^2) &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{2\lambda} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{2\lambda}}{2}, \\ P_\lambda P_{\lambda-1} + Q_\lambda Q_{\lambda-1} (x^2 - h^2) &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{2\lambda-1} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{2\lambda-1}}{2}, \\ P_\lambda P_{\lambda-1} - Q_\lambda Q_{\lambda-1} (x^2 - h^2) &= h^{2\lambda-2} x, \end{aligned}$$

то эти величины U и V становятся

$$\begin{aligned} U &= \left[h^{n-2k+2} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2}}{2} \right] N_i^2 - \\ & - 2 \left[h^{n-2k+1} x u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+1} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+1}}{2} \right] N_i M_i + \\ & + \left[h^{n-2k} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k}}{2} \right] M_i^2, \\ V &= h^{n-2k} [h^2 N_i^2 - 2x N_i M_i + M_i^2]. \end{aligned}$$

Итак, мы приходим относительно определения искомой дроби $\frac{U}{V}$ к следующему окончательному заключению:

Если $g_i = 0$ первое из уравнений

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_k = 0,$$

которое оправдывается при $L = L_0$, то члены дроби $\frac{U}{V}$, которая среди всех других вида

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}$$

наименее уклоняется от

$$u = x^{n-l} + Ax^{n-l-1} + Bx^{n-l-2} + \dots$$

между $x = -h$ и $x = +h$, доставляются формулами:

$$\begin{aligned} U = & \left[h^{n-2k+2}u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2}}{2} \right] N_i^2 - \\ & - 2 \left[h^{n-2k+1}xu - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+1} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+1}}{2} \right] N_i M_i + \\ & + \left[h^{n-2k}u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k}}{2} \right] M_i^2, \\ V = & h^{n-2k} [h^2 N_i^2 - 2x N_i M_i + M_i^2], \end{aligned}$$

где M_i , N_i — члены i -й подходящей дроби выражения

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u + \sqrt{u^2 - L^2})},$$

которые находятся его разложением в непрерывную дробь и в числе которых считается $\frac{0}{1}$.

XVI

Число n нечетное

§ 55. Метода, данная нами для определения L_0 и дроби $\frac{U}{V}$ при n четном, может быть легко приложена к случаю, когда n нечетное, как мы сейчас покажем.

Мы видели в § 45, что при нечетном n имеется такая система уравнений

$$\left. \begin{aligned} uV - U + LV &= (x - h) W_0^2, \\ uV - U - LV &= (x + h) W_1^2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

или, что то же,

$$2LV = (x - h) W_0^2 - (x + h) W_1^2, \quad (29)$$

$$2LU = (u - L)(x - h) W_0^2 - (u + L)(x + h) W_1^2. \quad (30)$$

Так как функции u , V соответственно степеней $n - l$, $l - d$ и степень U не превосходит $n - l - d - 1$ (§ 43), то уравнения (28) доказывают, что функции

$$W_0, \quad W_1$$

степени $\frac{n - d - 1}{2}$. Но по уравнению (30) находим

$$\frac{W_0}{W_1} = \sqrt{\frac{(u + L)(x + h)}{(u - L)(x - h)}} = \frac{2LU}{W_1 [W_0(u - L)(x - h) + W_1 \sqrt{(u^2 - L^2)(x^2 - h^2)}]},$$

что нам показывает, что дробь

$$\frac{W_0}{W_1}$$

представляет величину

$$\sqrt{\frac{(u + L)(x + h)}{(u - L)(x - h)}}$$

с точностью до членов порядка

$$\frac{2LU}{W_1 [W_0(u - L)(x - h) + W_1 \sqrt{(u^2 - L^2)(x^2 - h^2)}]},$$

и, следовательно, в силу показанного относительно степеней W_0 , W_1 , U , u , с точностью до $\frac{1}{x^{n+1}}$. Но так как W_1 , знаменатель дроби $\frac{W_0}{W_1}$, только степени $\frac{n - d - 1}{2}$, то это невозможно, если только $\frac{W_0}{W_1}$ не будет одною из дробей, подходящих к

$$\sqrt{\frac{(u + L)(x + h)}{(u - L)(x - h)}},$$

а подходящая дробь, следующая за $\frac{W_0}{W_1}$, не будет иметь знаменателем

функцию степени $\frac{n+d+3}{2}$, откуда видно, что среди подходящих дробей выражения

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$$

ни одна не будет иметь знаменателем функцию степени $\frac{n+1}{2}$.

§ 56. В силу этого, повторяя над разложением

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$$

в непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots$$

то, что мы сделали в § 47, 48, 49 с разложением

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x^2-h^2)}{u-L}}$$

в непрерывную дробь

$$q_0 - \frac{h^2}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

легко узнаем, что величина L должна удовлетворять по меньшей мере одному из уравнений

$$G_0=0, \quad G_1=0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}}=0,$$

где $G_0, G_1, \dots, G_{\frac{n-1}{2}}$ — коэффициенты при $\frac{1}{x}$ в $\frac{n+1}{2}$ первых полных частных для

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots$$

С другой стороны, если уравнение

$$G_\sigma=0$$

первое среди

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

имеющее место при $L = L_0$, и если положим

$$\frac{M}{N} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h^2}{q_s},$$

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0)(x - h)M^2 - (u + L_0)(x + h)N^2}{(x - h)M^2 - (x + h)N^2}, \quad (31)$$

то, поступая с этой величиной $\frac{U}{V}$ так же, как с данной по формуле (24), находим, что она имеет вид

$$\frac{p'x^{n-l-1} + p''x^{n-l-2} + \dots + p^{(n-l-1)}x + p^{(n-l)}}{p^{(n-l+1)}x^l + p^{(n-l+2)}x^{l-1} + \dots + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}$$

и что ее разность с u , от $x = -h$ до $x = +h$, остается заключенною в пределах $-L_0$ и $+L_0$. Поэтому, как в случае четного n (§ 56), заключаем, что искомая величина L будет численно наименьшею из всех тех, которые удовлетворяют по меньшей мере одному из уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

и что если эта величина $L = L_0$, а

$$G_s = 0$$

первое из уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

которому она удовлетворяет, то искомая дробь $\frac{U}{V}$ определяется по формуле (31), где за $\frac{M}{N}$ надо взять ту из подходящих дробей

$$\sqrt{\frac{(u + L_0)(x + h)}{(u - L_0)(x - h)}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

которая соответствует знаменателю q_s .

Так, в случае нечетного n можно определить величину постоянной L_0 и искомой дроби $\frac{U}{V}$.

XVII

§ 57. Постараемся теперь упростить определение L и $\frac{U}{V}$ в случае нечетного n , как мы сделали для случая четного n , и будет видно, что окончательно определение L и $\frac{U}{V}$ в этом случае не отличается от найденного нами для случая четного n .

Так как функция u степени $n-1$, то выражения

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}, \quad \sqrt{\frac{x+h}{x-h}}$$

отличаются друг от друга только членами порядка $\frac{1}{x^{n-1}}$ и менее высших порядков.

Отсюда следует, что для разложений $\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$ и $\sqrt{\frac{x+h}{x-h}}$ найдется одна и та же непрерывная дробь, если не продолжать этих разложений за предел, при котором они выражаются непрерывными дробями с точностью до $\frac{1}{x^{n-1}}$. А так как находим

$$\sqrt{\frac{x+h}{x-h}} = 1 + \frac{2h}{2x-h} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

и эта непрерывная дробь не дает величины $\sqrt{\frac{x+h}{x-h}}$, точной до $\frac{1}{x^{n-1}}$, если сохраняем $\frac{n+1}{2} - k$ из ее знаменателей, где k — целая часть $\frac{l+3}{2}$, то ясно, что в разложении

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots$$

будем иметь

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2x - h, \quad q_2 = 2x, \quad \dots, \quad q_{\frac{n+1}{2}-k} = 2x, \quad (32)$$

откуда мы заключаем, что подходящие дроби

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

которые соответствуют знаменателям

$$q_{\frac{n+1}{2}-k}, \quad q_{\frac{n-1}{2}-k-1},$$

будут

$$\frac{P\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}{Q\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}, \quad \frac{P\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}{Q\left(\frac{n-1}{2}-k\right)},$$

если обозначить через $\frac{P^{(0)}}{Q^{(0)}}, \frac{P^{(1)}}{Q^{(1)}}, \frac{P^{(2)}}{Q^{(2)}}, \dots$ ряд подходящих дробей

$$\sqrt{\frac{x+h}{x-h}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q^2} - \dots,$$

для определения которых легко находим такие формулы*:

$$\begin{aligned} P^{(\lambda)} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1} + \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x-h}{2}}}, \\ Q^{(\lambda)} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1} - \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}}\right)^{2\lambda+1}}{2\sqrt{\frac{x+h}{2}}}. \end{aligned} \quad (33)$$

* Легко проверить эти выражения для $P^{(\lambda)}, Q^{(\lambda)}$, замечая, что они дают точные величины в случае $\lambda=0$ и $\lambda=1$ и что они удовлетворяют уравнениям $P^{(\lambda)} = 2xP^{(\lambda-1)} - h^2P^{(\lambda-2)}$, $Q^{(\lambda)} = 2xQ^{(\lambda-1)} - h^2Q^{(\lambda-2)}$, согласно виду непрерывной дроби

$$1 + \frac{2x}{2x-h} - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^2}{2x} - \dots$$

§ 58. Из показанного нами о подходящих дробях

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}},$$

которые соответствуют знаменателям

$$q_{\frac{n+1}{2}-k}, \quad q_{\frac{n-1}{2}-k-1},$$

полагая

$$Z = \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+1}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+2}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+3}} - \dots,$$

мы находим такое выражение для $\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} &= q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h}{q_{\frac{n+1}{2}-k}} - Z \\ &= \frac{P\left(\frac{n+1}{2}-k\right) - ZP\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}{Q\left(\frac{n+1}{2}-k\right) - ZQ\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}, \end{aligned}$$

откуда следует такая величина Z :

$$Z = \frac{Q\left(\frac{n+1}{2}-k\right) \sqrt{(u+L)(x+h)} - P\left(\frac{n+1}{2}-k\right) \sqrt{(u-L)(x-h)}}{Q\left(\frac{n-1}{2}-k\right) \sqrt{(u+L)(x+h)} - P\left(\frac{n-1}{2}-k\right) \sqrt{(u-L)(x-h)}},$$

которая после подстановок величин

$$P\left(\frac{n+1}{2}-k\right), \quad P\left(\frac{n-1}{2}-k\right), \quad Q\left(\frac{n+1}{2}-k\right), \quad Q\left(\frac{n-1}{2}-k\right)$$

из формул (33) становится

$$\frac{\sqrt{u+L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k+2} - \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k+2} \right] - \sqrt{u+L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k} - \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k} \right] - \sqrt{u-L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k+2} + \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k+2} \right] - \sqrt{u-L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k} + \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{n-2k} \right]}{1}.$$

Замечая, что n — число нечетное и что

$$\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^\lambda \left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} - \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^\lambda = (-h)^\lambda,$$

легко узнаем, что эта величина Z может быть представлена так:

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \times \frac{\sqrt{u+L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{2n-4k+4} + h^{n-2k+2} \right] - \sqrt{u-L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{2n-4k+4} - h^{n-2k+2} \right]}{\sqrt{u+L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{2n-4k} + h^{n-2k} \right] - \sqrt{u-L} \left[\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^{2n-4k} - h^{n-2k} \right]},$$

а так как

$$\left(\sqrt{\frac{x-h}{2}} + \sqrt{\frac{x+h}{2}} \right)^2 = x + \sqrt{x^2 - h^2},$$

то это выражение Z сводится к

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} + h^{n-2k+2} (u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} + h^{n-2k} (u + \sqrt{u^2 - L^2})},$$

что совпадает, кроме знака при L , с выражением Z в случае четного n (§ 53).

§ 59. Обозначая через

$$g_1, g_2, g_3, \dots$$

коэффициенты $\frac{1}{x}$ в полных частных

$$Z = \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+1}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+2}} - \dots,$$

находим

$$G_{\frac{n+1}{2}-k} = g_1, \quad G_{\frac{n+1}{2}-k+1} = g_2, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = g_k,$$

где

$$G_{\frac{n+1}{2}-k}, \quad G_{\frac{n+1}{2}-k+1}, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}},$$

согласно обозначению, принятому в § 56, означают коэффициенты $\frac{1}{x}$ в полных частных

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

когда останавливаемся на знаменател x $q_{\frac{n+1}{2}-k}, q_{\frac{n+1}{2}-k+1}, \dots, q_{\frac{n+1}{2}}$

Сверх того, в силу выше найденных (§ 57) величин $q_0, q_1, \dots, q_{\frac{n+1}{2}-k}$, легко убедиться, что $G_0, G_1, \dots, G_{\frac{n-1}{2}-k}$, коэффици-

енты $\frac{1}{x}$ в $\frac{n+1}{2} - k$ первых полных частных

$$\sqrt{\frac{(u+L)(x+h)}{(u-L)(x-h)}} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

имеют значения

$$G_0 = h, \quad G_1 = -\frac{h^2}{2}, \quad G_2 = -\frac{h^2}{2}, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}-k} = -\frac{h^2}{2}.$$

Из этого ясно, что среди уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

которые, по § 56, определяют $L = L_0$, первые $\frac{n+1}{2} - k$ не могут быть выполнены, а последние сводятся к

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_k = 0,$$

как и в случае четного n ; только L , в силу того, что мы видели относительно Z , будет заменено на $-L$.

§ 60. Переходя к определению искомой дроби $\frac{U}{V}$, положим, что

$$g_i = 0$$

будет первое из уравнений

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_k = 0,$$

которое оправдывается при $L = L_0$. Количества

$$G_0, \quad G_1, \quad G_2, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}-k},$$

в силу того, что мы видели, не могут обращаться в нуль, и так как

$$G_{\frac{n+1}{2}-k} = g_1, \quad G_{\frac{n+1}{2}-k+1} = g_2, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = g_k,$$

то при этом предположении уравнение

$$G_{\frac{n+1}{2}-k+i-1} = 0$$

будет первым из уравнений

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad \dots, \quad G_{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

удовлетворяющимся при $L = L_0$.

Но в этом случае, принимая

$$\sigma = \frac{n+1}{2} - k + i - 1 = \frac{n-1}{2} - k + i,$$

мы находим, по (31), что искомая дробь $\frac{U}{V}$ определяется так:

$$\frac{U}{V} = \frac{(u - L_0)(x - h)M^2 - (u + L_0)(x + h)N^2}{(x - h)M^2 - (x + h)N^2},$$

$$\frac{M}{N} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h^2}{q_{\frac{n-1}{2}-k+i}}.$$

С другой стороны, так как подходящие дроби

$$q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots,$$

которые соответствуют знаменателям

$$q_{\frac{n+1}{2}-k}, \quad q_{\frac{n+1}{2}-k-1},$$

суть

$$\frac{P\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}{Q\left(\frac{n+1}{2}-k\right)}, \quad \frac{P\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}{Q\left(\frac{n-1}{2}-k\right)}$$

и так как предыдущая величина $\frac{M}{N}$ может быть представлена в виде

$$\frac{M}{N} = q_0 + \frac{2h}{q_1} - \frac{h^2}{q_2} - \dots - \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k}} - \frac{M_i}{N_i},$$

если через $\frac{M_i}{N_i}$ обозначать i -ю подходящую дробь для

$$Z = \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+1}} - \frac{h^2}{q_{\frac{n+1}{2}-k+2}} - \dots,$$

то мы заключаем, что

$$M = P\left(\frac{n+1}{2} - k\right) N_i - P\left(\frac{n-1}{2} - k\right) M_i,$$

$$N = Q\left(\frac{n+1}{2} - k\right) N_i - Q\left(\frac{n-1}{2} - k\right) M_i.$$

Но в силу этих величин M и N , предыдущее выражение $\frac{U}{V}$ становится

$$\frac{(u-L_0)(x-h)[P\left(\frac{n+1}{2} - k\right) N_i - P\left(\frac{n-1}{2} - k\right) M_i]^2 - (u+L_0)(x+h)[Q\left(\frac{n+1}{2} - k\right) N_i - Q\left(\frac{n-1}{2} - k\right) M_i]^2}{(x-h)[P\left(\frac{n+1}{2} - k\right) N_i - P\left(\frac{n-1}{2} - k\right) M_i]^2 - (x+h)[Q\left(\frac{n+1}{2} - k\right) N_i - Q\left(\frac{n-1}{2} - k\right) M_i]^2},$$

откуда после подстановки значений

$$P\left(\frac{n+1}{2} - k\right), \quad P\left(\frac{n-1}{2} - k\right), \quad Q\left(\frac{n+1}{2} - k\right), \quad Q\left(\frac{n-1}{2} - k\right)$$

из (33) получаются те же выражения U и V , как и в случае четного n (§ 54), в которых только, согласно тому, что мы видели (§ 59) относительно уравнений, определяющих $L = L_0$, количество L_0 заменяется на $-L_0$.

Таким образом убеждаемся, что окончательные результаты, полученные в отделе XV относительно определения количества L_0 и дроби $\frac{U}{V}$ для случая *четного* n , приложимы и к случаю *нечетного* n .

XVIII

§ 61. Чтобы показать приложение изложенного нами, положим, что требуется найти дробь вида

$$\frac{p'x^{n-2} + p''x^{n-3} + \dots + p^{(n-2)}x + p^{(n-1)}}{p^{(n)}x + p^{(n+1)}},$$

которая от $x = -h$ до $x = +h$ уклоняется возможно менее от данного многочлена

$$x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots$$

Так как в этом случае

$$l=1,$$

то находим, что k , которое означает целую часть $\frac{l+3}{2}$, равняется 2.

Для этого значения k , принимая

$$u = x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots,$$

мы находим через разложение в ряды

$$\begin{aligned} u + \sqrt{u^2 - L^2} &= 2x^{n-1} + 2Ax^{n-2} + 2Bx^{n-3} + \dots, \\ (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} &= (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2} = 2^{n-2} \left(x^{n-2} - \frac{n-2}{4} h^2 x^{n-4} + \dots \right), \\ (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} &= (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4} = 2^{n-4} \left(x^{n-4} - \frac{n-4}{4} h^2 x^{n-6} + \dots \right). \end{aligned}$$

Внося эти величины

$$u + \sqrt{u^2 - L^2}, \quad (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2}, \quad (x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k}$$

в формулу

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k+2} - h^{n-2k+2}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}{L(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2k} - h^{n-2k}(u + \sqrt{u^2 - L^2})}$$

и полагая

$$k=2,$$

имеем

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{2^{n-2} L \left[x^{n-2} - \frac{n-2}{4} h^2 x^{n-4} + \dots \right] - h^{n-2} [2x^{n-1} + 2Ax^{n-2} + \dots]}{2^{n-4} L \left[x^{n-4} - \frac{n-4}{4} h^2 x^{n-6} + \dots \right] - h^{n-4} [2x^{n-1} + 2Ax^{n-2} + \dots]} = \\ &= \frac{h^2 x^{n-1} + \left[h^2 A - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L \right] x^{n-2} + h^2 B x^{n-3} + \dots}{2x^n + 2Ax^{n-1} - \frac{h^2}{2} x^{n-2} + 2Bx^{n-3} + \dots}. \end{aligned}$$

Это выражение Z , разложенное в непрерывную дробь, дает

$$Z = \frac{h^2}{2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} \right)^{2n-4} L^2 - A \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2}}{x} + \dots,$$

откуда следуют такие подходящие дроби для Z :

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2}{2x + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L};$$

отыскивая же величины $g_1, g_2, \dots$, которые означают по нашим обозначениям коэффициенты $\frac{1}{x}$ в полных частных Z , мы находим

$$g_1 = \frac{h^2}{2}, \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2}.$$

Переходя к определению $L = L_0$, замечаем, по § 53, что в рассматриваемом случае число k равно 2, и потому величина $L = L_0$ должна удовлетворять по меньшей мере одному из следующих уравнений:

$$g_1 = \frac{h^2}{2} = 0, \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2} = 0.$$

Первое из этих уравнений невозможно; остается только отыскать решения последнего. А решая уравнение

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{h}\right)^{2n-4} L^2 - A \left(\frac{2}{h}\right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2} = 0,$$

находим два значения для L :

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} (A + \sqrt{A^2 + h^2}),$$

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} (A - \sqrt{A^2 + h^2}).$$

Из этих величин L численно наименьшею будет та, у которой знак при радикале $\sqrt{A^2 + h^2}$ противоположен знаку A . Итак, в силу показанного нами в § 53 относительно определения $L = L_0$, будем иметь

$$L_0 = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} (A \pm \sqrt{A^2 + h^2}),$$

предполагая, что радикал взят со знаком, противоположным знаку A .

Так как эта величина L_0 удовлетворяет только второму из двух уравнений

$$g_1 = \frac{h^2}{2} = 0, \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} \right)^{2n-4} L^2 - A \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L - \frac{h^2}{2} = 0,$$

то надо взять

$$i = 2,$$

и так как

$$\frac{M_2}{N_2},$$

вторая подходящая дробь Z , равна

$$\frac{h^2}{2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L},$$

то заключаем, что

$$M_i = h^2, \quad N_i = 2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L,$$

откуда, в силу показанного нами в § 54 об определении $\frac{U}{V}$, замечая, что $h = 2$, мы приходим к таким величинам U и V :

$$\begin{aligned} U = & \left[h^{n-2} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2}}{2} \right] \left[2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L_0 \right]^2 - \\ & - 2 \left[h^{n-4} x u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-3} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-3}}{2} \right] \left[2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L_0 \right] h^2 + \\ & + \left[h^{n-4} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4}}{2} \right] h^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & h^{n-4} \left[h^2 \left(2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L_0 \right)^2 - 2h^2 x \left(2x + \left(\frac{2}{h} \right)^{n-2} L_0 \right) + h^4 \right] = \\ & = 2^{2n-1} L_0 x + h^n + \frac{2^{2n-4} L_0^2}{h^{n-4}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u = & x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots, \\ L_0 = & \left(\frac{h}{2} \right)^{n-2} (A \pm \sqrt{A^2 + h^2}). \end{aligned}$$

Таковы члены дроби

$$\frac{U}{V} = \frac{p'x^{n-2} + p''x^{n-3} + \dots + p^{(n-2)}x + p^{(n-1)}}{p^{(n)}x + p^{(n+1)}},$$

которая среди всех других того же вида, от $x = -h$ до $x = +h$, уклоняется наименее от $u = x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots$

§ 62. Величина L_0 показывает, что для дроби $\frac{U}{V}$, так определенной, пределы значений разности

$$u - \frac{U}{V},$$

от $x = -h$ до $x = +h$, суть

$$-\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} (A \pm \sqrt{A^2 - h^2}), \quad +\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} (A \pm \sqrt{A^2 + h^2}),$$

причем радикал $\sqrt{A^2 + h^2}$ надо брать со знаком, противоположным знаку A .

Так как для всех дробей $\frac{U}{V}$ вида

$$\frac{p'x^{n-2} + p''x^{n-3} + \dots + p^{(n-2)}x + p^{(n-1)}}{p^{(n)}x + p^{(n+1)}}$$

эти пределы обширнее и так как разность

$$u - \frac{U}{V} = x^{n-1} + Ax^{n-2} + \dots - \frac{p'x^{n-2} + p''x^{n-3} + \dots + p^{(n-2)}x + p^{(n-1)}}{p^{(n)}x + p^{(n+1)}},$$

где $p', p'', \dots, p^{(n-2)}, p^{(n-1)}, p^{(n)}, p^{(n+1)}$ — количества произвольные, может представлять все функции вида

$$x^{n-1} + Ax^{n-2} + A'x^{n-3} + \dots + A^{(n-2)} + \frac{A^{(n-1)}}{x-a},$$

то отсюда вытекает следующая теорема:

Теорема 20. Функция

$$x^{n-1} + Ax^{n-2} + A'x^{n-3} + \dots + A^{(n-2)} + \frac{A^{(n-1)}}{x-a}$$

от $x = -h$ до $x = +h$ не может оставаться численно ниже

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{n-2} (A \pm \sqrt{A^2 + h^2}),$$

где радикал взят со знаком, противоположным знаку A .

§ 63. Отыскивая тем же способом дробь

$$\frac{p'x^{n-3} + p''x^{n-4} + \dots + p^{(n-3)}x + p^{(n-2)}}{p^{(n-1)}x^2 + p^{(n)}x + p^{(n+1)}},$$

которая среди всех других того же вида уклоняется наименее от

$$u = x^{n-2} + Bx^{n-4} + Cx^{n-5} + \dots$$

между $x = -h$ и $x = +h$, возьмем $l = 2$, и так как для этого значения l количество $\frac{l+3}{2}$ равно $\frac{5}{2}$, то положим $k = 2$.

Принимая же

$$u = x^{n-2} + Bx^{n-4} + Cx^{n-5} + \dots, \\ k = 2$$

в выражении Z (§ 53), находим

$$Z = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} \frac{2^{n-2} L \left(x^{n-2} - \frac{n-2}{4} h^2 x^{n-4} + \dots \right) - 2h^{n-2}(x^{n-2} + Bx^{n-4} + \dots)}{2^{n-4} L \left(x^{n-4} - \frac{n-4}{4} h^2 x^{n-6} + \dots \right) - 2h^{n-4}(x^{n-2} + Bx^{n-4} + \dots)} = \\ = \frac{\left[h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L \right] x^{n-2} + h^2 \left[B + \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L \right] x^{n-4} + \dots}{2x^{n-1} + \left[2B - \frac{h^2}{2} - \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L \right] x^{n-3} + \dots}.$$

Это выражение Z , развернутое в непрерывную дробь, дает нам

$$Z = \frac{1}{\frac{2x}{h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L} + \frac{2 \left(\frac{2}{h} \right)^{2n-8} L^2 - (4B + (n-2)h^2) \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L \right)^2 x} + \dots,$$

откуда вытекает такой ряд подходящих дробей Z :

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{2x}, \quad \dots$$

и такие величины $g_1, g_2, \dots$

$$g_1 = h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L,$$

$$g_2 = \frac{2 \left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - (4B + (n-2)h^2) \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2},$$

.

которые означают у нас коэффициенты $\frac{1}{x}$ в полных частных.

Так как $k=2$, то надо искать величину $L=L_0$ среди корней двух уравнений

$$g_1 = h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_2 = \frac{2 \left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - (4B + (n-2)h^2) \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2} = 0.$$

Первое из этих двух уравнений дает

$$L = 2 \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2},$$

второе —

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4} \left[B + \frac{n-2}{4} h^2 + \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4} h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}} \right],$$

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4} \left[B + \frac{n-2}{4} h^2 - \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4} h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}} \right].$$

В частном случае, когда $B = -\frac{n-2}{4} h^2$, эти три величины, если не обращать внимания на знак, равны. Но, исключая этот случай, мы

находим, что численно наименьшею будет та из них, которую получаем по формуле

$$L = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4} \left[B + \frac{n-2}{4} h^2 \pm \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4} h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}} \right],$$

принимая радикал со знаком, противоположным знаку $B + \frac{n-2}{4} h^2$, откуда, согласно § 53, мы заключаем

$$L_0 = \left(\frac{h}{2}\right)^{n-4} \left[B + \frac{n-2}{4} h^2 \pm \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4} h^2\right)^2 + \frac{h^4}{4}} \right].$$

Эта величина L_0 , кроме случая $B = -\frac{n-2}{4} h^2$, удовлетворяет только второму из уравнений

$$g_1 = h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_2 = \frac{2 \left(\frac{2}{h}\right)^{2n-8} L^2 - (4B + (n-2)h^2) \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L - \frac{h^4}{2}}{\left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L\right)^2} = 0.$$

Следовательно, надо взять

$$i = 2, \quad \frac{M_i}{N_i} = \frac{M_2}{N_2},$$

и так как мы нашли

$$\frac{M_2}{N_2} = \frac{h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L}{2x},$$

то будем иметь

$$M_i = h^2 - 2 \left(\frac{2}{h}\right)^{n-4} L,$$

$$N_i = 2x.$$

При этих величинах M_i , N_i , ввиду того, что $k = 2$, найденные нами

в § 54 выражения U и V дают

$$\begin{aligned}
 U &= \left[h^{n-2} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2}}{2} \right] 4x^2 - \\
 &- 2 \left[h^{n-4} x u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-3} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-3}}{2} \right] 2x \left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L_0 \right) + \\
 &+ \left[h^{n-4} u - L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-4}}{2} \right] \left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L_0 \right)^2, \\
 V &= h^{n-4} \left[4h^2 x^2 - 4 \left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L_0 \right) x^2 + \left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L_0 \right)^2 \right] = \\
 &= h^{n-4} \left[8 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L_0 x^2 + \left(h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L_0 \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Таковы члены дроби $\frac{U}{V}$, которая среди всех дробей вида

$$\frac{p' x^{n-3} + p'' x^{n-4} + \dots + p^{(n-3)} x + p^{(n-2)}}{p^{(n-1)} x^2 + p^{(n)} x + p^{(n+1)}},$$

от $x = -h$ до $x = +h$, наименее уклоняется от

$$u = x^{n-2} + Bx^{n-4} + Cx^{n-5} + \dots$$

Исследуем теперь случай

$$B = -\frac{n-2}{4} h^2,$$

который мы оставили в стороне. По найденным выше величинам g_1 , g_2 , в случае $B = -\frac{n-2}{4} h^2$, имеем

$$\begin{aligned}
 g_1 &= h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L, \\
 g_2 &= -\frac{1}{2} \frac{h^2 + 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L}{h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L}.
 \end{aligned}$$

Так как корни уравнений

$$\begin{aligned}
 g_1 &= h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L = 0, \\
 g_2 &= -\frac{1}{2} \frac{h^2 + 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L}{h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L} = 0,
 \end{aligned}$$

т. е.

$$L = 2 \left(\frac{h}{2} \right)^{n-2},$$

$$L = -2 \left(\frac{h}{2} \right)^{n-2},$$

численно равны между собой, то мы находим два значения для L_0 :

$$L_0 = -2 \left(\frac{h}{2} \right)^{n-2},$$

$$L_0 = 2 \left(\frac{h}{2} \right)^{n-2}.$$

Взяв первое значение L_0 , мы замечаем, что оно удовлетворяет только второму из уравнений

$$g_1 = h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L = 0,$$

$$g_1 = -\frac{1}{2} \frac{h^2 + 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L}{h^2 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{n-4} L} = 0.$$

Итак, будем иметь

$$i = 2, \quad \frac{M_i}{N_i} = \frac{M_2}{N_2},$$

и потому найдем для U и V те же выражения, как и в общем случае где имеем также $i = 2$.

Переходя к другой величине $L = L_0$, мы замечаем, что она удовлетворяет первому из уравнений

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0,$$

откуда следует

$$i = 1, \quad \frac{M_i}{N_i} = \frac{M_1}{N_1},$$

и так как

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{0}{1},$$

то находим

$$M_i = 0, \quad N_i = 1.$$

При этих величинах M_i , N_i , замечая, что мы находим, по выражениям U и V , данным в § 54,

$$U = h^{n-2}u = L_0 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2} + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-2}}{2},$$

$$V = h^{n-2},$$

вытекает та же величина $\frac{U}{V}$, как и найденная по формулам общего случая при $L_0 = -2 \left(\frac{h}{2}\right)^{n-2}$.

§ 64. В силу того, что мы видели относительно L_0 , которое определяет пределы величин разности

$$u - \frac{U}{V}$$

между $x = -h$ и $x = +h$, замечая, что

$$u - \frac{U}{V} = x^{n-2} + Bx^{n-4} + Cx^{n-5} + \dots - \frac{p'x^{n-3} + p''x^{n-4} + \dots + p^{(n-3)}x + p^{(n-2)}}{p^{(n-1)}x^2 + p^{(n)}x + p^{(n+1)}}$$

может представлять все функции вида

$$x^{n-2} + Bx^{n-4} + B'x^{n-5} + \dots + B^{(n-4)} + \frac{B^{(n-3)}}{x - \alpha} + \frac{B^{(n-2)}}{x - \beta},$$

мы приходим к следующей теореме:

Теорема 21. Функция

$$x^{n-2} + Bx^{n-4} + B'x^{n-5} + \dots + B^{(n-4)} + \frac{B^{(n-3)}}{x - \alpha} + \frac{B^{(n-2)}}{x - \beta},$$

от $x = -h$ до $x = +h$, не может оставаться численно ниже

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{n-4} \left[B + \frac{n-2}{4} h^2 \pm \sqrt{\left(B + \frac{n-2}{4} h^2 \right)^2 + \frac{h^4}{4}} \right],$$

где радикал взят со знаком, противоположным знаку количества $B + \frac{n-2}{4} h^2$.

О ФУНКЦИЯХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ

§ 1. В записке, под заглавием „О функциях, подобных функциям Лежандра“*, я показал, каким образом прием, употребленный Лежандром** для доказательства основного свойства функций, известных ныне под его именем, может быть распространен на функции более сложные, получаемые разложением выражения

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^\lambda (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^\mu}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}$$

в ряд

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots,$$

функции, бывшие предметом исследований Якоби в мемуаре его*** под заглавием „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe“, где такое свойство функций

$$T_0, T_1, T_2, \dots$$

выведено им на основании дифференциального уравнения, которому удовлетворяют гипергеометрические ряды.

Здесь я покажу одно из приложений этих функций, откуда еще лучше можно видеть сродство их с функциями Лежандра.

Приложение это заключается в определении полиномов вида

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

* Полн. собр. соч., М. — Л., АН СССР, 1945, т. III, стр. 5—12. — *Ред.*

** Exercices du calcul intégral, II, стр. 250.

*** Jacobi. Mathematische Werke, Bd. III.

которые, не переставая возрастать или убывать в данных пределах, наименее удаляются от нуля.

Такие полиномы, как мы увидим, выражаются с помощью функций Лежандра только в том случае, когда n , степень полинома, число нечетное, и он представляет функцию возрастающую. Во всех же других случаях для определения таких полиномов необходимы другие функции, получаемые разложением выражения

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^\lambda (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^\mu}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}$$

при λ и μ , не равных нулю. Что касается полиномов, которые таким образом определяются, то они могут иметь полезные применения и для чистой математики и для практической механики, как это видно из сообщения, сделанного нами 22 августа 1871 г. в Киеве, на третьем Съезде естествоиспытателей, и из статьи нашей „О центробежном уравниателе“, напечатанной при Отчете Императорского Московского технического училища за 1871 год*.

§ 2. Для упрощения формул мы будем предполагать, что пределы, между которыми заключаются рассматриваемые величины переменной x , приведены к -1 и $+1$ (что всегда легко сделать).

Изображая искомый полином вида

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

через

$$F(x),$$

мы замечаем, что, по требованию рассматриваемого нами вопроса, функция $F(x)$ должна от $x = -1$ до $x = +1$ или постоянно возрастать, или постоянно убывать, а потому в этих пределах первая производная

$$F'(x)$$

должна сохранять один и тот же знак, и, следовательно, значения

* См. стр. 689—709.— *Ред.*

начальной функции

$$F(-1), \quad F(+1),$$

соответствующие величинам

$$x = -1, \quad x = +1,$$

будут представлять пределы, между которыми меняется функция $F(x)$ при переходе x от $x = -1$ до $x = +1$. Чтобы полином $F(x)$ при переходе от $F(-1)$ до $F(+1)$ наименее удалялся от нуля, наибольшее по числовой величине из количеств

$$F(-1), \quad F(+1)$$

должно быть по возможности мало и, следовательно, не должно допускать уменьшения при таком изменении полинома $F(x)$, от которого не нарушаются требования вопроса относительно вида полинома

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

и знака производной его $F'(x)$ между $x = -1$ и $x = +1$.

Но нетрудно убедиться, что это может иметь место только в том случае, когда удовлетворяется такое равенство:

$$F(+1) = -F(-1).$$

В самом деле, если такое равенство не удовлетворяется, то, вычитая из функции

$$F(x)$$

постоянную величину

$$\frac{F(+1) + F(-1)}{2}$$

(причем, очевидно, не меняются ни вид полинома $F(x)$, ни величина его производной $F'(x)$), мы вместо прежних предельных величин

$$F(-1), \quad F(+1)$$

получаем такие предельные величины:

$$F(-1) - \frac{F(+1) + F(-1)}{2} = \frac{F(-1) - F(+1)}{2},$$

$$F(+1) - \frac{F(+1) + F(-1)}{2} = \frac{F(+1) - F(-1)}{2}.$$

Сличая же квадраты этих величин со среднею арифметическою квадратов

$$F(-1), \quad F(+1),$$

мы находим, что

$$\left(\frac{F(+1) - F(-1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{F(-1) - F(+1)}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{F^2(+1) + F^2(-1)}{2} - \left(\frac{F(+1) + F(-1)}{2} \right)^2,$$

откуда видно, что квадрат новых пределов

$$\frac{F(+1) - F(-1)}{2}, \quad \frac{F(-1) - F(+1)}{2}$$

будет меньше наибольшего из квадратов

$$F^2(-1), \quad F^2(+1)$$

и, следовательно, новые пределы по числовой величине будут меньше наибольшего из прежних пределов. На основании этого мы заключаем, что в рассматриваемом нами вопросе все искомые полиномы должны удовлетворять такому равенству:

$$F(+1) = -F(-1).$$

Имея же такое уравнение, мы можем определить величину рассматриваемых нами полиномов по величине их производной. В самом деле, представляя искомый полином $F(x)$ под видом интеграла

$$F(x) = \int_{-1}^x F'(x) dx + C$$

и внося эту величину $F(x)$ в вышенайденное равенство, мы получаем

такое уравнение для определения постоянного количества C :

$$\int_{-1}^{+1} F'(x) dx + C = -C,$$

откуда имеем

$$C = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F'(x) dx,$$

вследствие чего предыдущее выражение искомого полинома приводится к такой формуле:

$$F(x) = \int_{-1}^x F'(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F'(x) dx. \quad (1)$$

Определяя по этой формуле предельные величины полинома $F(x)$, соответствующие $x = \pm 1$, мы находим, что они равняются интегралу

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F'(x) dx$$

со знаком $+$ или со знаком $-$, откуда [видно, что предел уклонений рассматриваемых нами полиномов будет равняться числовой величине интеграла

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F'(x) dx.$$

§ 3. Приступая к определению выражения первой производной

$$F'(x),$$

мы замечаем, что, по свойству рассматриваемых полиномов, эта производная не должна менять своего знака между $x = -1$ и $x = +1$, а потому все корни уравнения

$$F'(x) = 0,$$

закрывающиеся внутри пределов

$$x = -1, \quad x = +1,$$

должны быть кратными и притом степени кратности должны представлять числа *четные*. Называя же через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ все корни уравнения

$$F'(x) = 0,$$

которые больше -1 и меньше $+1$, через

$$2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_m$$

степени кратности этих корней и полагая, что уравнение

$$F'(x) = 0$$

имеет λ корней, равных $+1$, и λ_0 корней, равных -1 , мы теперь докажем, что сумма

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + 2\lambda_m,$$

представляющая число корней уравнения

$$F'(x) = 0,$$

не выходящих за пределы

$$x = -1, \quad x = +1,$$

должна быть не меньше $n - 1$, степени этого уравнения.

Чтобы показать это, мы допустим противное, т. е.

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + 2\lambda_m < n - 1, \quad (2)$$

и покажем, что в этом предположении можно всегда найти для полинома $F(x)$ такое изменение, при котором вид его и знак производной $F'(x)$ между $x = -1$ и $x = +1$ остаются без перемены, числовая же величина интеграла

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F'(x) dx,$$

определяющего наибольшее уклонение искомого полинома от нуля, делается меньше. Для этого мы замечаем, что по выше сказанному уравнения

$$F'(x) = 0,$$

$$(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m} = 0$$

от $x = -1$ до $x = +1$ будут иметь корнями одни и те же величины и в одинаковых степенях кратности, а потому отношение

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

между $x = -1$, $x = +1$ не будет менять знака и будет заключаться между двумя величинами, отличными от нуля. Полагая, что из таких пределов отношения

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

наименьший по числовой величине есть L_0 , мы замечаем, что разность

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}} - L_0$$

между $x = -1$ и $x = +1$ будет иметь одинаковый знак с дробью

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

и по числовой величине будет меньше ее, и, следовательно, то же будет иметь место относительно выражений

$$F'(x) - L_0 (x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

$$F'(x),$$

получаемых из предыдущих через умножение их на

$$(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}.$$

Отсюда видно, с одной стороны, что мы не нарушим требования нашего вопроса относительно знака первой производной $F'(x)$ в пределах

$x = -1$, $x = +1$, если вычтем из нее выражение

$$L_0 (x - 1)^\lambda (x + 1)^{\lambda_0} (x - \alpha_1)^{2\lambda_1} (x - \alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x - \alpha_m)^{2\lambda_m},$$

а с другой, что при этом уменьшается числовая величина интеграла

$$\int_{-1}^{+1} F'(x) dx,$$

определяющего предел уклонения рассматриваемого полинома от нуля. Что же касается вида полинома

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

то после такого изменения $F'(x)$, очевидно, он будет представляться той же формулой, так как по неравенству (2) выражение

$$L_0 (x - 1)^\lambda (x + 1)^{\lambda_0} (x - \alpha_1)^{2\lambda_1} (x - \alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x - \alpha_m)^{2\lambda_m}$$

не будет заключать в себе степеней x выше $n - 2$.

Так мы убеждаемся, что при неравенстве (2) можно сделать полином $F(x)$ ближе подходящим к нулю, сохраняя для него, согласно требованию вопроса, вид

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

и не изменяя знака его производной между $x = -1$, $x = +1$, и, следовательно, что такое неравенство не должно иметь места относительно искомого полинома, который при выполнении вышепоименованных требований должен наименее удаляться от нуля в пределах $x = -1$, $x = +1$.

Замечая же, с другой стороны, что это неравенство, где первая часть представляет число корней уравнения

$$F'(x) = 0,$$

закрывающихся в пределах $x = -1$, $x = +1$, а вторая — степень этого уравнения, не может также иметь места и со знаком обратным, мы по вышедшему заключаем о равенстве

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + 2\lambda_m = n - 1,$$

откуда видно, что все $n-1$ корней уравнения

$$F'(x) = 0$$

будут у него общими с уравнением

$$(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m} = 0$$

и, следовательно,

$$F'(x) = C(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

где C — постоянный множитель.

Для определения величины этого множителя мы замечаем, что искомый полином $F(x)$ должен быть вида

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

и, следовательно,

$$F'(x) = nx^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-1},$$

что по сравнению с вышенайденным выражением $F'(x)$ дает

$$n = C,$$

и вследствие этого мы, по предыдущему, получаем такую формулу для определения функции $F'(x)$:

$$F'(x) = n(x-1)^\lambda (x+1)^{\lambda_0} (x-\alpha_1)^{2\lambda_1} (x-\alpha_2)^{2\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}.$$

Называя же через

$$q, q_0$$

частные и через

$$\rho, \rho_0$$

остатки, получаемые при делении показателей

$$\lambda, \lambda_0$$

на 2, мы замечаем, что это равенство может быть представлено так:

$$F'(x) = \\ = n(x-1)^\rho (x+1)^{\rho_0} [(x-1)^q (x+1)^{q_0} (x-\alpha_1)^{\lambda_1} (x-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{\lambda_m}]^2,$$

или

$$F'(x) = n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}U^2, \quad (3)$$

где U — полином, который найдется по формуле

$$(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{\lambda_m} = U.$$

§ 4. В формуле (3), выведенной нами для определения функции $F'(x)$, числа ρ , ρ_0 , представляя остатки от деления чисел λ , λ_0 на 2, могут иметь только такие значения:

$$0, 1,$$

и во всяком частном случае по виду числа n , степени искомого полинома $F'(x)$ и знаку производной его $F'(x)$ между $x=-1$, $x=+1$ нетрудно показать, какую из этих величин должен иметь показатель ρ или ρ_0 в выражении $F'(x)$ по формуле

$$F'(x) = n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}U^2.$$

В самом деле, если n , степень полинома

$$F(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n,$$

есть число нечетное, то производная его $F'(x)$ должна быть степени четной, а в этом случае предыдущее равенство, где U^2 — функция четной степени, предполагает, что множитель

$$(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}$$

представляет тоже функцию четной степени. Замечая же, что это не имеет места ни в предположении

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

ни в предположении

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0,$$

мы заключаем, что в рассматриваемом нами случае будет или

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1.$$

Чтобы сделать выбор из этих двух систем величин ρ , ρ_0 , мы замечаем, что при первой из них формула (3) дает

$$F'(x) = nU^2,$$

а при второй

$$F'(x) = n(x - 1)(x + 1)U^2$$

и что первое из этих двух выражений $F'(x)$, при $x > -1$ и $x < +1$, будет иметь величину положительную, а второе отрицательную, откуда видно, что при n нечетном будет

или

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

смотря по тому, будет ли искомый полином $F(x)$, от $x = -1$ до $x = +1$, представлять функцию возрастающую или убывающую.

Переходя к случаю n четного, мы замечаем, что при таком n производная $F'(x)$ будет степени нечетной и, следовательно, для удовлетворения равенству (3) должны принять

или

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0.$$

А так как при этих величинах ρ , ρ_0 формула (3) дает

$$F'(x) = n(x + 1)U^2, \quad F'(x) = n(x - 1)U^2,$$

где первое выражение $F(x)$, от $x = -1$ до $x = +1$, остается величиною положительною, а второе отрицательною, мы заключаем, что при n четном будет

или

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0,$$

смотря по тому, должен ли искомый полином $F(x)$, между $x = -1$ и $x = +1$, возрасть или убывать.

Так определяется величина показателей ρ , ρ_0 в формуле (3).

§ 5. Переходя к определению полинома U , заключающегося в этом выражении $F'(x)$, мы замечаем, что, по § 3, он представляет произведение

$$(x-1)^q (x+1)^{q_0} (x-\alpha_1)^{\lambda_1} (x-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x-\alpha_m)^{\lambda_m},$$

и, следовательно, должен иметь такой вид:

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \dots + B_{l-1} x + B_l.$$

Определяя по этой формуле степень второй части равенства (3) и приравнявая ее к числу $n-1$, степени первой части, получаем такое равенство:

$$n-1 = \rho + \rho_0 + 2l, \quad (4)$$

которое послужит нам для определения l , степени полинома U .

С другой стороны, мы замечаем, что, по § 3, предел уклонения от нуля искомого полинома $F(x)$ между $x = -1$, $x = +1$ равняется числовой величине интеграла

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F'(x) dx;$$

этот же интеграл, по внесении в него вышешоказанного выражения (3) функции $F'(x)$, приводится к такому:

$$\frac{(-1)^{\rho_0} n}{2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} U^2 dx,$$

которого числовая величина, очевидно, есть

$$\frac{n}{2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} U^2 dx.$$

А потому, называя через L предел уклонения от нуля искомого полинома $F(x)$ между $x = -1$, $x = +1$, будем иметь

$$L = \frac{n}{2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} U^2 dx, \quad (5)$$

откуда видно, что, уменьшая по возможности величину L согласно с требованием вопроса, мы должны полином G выбрать под условием, чтобы интеграл

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} U^2 dx$$

имел наименьшую величину.

Что же касается определения полинома U под таким условием, то это легко сделать при помощи функций

$$T_0, T_1, T_2, \dots, T_l, \dots,$$

получаемых разложением по степеням выражения

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda (1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

в ряд

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots + T_l s^l + \dots$$

В самом деле, эти функции, как известно, суть степеней $0, 1, 2, \dots$, и вообще при m , не равном m , удовлетворяют такому уравнению:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m T_{m_1}}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu} dx = 0,$$

откуда, по доказанному нами в мемуаре „О непрерывных дробях“*, следует, что наименьшая величина интеграла

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu} dx$$

* См. стр. 256—286. — *Ред.*

при Z вида $x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \dots + B_{l-1} x + B_l$ имеет место в том случае, когда полином Z разнится с функцией T_l только постоянным множителем. На основании этого мы заключаем, что полином

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \dots + B_{l-1} x + B_l,$$

соответствующий наименьшей величине интеграла

$$\int_1^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} U^2 dx,$$

найдется по формуле

$$U = C \cdot T_l,$$

когда в выражении

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\lambda} (1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\mu}}{\sqrt{1-2sx+s^2}},$$

доставляющем через разложение в ряд

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots + T_l s^l + \dots$$

значение функции T_l , положим

$$\lambda = -\rho_0, \quad \mu = -\rho.$$

Изображая же через

$$K_l$$

коэффициент при x^l в функции

$$T_l$$

и замечая, что эта степень x входит в полином U с коэффициентом, равным единице, мы заключаем, что вышенайденное выражение полинома U предполагает равенство

$$1 = CK_l,$$

откуда

$$C = \frac{1}{K_l},$$

вследствие чего это выражение полинома U нам дает

$$U = \frac{1}{K_l} T_l, \quad (6)$$

где, по вышесказанному, функция T_l определится разложением выражения

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho_0} (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}$$

в ряд

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots + T_l s^l + \dots$$

Так как это разложение может быть представлено под видом равенства

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx})^{-\rho_0} (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}} = \sum_0^{\infty} T_m s^m,$$

то, изображая вообще через

$$K_m, K'_m, \dots$$

коэффициенты при

$$x^m, x^{m-1}, \dots$$

в функции T_m , при m каком-нибудь, мы будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho_0} (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}} = \\ & = \sum_0^{\infty} (K_m x^m + K'_m x^{m-1} + \dots) s^m, \end{aligned}$$

каковы бы ни были величины s и x . Делая же здесь

$$x = \frac{a}{s}$$

и полагая потом

$$s = 0,$$

мы находим, что это равенство приводится к следующему:

$$\frac{(1 + \sqrt{1 - 2a})^{-\rho_0 - \rho}}{\sqrt{1 - 2a}} = \sum_0^{\infty} K_m a^m,$$

откуда видно, что K_l , коэффициент при x^l в функции T_l , будет равняться коэффициенту при α^l в разложении выражения

$$\frac{(1 + \sqrt{1 - 2\alpha})^{-\rho_0 - \rho}}{\sqrt{1 - 2\alpha}}.$$

Но так как, по вышешоказанному (§ 4) относительно чисел ρ_0 , ρ , сумма их $\rho_0 + \rho$ будет приводиться или к 0, или к 1, или к 2 и при этих величинах суммы $\rho_0 + \rho$ выражение

$$\frac{(1 + \sqrt{1 - 2\alpha})^{-\rho_0 - \rho}}{\sqrt{1 - 2\alpha}}$$

разлагается в ряды

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{1} \alpha + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \alpha^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l} \alpha^l + \dots, \\ & \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2} \alpha + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l + 1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l + 1)} \alpha^l + \dots, \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 1 \cdot 2} \alpha + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{l + 1}{l + 2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l + 1)} \alpha^l + \dots, \end{aligned}$$

то коэффициент K_l соответственно предположениям

$$\rho + \rho_0 = 0, \quad \rho + \rho_0 = 1, \quad \rho + \rho_0 = 2,$$

будет иметь следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} K_l &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l}, \\ K_l &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l + 1)}, \\ K_l &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l + 1)} \cdot \frac{l + 1}{l + 2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

§ 6. На основании вышешоказанного нетрудно будет найти во всяком данном случае такой полином $F(x)$ вида

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

который, не переставая возрастать или убывать между $x = -1$, $x = +1$, в этих пределах наименее удаляется от нуля.

Для этого мы прежде всего определяем числа ρ_0 , ρ , замечая, что, по § 4, при n нечетном должно быть

или

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

смотря по тому, ищется ли полином возрастающий или убывающий в пределах $x = -1$, $x = +1$, а при n четном должно быть

или

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0,$$

смотря по тому, возрастает ли в этих пределах искомый полином или убывает.

Определивши величину чисел ρ , ρ_0 , мы, по уравнению (4), находим

$$l = \frac{n - \rho - \rho_0 - 1}{2} \quad (8)$$

и затем ищем выражение функции T_l , представляющей коэффициент при s^l в разложении выражения

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho_0} (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}$$

по восходящим степеням s , и величину коэффициента K_l по формулам (7). Зная величину функции T_l и коэффициента K_l , мы найдем $F'(x)$, производную искомого полинома, на основании уравнений (3) и (6), которые по исключении из них U нам дают

$$F'(x) = \frac{n}{K_l^2} (x + 1)^{\rho_0} (x - 1)^{\rho} T_l^2.$$

Внося же эту величину производной $F'(x)$ в уравнение (1), мы получаем такое выражение для искомого полинома:

$$\frac{n}{K_l^2} \left[\int_{-1}^x (x - 1)^{\rho} (x + 1)^{\rho_0} T_l^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x - 1)^{\rho} (x + 1)^{\rho_0} T_l^2 dx \right].$$

Так найдется искомый полином, который между $x = -1$, $x = +1$ постоянно возрастаю или убываю, будет удаляться от нуля меньше, чем все другие такого же вида. Чтобы найти величину L , предела уклонений такого полинома от нуля между $x = -1$, $x = +1$, мы замечаем, что формула (5), по внесении в нее величины U из (6), нам дает

$$L = \frac{n}{2K_l^2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx,$$

где, заменяя, по (4), число n равною ему суммою $2l + \rho + \rho_0 + 1$, находим

$$L = \frac{2l + \rho + \rho_0 + 1}{2K_l^2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx.$$

Для определения величины интеграла

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx,$$

входящего в эту формулу, мы, на основании показанного нами* приведения интеграла

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sum_0^{\infty} T_m s^m \cdot \sum_0^{\infty} T_m t^m}{(1+x)^{\lambda} (1-x)^{\mu}} dx$$

к интегралу

$$\int_0^1 \frac{2^{\lambda+\mu+1} (1-stx)^{\nu}}{x^{\lambda} (1-x)^{\mu} (1-stx^2)} dx,$$

замечаем, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx$$

* См. мемуар „О функциях, подобных функциям Лежандра“, Полн. собр. соч., М. — Л., АН СССР, 1948, т. III, стр. 5—12. — *Ред.*

будет равняться коэффициенту при $(st)^l$ в разложении величины интеграла

$$\int_0^1 \frac{2^{-\rho_0-\rho+1} (1-stx)^{-\rho}}{x^{-\rho_0} (1-x)^{-\rho} (1-stx^2)} dx$$

по восходящим степеням st . А так как этот интеграл равен

$$\frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} \quad \text{при } \rho=0, \quad \rho_0=0,$$

равен

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2(st)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{1-\sqrt{st}}{1+\sqrt{st}} - \frac{\log(1-st)}{s^2 t^2} \right] \quad \text{при } \rho=1, \quad \rho_0=1$$

и равен

$$-\frac{1}{2st} \log(1-st)$$

при $\rho=0, \rho_0=1$, равно как и при $\rho=1, \rho_0=0$, и эти три выражения разлагаются в ряды

$$\begin{aligned} & 2 + \frac{2}{3} st + \frac{2}{5} (st)^2 + \dots + \frac{2}{2l+1} (st)^l + \dots, \\ & \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 5} st + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 7} (st)^2 + \dots + \frac{l+1}{2(l+2)(2l+3)} (st)^l + \dots, \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} st + \frac{1}{6} (st)^2 + \dots + \frac{1}{2(l+1)} (st)^l + \dots, \end{aligned}$$

то при вышепоказанных системах величин ρ, ρ_0 значения интеграла

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx$$

будут следующие:

$$\frac{2}{2l+1}, \quad \frac{l+1}{2(l+2)(2l+3)}, \quad \frac{1}{2(l+1)}.$$

Внося в выражение предела L эти величины интеграла

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx$$

вместе с величинами K_l по (7), находим для определения L такие три формулы:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1)} \right)^2, \\ L &= \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (l+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)} \right)^2 \frac{l+2}{l+1}, \\ L &= 2 \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (l+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)} \right)^2, \end{aligned}$$

соответствующие таким предположениям относительно ρ и ρ_0 :

$$\begin{aligned} \rho &= 0, & \rho_0 &= 0, \\ \rho &= 1, & \rho_0 &= 1, \\ \rho &= 0, & \rho_0 &= 1 \end{aligned}$$

или

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0.$$

Но, по (8), в этих предположениях относительно чисел ρ , ρ_0 находим

$$l = \frac{n-1}{2}, \quad l = \frac{n-3}{2}, \quad l = \frac{n-2}{2},$$

вследствие чего предыдущие выражения L приводятся к таким:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \right)^2, \\ L &= \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \right)^2 \frac{n+1}{n-1}, \\ L &= 2 \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Первые две формулы, полученные в предположениях

$$\begin{aligned} \rho &= 0, & \rho_0 &= 0, \\ \rho &= 1, & \rho_0 &= 1, \end{aligned}$$

относятся (§ 6) к случаю n нечетного; эти две формулы, как нетрудно заметить, могут быть представлены одною такою формулою:

$$L = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)} \right)^2 \frac{n+1}{n \pm 1},$$

которая приводится к первой или ко второй из них, смотря по тому, будет ли оставлен в выражении $n \pm 1$ знак $+$ или $-$. Замечая же, что первая формула соответствует предположению

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

и, следовательно, по § 5, тому случаю, когда искомый полином от $x = -1$ до $x = +1$ должен возрастать, а вторая соответствует предположению

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

и, следовательно, случаю, когда искомый полином убывает, мы заключаем, что в формуле

$$L = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \right)^2 \frac{n+1}{n \pm 1}$$

из двух знаков $\pm$ должен быть удержан $+$ или $-$, смотря по тому, возрастает ли искомый полином от $x = -1$ до $x = +1$ или убывает. Так найдется L , предел уклонения от нуля искомого полинома между $x = -1$ и $x = +1$, в том случае, когда n , степень этого полинома, число нечетное. Что касается определения L при n четном, то при таком n величина L найдется всегда по третьей формуле

$$L = 2 \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)} \right)^2,$$

так как она соответствует и предположению

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0$$

и предположению

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1.$$

§ 7. Полиномы вида

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n,$$

определяемые по вышесказанному, будут уклоняться от нуля между $x = -1$ и $x = +1$ меньше, чем все другие того же вида и подобно им возрастающие или убывающие, а потому при таких условиях никакой полином между $x = -1$ и $x = +1$ не может уклоняться от нуля меньше чем на L , предел уклонений рассматриваемых нами полиномов.

Вследствие этого выше найденные выражения предела L приводят нас к такой теореме:

Теорема. Если полином вида

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

от $x = -1$ до $x = +1$ не переставая возрастает или убывает, числовая величина его в этих пределах не может остаться меньше

$$2 \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{n}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} \right)^2,$$

если n число четное, и меньше

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} \right)^2 \frac{n+1}{n \pm 1},$$

если n число нечетное. В последней формуле из двух знаков $\pm$ должно взять $+$ или $-$, смотря по тому, возрастает или убывает искомый полином от $x = -1$ до $x = +1$.

Из этой теоремы можно вывести другую, более простую, заменив точные величины предела L такими приближенными величинами их, которые меньше настоящих. Такого рода приближенные величины L легко выводятся между прочим из формулы Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m+2}{2m+1} \cdot \frac{2m+2}{2m+3} \dots$$

В самом деле, полагая

$$X = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{(2m+2)(2m+4)}{(2m+3)^2} \cdots,$$

$$Y = \frac{(2m+2)^2}{(2m+1)(2m+3)} \cdot \frac{(2m+4)^2}{(2m+3)(2m+5)} \cdots,$$

мы по этой формуле находим

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2m}{2m-1} X,$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} Y,$$

откуда выводим

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 = \frac{2m\pi}{2^{2m+1} X},$$

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 = \frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1} Y}.$$

Замечая же, что вышешоказанные выражения величин X , Y могут быть представлены под таким видом:

$$X = \left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{(2m+3)^2} \right) \cdots,$$

$$Y = \left(1 + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)} \right) \left(1 + \frac{1}{(2m+3)(2m+5)} \right) \cdots,$$

мы заключаем, что

$$X < 1, \quad Y > 1,$$

вследствие чего предыдущие равенства нам дают

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 > \frac{2m\pi}{2^{2m+1}},$$

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 < \frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}},$$

откуда видно, что величина

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2$$

будет заключаться между двумя произведениями, получаемыми от умножения

$$\frac{\pi}{2^{2m+1}}$$

на $2m$ и на $2m+1$, и, следовательно, эта величина будет равняться произведению $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$ на некоторую среднюю величину между $2m$ и $2m+1$. Замечая же, что эта средняя величина может быть представлена формулой $2m+\theta$, где $\theta > 0$ и < 1 , мы на основании вышесказанного выводим такое равенство:

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 = \frac{(2m+\theta)\pi}{2^{2m+1}}.$$

Делая в этой формуле

$$m = \frac{n-1}{2}$$

при n нечетном и

$$m = \frac{n}{2}$$

при n четном, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \right)^2 &= \frac{\pi}{2^n} (n-1+\theta), \\ \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)} \right)^2 &= \frac{\pi}{2^{n+1}} (n+\theta). \end{aligned}$$

Так как значение θ ограничивается только пределами 0 и 1 и то же самое имеет место относительно разности $1-\theta$, то в первой из выведенных нами формул разность $1-\theta$ может быть заменена величиною θ , через что эта формула приводится к такому же виду, более простому:

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)} \right)^2 = \frac{\pi}{2^n} (n-\theta).$$

Сличая выведенные нами равенства с выражениями (§ 6), определяющими величину L , мы замечаем, что эти выражения приводятся

к следующим:

$$L = \frac{n+1}{n \pm 1} \frac{n-\theta}{2^n} \pi, \quad L = \frac{n+1}{2^n} \pi.$$

Рассматривая эти величины L , мы замечаем, что низший предел их получается из формулы

$$L = \frac{n+1}{n \pm 1} \frac{n-\theta}{2^n} \pi,$$

когда здесь примем $\theta=1$ и возьмем ± 1 с знаком $+$ и что эта предельная величина L равняется

$$\frac{n-1}{2^n} \pi,$$

откуда видно, что величина L будет всегда больше

$$\frac{n-1}{2^n} \pi,$$

вследствие чего, на основании вышедшего, мы приходим к такой теореме:

Теорема. Числовая величина полинома

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

между $x=-1$, $x=+1$ должна превзойти величину $\frac{n-1}{2^n} \pi$, если он в этих пределах не перестает возрастать или убывать.

Полагая в наших формулах

$$x = \frac{2z - a - b}{b - a}$$

и замечая, что при этом полином

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

по умножении на

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$$

приводится к полиному вида

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \dots$$

и что предельным величинам $x = -1$, $x = +1$ соответствуют такие предельные величины z :

$$z = a, \quad z = b,$$

мы, на основании предыдущей теоремы, получаем следующую:

Теорема. Числовая величина полинома

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots$$

между $z = a$, $z = b$ не может не превзойти величины $(n-1) \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi$, если он в этих пределах не переставая возрастает или убывает.

Из этой же теоремы нетрудно вывести такую:

Теорема. Если числовая величина $f(b) - f(a)$ разности значений полинома

$$f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots$$

при $z = a$, $z = b$ не превосходит предела

$$2(n-1) \left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi,$$

производная $f'(z)$ меняет свой знак между $z = a$, $z = b$.

В самом деле, если бы $f'(z)$ не меняла своего знака между $z = a$, $z = b$, то полином

$$\Phi(z) = f(z) - \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

в этих пределах представлял бы функцию, или постоянно возрастающую, или постоянно убывающую, а потому все значения его, от $z = a$ до $z = b$, заключались бы между его предельными значениями, соответствующими $z = a$, $z = b$, которые приводятся к следующим:

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2}(f(b) - f(a)),$$

$$\Phi(b) = \frac{1}{2}(f(b) - f(a)),$$

откуда видно, что между $z = a$, $z = b$ числовая величина полинома $\Phi(x)$

не превосходила бы числовой величины

$$\frac{1}{2} (f(b) - f(a))$$

и, следовательно, по условию теоремы, величины

$$\frac{1}{2} \cdot 2(n-1) \left(\frac{b-a}{4} \right)^n \pi = (n-1) \left(\frac{b-a}{4} \right)^n \pi,$$

а это не может иметь места по предыдущей теореме.

Полагая

$$F(z) = (m+1) \int_a^z (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots) dz$$

и замечая, что при этом функция $F(z)$ приводится к полиному вида

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \dots,$$

где

$$n = m + 1,$$

и что

$$F'(z) = (m+1) (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots),$$

$$F(b) - F(a) = (m+1) \int_a^b (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots) dz,$$

мы из этой теоремы выводим такую:

Теорема. Уравнение

$$z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots = 0$$

между $z=a$, $z=b$ должно иметь по крайней мере один корень, если числовая величина интеграла

$$\int_a^b (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots) dz$$

не превосходит величины

$$\frac{2m}{m+1} \pi \left(\frac{b-a}{4} \right)^{m+1}.$$

На основании той же теоремы нетрудно доказать такую относительно ряда функций

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-1)}(z), f^{(n)}(z),$$

служащих для отделения корней по способу Фурье:

Теорема. *Какова бы ни была величина t , если в выражении $t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}$ радикал берется со знаком, противным знаку дроби $\frac{f(t)}{f'(t)}$, при двух подстановках $z=t$, $z=t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}$ число перемен знака в ряду*

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-1)}(z), f^{(n)}(z),$$

где

$$f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots,$$

не может остаться без изменения.

При доказательстве этой теоремы представляется несколько различных случаев, смотря по знаку величин $f(t)$, $f'(t)$. Мы рассмотрим тот случай, когда обе величины имеют знак $+$; но то, что будет показано относительно этого случая, легко применяется ко всем остальным.

Предполагая обе величины $f(t)$, $f'(t)$ положительными, мы должны взять в выражении

$$t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}$$

радикал со знаком $-$ и, следовательно, должны показать, что при

$$f(t) > 0, f'(t) > 0$$

число перемен знака в ряду

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-1)}(z), f^{(n)}(z)$$

не одинаково для $z=t$ и для $z=t - 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}$.

Для доказательства этого мы замечаем, что всякий раз, когда между рассматриваемыми пределами или $f(z)$, или $f'(z)$, или та и другая

обращаются в 0, число перемен знака в ряду

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-1)}(z), f^{(n)}(z),$$

очевидно, должно измениться. Что же касается предположения, что между этими пределами ни $f(z)$, ни $f'(z)$ не обращается в нуль, то невозможность этого нетрудно доказать на основании вышешоказанной теоремы.

В самом деле, если

$$f(t) > 0, \quad f'(t) > 0$$

и в то же время уравнения

$$f(z) = 0, \quad f'(z) = 0$$

не имеют корней между $z = t$, $z = t - 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}$, то функции

$$f(z), \quad f'(z)$$

в этих пределах должны сохранять знак $+$; а потому должно быть:

$$f\left(t - 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}\right) > 0$$

и

$$f\left(t - 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}\right) < f(t),$$

откуда видно, что числовая величина разности

$$f(t) - f\left(t - 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}\right)$$

должна быть меньше $f(t)$, а это невозможно по вышешоказанной теореме, так как числовая величина разности

$$f(b) - f(a)$$

при

$$b = t, \quad a = t - 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2 \pi^2}}$$

по этой теореме должна превосходить

$$2(n-1)\pi \left(\frac{b-a}{4}\right)^n = 2(n-1)\pi \left[\sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}} \right]^n = f(t).$$

Прикладывая последнюю теорему к тому случаю, когда уравнение

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots = 0$$

не имеет мнимых корней, и замечая, что в этом случае всякое изменение числа перемен знака в ряду

$$f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-1)}(z), f^{(n)}(z)$$

при переходе от $z=t$ к $z=t \pm 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ показывает присутствие корня уравнения

$$f(z) = 0$$

между этими величинами z , мы приходим к такой теореме:

Теорема. *Какова бы ни была величина t , взяв радикал в выражении $t \pm 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ со знаком, противным знаку дроби $\frac{f(t)}{f'(t)}$, мы найдем между пределами t и $t \pm 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ по крайней мере один корень уравнения*

$$f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots = 0,$$

если только это уравнение не имеет мнимых корней.

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ



ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ, ИЗВЕСТНЫХ ПОД НАЗВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛОГРАМОВ

§ 1. Когда нужно упрочить прямолинейное движение части механизма, подверженной действию наклонного к ней усилия, нельзя пренебрегать мало доступными измерению неправильностями направляющих; уклонения, не заметные простым глазом, ясно обнаруживаются пассивными сопротивлениями, происходящими вследствие их существования. Направляя поршневый стержень паровой машины посредством кулисы или параллелей, особенное внимание обращают на то, чтоб они были выполнены с возможным совершенством. Если эти направляющие заменяются параллелограмом, то следует еще более стараться увеличить, насколько возможно, точность его хода, так как даже в самых благоприятных условиях он дает уклонения столь значительные, что их никогда не допустят в движении стержня, направляемого посредством кулисы или параллелей. Боковые давления, происходящие от неправильностей в ходе параллелограмма, часто обнаруживаются даже образованием некоторого рода эллиптичности в сальнике.

При настоящем состоянии практической механики не существует надежных правил для нахождения наиболее выгодных элементов параллелограмма. За отсутствием прямой методы его элементы определяют на основании условий, выполнение которых считают необходимым для точности хода этого механизма. Таким образом находят длину отводного радиуса и положение его оси качаний, стараясь сделать направление поршневого стержня вполне вертикальным в начале, в середине и в конце его хода.

Тогда, если даны стороны параллелограмма, все сводится только к определению надлежащим образом положения стержня относительно коромысла. Это положение находят, стараясь поместить стержень так,

чтобы его продолжение прошло через середину стрелки дуги, описываемой концом коромысла. Здесь, как и везде впоследствии, мы принимаем за конец коромысла точку его прикрепления к крайнему звену параллелограмма.

Если считать особенно выгодным, чтобы поршневый стержень имел вполне точное направление в начале, в середине и в конце его хода, то отводной радиус, находимый при помощи метода, о которой мы только что говорили, очевидно, единственный, удовлетворяющий этому условию.

Но этот случай, как мы увидим, не самый благоприятный для точности хода параллелограмма в других точках пробега поршня. Что же касается до наиболее выгодного положения поршневого стержня по отношению к коромыслу, предыдущий принцип его не указывает. Из теории, предлагаемой в этом мемуаре, видно, что поршневой стержень должен быть более или менее приближен к центру коромысла, смотря по размерам параллелограмма, и что в наиболее обыкновенных случаях его продолжение вовсе не проходит через середину стрелки дуги, описываемой концом коромысла. Так, в случае, когда параллелограмм Уатта построен на половине плеча коромысла (каким делал его сам Уатт и каким его следует делать, если имеется возможность располагать размерами параллелограмма), предел уклонений стержня от его нормального направления можно значительно уменьшить, приближая его к центру коромысла более, чем это следовало бы сделать, основываясь на принципе, о котором мы только что говорили. А именно: 1) в случае, когда желательно сделать вполне вертикальным положение стержня в начале, в середине и в конце его хода, за его направление следует брать направление прямой, делящей стрелку дуги, описываемой концом коромысла, в отношении 2 к 1; 2) в случае, когда не требуется абсолютная точность в двух крайних положениях стержня, за его направление следует брать прямую, делящую эту стрелку в отношении 5 к 3.

В последнем случае отводной радиус уже не будет более определяться предельными положениями коромысла; для определения его придется брать положения, которые им предшествуют приблизительно на одну сороковую часть амплитуды качаний. Хотя изменения в устройстве параллелограмма Уатта, о котором мы только что говорили, невелики и хотя они только — приближенные следствия наших формул, тем не менее они значительно увеличивают точность его хода.

При помощи анализа легко убедиться, что в силу этих изменений предел уклонений стержня от вертикальной линии уменьшается более чем на половину. Это нам ясно показывает, что принцип, лежащий в основании современной теории параллелограма, далеко не сводит к *minimum*'у предел его уклонений, столь вредных благодаря происходящим от них боковым давлениям на поршневой стержень. Поэтому не только для теории, но и для практики очень важно заменить в исследованиях о параллелограме этот принцип, который стараются оправдать при помощи неточных рассуждений, прямой методой. Достигнув этой цели, можно из природы самого механизма и представляемых практикой условий вывести наиболее подходящие элементы для точности его хода. В этом мемуаре мы предполагаем дать такую методу, которая обнимает параллелограм Уатта и все его разновидности, находящие применение на практике.

§ 2. Когда разлагаем функцию $f(x)$ по степеням $x - a$, сумма первых членов дает полином, который между всеми другими той же степени наиболее приближается к $f(x)$ вблизи $x = a$. Этот полином принимают за приближенное значение функции $f(x)$, когда требуется представить ее в виде целой функции. Но для вычисления $f(x)$ под видом целой функции следует этому полиному предпочесть другой, если вместо наиболее приближенного выражения $f(x)$ вблизи $x = a$ требуется увеличить предел точности ее приближенного выражения внутри данного для x промежутка. Этот второй полином определяется условием, чтобы предел его уклонений от $f(x)$ в данном промежутке был менее предела уклонений всех других полиномов той же степени. По мере уменьшения этого промежутка второе приближенное выражение $f(x)$ приближается к выражению, находимому из разложения $f(x)$ по степеням $x - a$, при прилично выбранном a . Но пока промежуток остается конечным, коэффициенты этих двух приближенных выражений $f(x)$ отличаются друг от друга, и их разностями, даже в случае, когда они малы, нельзя пренебрегать в теории механизмов, которыми мы будем заниматься. Мы уже заметили, как важно было определить с достаточной точностью положение поршневого стержня относительно коромысла, или, что сводится к тому же, углы параллелограма в его

среднем положении. Углы же эти уклоняются очень немного от 90° , и эти отклонения происходят именно от различия в коэффициентах двух приближенных выражений функций, о которых мы только что говорили, именно, выражения, которое дает наименьшую погрешность вблизи некоторого значения x , и выражения, которого предел погрешности наименьший в данном промежутке. Если не обращать внимания на эти разности, то для углов параллелограмма в его среднем положении получается 90° , и происходящая отсюда ошибка, хотя и в небольшом числе градусов, оказывается, однако, достаточною, чтобы уменьшить более чем в 10 раз точность хода этого механизма.

Из сказанного видно, что теория параллелограммов, которую мы собираемся дать, не может быть основана на приближенных формулах, определенных только тем условием, что они дают максимум точности вблизи некоторого одного значения переменной; эта теория требует методов приближенного вычисления, которые могли бы доставить наибольшую точность для всех значений переменной между данными пределами. В этом-то и заключается трудность этой теории. Относительно методы приближенных вычислений, о которых мы только что упомянули, мы имеем только изыскания Понселе, который дал часто употребляющиеся линейные формулы для представления таких трех выражений:

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В задачах Понселе уравнения, определяющие искомые коэффициенты, решаются легко. Но это встречается только в очень частных случаях. Тем более точное решение их будет невозможно, если надо найти общее выражение коэффициентов для представления какой угодно функции, ибо тогда эти уравнения, сами по себе очень сложной формы, содержат произвольную функцию. Поэтому для этой методы приближенного вычисления можно дать общие формулы только при посредстве рядов. Именно таким путем мы и искали решение следующего вопроса:

Определить изменения, которые надо произвести в приближенном выражении функции $f(x)$, данном ее разложением по степеням $x - a$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x = a - h$ и $x = a + h$, где h — величина не очень значительная.

Предлагаемая здесь теория параллелограмов основана на решении этого вопроса для случая, когда разложение $f(x)$ останавливается на члене, за которым следует член с показателем, бóльшим на единицу: это случай, наиболее часто встречающийся при вычислении функции.

§ 3. Пусть будет $f(x)$ данная функция, U — полином степени n с произвольными коэффициентами. Если выберем эти коэффициенты так, чтобы разность $f(x) - U$ от $x = a - h$ до $x = a + h$ оставалась в пределах, наиболее близких к 0, то разность $f(x) - U$, как известно, будет обладать следующим свойством:

Между наибольшими и наименьшими значениями разности $f(x) - U$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$ встречается по крайней мере $n + 2$ раза одно и то же численное значение.

Значения, принимаемые $f(x) - U$ при $x = a - h$ и при $x = a + h$, рассматриваются как maximum или minimum.

Пользуясь этим, легко установить уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты U . Если мы условимся обозначать через L общее численное значение $n + 2$ наибольших и наименьших значений, принимаемых $f(x) - U$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$, то уравнение

$$[f(x) - U]^2 - L^2 = 0 \quad (1)$$

должно иметь $n + 2$ корня, лежащие между $a - h$ и $a + h$, и все эти корни должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d(f(x) - U)}{dx} = 0,$$

которое представляет собой условие maximum'a или minimum'a или приводится к значениям $a - h$, $a + h$; одним словом, $n + 2$ корня уравнения (1), лежащие между $a - h$, $a + h$, должны удовлетворять уравнению

$$(x - a + h)(x - a - h) \frac{d(f(x) - U)}{dx} = 0. \quad (2)$$

Это дает нам достаточное число уравнений для нахождения $n + 1$ коэффициентов полинома U и неизвестного значения L , ибо каждому из $n + 2$ общих корней уравнений (1) и (2) соответствует уравнение

между коэффициентами U и величиною L , что в общем составляет $n + 2$ уравнения. Решение этих уравнений, очевидно, возможно только в том случае, когда данная функция $f(x)$ вполне определена. Но если величина h достаточно мала, можно оставить $f(x)$ произвольной и искать коэффициенты U в рядах, расположенных по возрастающим степеням h . Здесь мы будем искать эти коэффициенты только для случаев, имеющих значение в теории параллелограмов, но наш метод может быть распространен на все случаи, когда $f(a + z)$ в пределах от $z = -h$ до $z = +h$ может быть разложена в ряд по формуле Тэйлора. Это будет предметом другого мемуара.

Чтобы упростить наши формулы, мы обозначим через $k_0, k_1, k_2, \dots$ значения

$$f(a), \frac{f'(a)}{1}, \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}, \dots,$$

так что разложение $f(x)$ по формуле Тэйлора будет

$$f(x) = k_0 + k_1(x - a) + k_2(x - a)^2 + \dots$$

Затем мы положим $x - a = hz$, что приведет разложение $f(x)$ к виду

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots,$$

а пределы

$$x = a - h, \quad x = a + h$$

обратятся в следующие:

$$z = -1, \quad z = +1.$$

Тогда искомый полином U будет определен условием, что в пределах $z = -1, z = +1$ разность

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots - U = Y \quad (3)$$

по возможности наименее уклоняется от нуля.

Если обращать внимание только на величины порядка меньшего h^{n+1} , то выражение для Y будет

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n - U,$$

и его minimum, очевидно, равен нулю, ибо, вследствие того, что иско-
мый полином U степени n , можно привести Y к нулю, взяв

$$U = k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n. \quad (4)$$

Следовательно, значение U , точное до величин порядка h^{n+1} , будет равно

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n.$$

Нетрудно убедиться, что степень точности этого значения U будет еще выше, если в ряду

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n + k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} + \dots$$

за членом $k_n h^n z^n$ следует несколько членов, равных нулю.

Действительно, если

$$k_{n+1} = 0, k_{n+2} = 0, \dots, k_{n+m} = 0, \quad (5)$$

этот ряд можно заменить полиномом

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n$$

даже в случае, когда полином U ищется с точностью до величин порядка h^{n+m+1} . Следовательно, вообще точное выражение U будет иметь вид

$$U = U_0 + V h^{m+n+1}, \quad (6)$$

где

$$U_0 = k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n,$$

V — полином степени n , коэффициенты которого не делаются бесконечно большими при $h = 0$, а m — число уравнений (5). Это число не равно нулю только в том случае, когда $k_{n+1} = 0$, что имеет место тогда, когда a — один из корней уравнения $f^{n+1}(x) = 0$, так как мы обозначаем через k_{n+1} значение $\frac{f^{n+1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$. Для того чтобы это число равнялось 2, 3, ..., необходимо, чтобы a было двукратным, трекратным и т. д. корнем уравнения $f^{n+1}(x) = 0$.

Из (6) видно, что точное значение U состоит из двух частей: U_0 и $V h^{m+n+1}$. Первая часть, очевидно, не что иное, как сумма $n + 1$ первых членов разложения $f(a + h z)$ по степеням z ; что же касается

второй части, то она определяет те изменения, которым надо подвергнуть коэффициенты найденного приближенного значения, чтобы сделать наименьшим предел его погрешности в данном для независимой переменной промежутке. Переходя к определению этой части U , мы подставляем сумму $U_0 + Vh^{m+n+1}$ вместо U в выражение (3) для Y ; на основании уравнений (4) и (5) значение Y будет

$$(k_{n+m+1}z^{n+m+1} + k_{n+m+2}hz^{n+m+2} + \dots - V)h^{n-m+1};$$

именно это выражение мы и должны стараться сделать по возможности близким к нулю в пределах от $z = -1$ до $z = +1$.

Если мы откинем постоянный множитель h^{n+m+1} и будем обращать внимание только на величины, порядок которых ниже порядка h , значение V , точное до этой степени, определится условием, что V — тот из полиномов степени n , для которого разность

$$k_{n+m+1}z^{n+m+1} - V$$

наименее уклоняется от нуля в пределах от $z = -1$ до $z = +1$.

Но, по § 3, это приводится к системе $2n + 4$ уравнений такого вида:

$$(k_{n+m+1}z^{n+m+1} - V)^2 - L^2 = 0, \quad \frac{d(k_{n+m+1}z^{n+m+1} - V)}{dz}(z^2 - 1) = 0.$$

Решение этих уравнений при помощи обыкновенных методов алгебры требует вычислений, почти не выполнимых, вследствие их сложности, если только степень n искомого полинома не мала. Мы покажем, что при помощи интегрального исчисления можно заменить эти уравнения другими, число которых, при всяком n , не превышает $2m$, и даже дать их общее решение для случаев $m = 0$ и $m = 1$, что очень важно для метода приближенного вычисления, которым мы теперь занимаемся, так как, по сказанному нами, число m имеет значительную величину только в очень редких, исключительных случаях, обыкновенное же его значение есть нуль. Последний случай представляется и в теории параллелограмов.

§ 4. Положим для краткости

$$y = k_{n+m+1}z^{n+m+1} - V. \quad (7)$$

Тогда уравнения, определяющие V , представятся так:

$$y^2 - L^2 = 0, \quad (z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0. \quad (8)$$

Из условий того minimum'a, который мы ищем, следует, что эти уравнения должны иметь $n + 2$ общих корня, лежащих между $z = -1$ и $z = +1$. А это, так как y — полином степени $n + m + 1$, предполагает, как мы сейчас покажем, что дробь

$$\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

приводится к виду

$$\frac{P(z^2 - 1)}{Q^2},$$

где P и Q — целые функции, первая степени $2m$, вторая степени m .

Действительно, положим, что

$$z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}$$

$n + 2$ общих корня уравнений (8). Среди них по крайней мере n , будучи отличными от -1 и $+1$, не могут иначе удовлетворить уравнению

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0,$$

как обращая $\frac{dy}{dz}$ в нуль. Если же $z = z_1$ — один из этих корней, разность $z - z_1$, очевидно, разделит $\frac{dy}{dz}$ и $y^2 - L^2$. Нетрудно убедиться, что $y^2 - L^2$ разделится даже на квадрат $(z - z_1)^2$, ибо уравнение $\frac{dy}{dz} = 0$, которое имеет место при $z = z_1$, предполагает кратность этого корня в уравнении $y^2 - L^2 = 0$. Поэтому, если

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

значения z , удовлетворяющие уравнениям

$$y^2 - L^2 = 0, \quad (z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0,$$

не приводя $z^2 - 1$ к нулю, то функции $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$, $y^2 - L^2$ делятся на

$$(z - z_1)^2 (z - z_2)^2 \dots (z - z_n)^2.$$

Следовательно, дробь

$$\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

приводится к $\frac{P_0}{Q^2}$, где P_0 — полином степени $2(n+m+1) - 2n = 2m+2$, а Q — степени $n+m - n = m$. Остается доказать, что полином P_0 можно привести к виду $P(z^2 - 1)$. Для этого заметим, что уравнения

$$y^2 - L^2 = 0, \quad (z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0$$

удовлетворяются еще двумя значениями z , а именно

$$z = z_{n+1}, \quad z = z_{n+2}.$$

Если эти значения не обращают $\frac{dy}{dz}$ в нуль, они равны ± 1 и -1 и, следовательно, $y^2 - L^2$ делится на $(z+1)(z-1) = z^2 - 1$. Но так как в этом случае $\frac{dy}{dz}$ не обращается в нуль при $z = \pm 1$, в дроби $\frac{P_0}{Q^2}$, равной $\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$, числитель P_0 содержит множителем $z^2 - 1$ и, следовательно,

$$P_0 = P(z^2 - 1).$$

К этому виду можно привести числитель P_0 , если одно из значений z_{n+1} , z_{n+2} или оба удовлетворяют уравнению $\frac{dy}{dz} = 0$. Действительно, если $z = z_{n+1}$ делает $\frac{dy}{dz} = 0$, на основании сказанного выше, квадрат $(z - z_{n+1})^2$ будет общим делителем функций $y^2 - L^2$, $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$, а следовательно, и функций P_0 и Q^2 . Если же мы этот множитель сократим в дроби $\frac{P_0}{Q^2}$ и вместо него введем $z+1$ или $z-1$, мы получим дробь, числитель и знаменатель которой будут той же степени, как и в дроби

$\frac{P_0}{Q^2}$, но числитель которой уже будет содержать множителем $z + 1$ или $z - 1$. Это нам показывает, что во всех возможных случаях мы будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \frac{P(z^2 - 1)}{Q^2},$$

которое приводится к виду

$$\frac{dy}{V y^2 - L^2} = \frac{Q dz}{V (z^2 - 1)^P},$$

где степени P и Q суть соответственно $2m$ и m .

Так как левая часть этого уравнения имеет интегралом

$$\frac{1}{2} \log \frac{y + V y^2 - L^2}{y - V y^2 - L^2},$$

мы заключаем, что дифференциал

$$\frac{2Q dz}{V (z^2 - 1)^P}$$

принадлежит к числу тех, интеграл которых приводится к одному логарифмическому члену вида $\log \frac{p + q V R}{p - q V R}$, где p отличается от y только постоянным множителем и, следовательно, в силу (7), функция p должна быть степени $n + m + 1$ и не может содержать членов со степенями z^{n+m} , z^{n+m-1} , ..., z^{n+1} . Поэтому остроумный метод Абеля для интегрирования дифференциалов вида $\frac{p dx}{V R}$ при помощи одного логарифмического члена даст нам $2m$ уравнений между коэффициентами полинома P , что вполне достаточно для его определения, так как он степени $2m$ и один из его коэффициентов может быть выбран произвольно. Уравнения, определяющие P , следующие: 1) m условий интегрируемости $\frac{2Q}{V (z^2 - 1)^P} dz$

в виде $\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$, где p степени $n + m + 1$; 2) m уравнений, получаемых через приравнивание нулю коэффициентов при $z^{n+m}, z^{n+m-1}, \dots, z^{n+1}$ в выражении p . По методу Абеля, как условия интегрируемости $\frac{2Qdz}{V(z^2 - 1)P}$ в виде $\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$, где p определенной степени, так и самый полином p даются в функциях одних коэффициентов P , так что для нахождения этих коэффициентов и выражения p придется только решить систему $2m$ уравнений с $2m$ неизвестными. Найденное таким образом значение p доставит полином y с постоянным множителем, который, на основании (7), определится из условия, что коэффициент при z^{n+m+1} равен k_{n+m+1} .

Таким образом, определение полинома y , а следовательно, по (7), и V сводится к решению $2m$ уравнений, тогда как уравнения (8) давали коэффициенты этих полиномов системой $2n + 4$ уравнений.

На основании методов знаменитого Якоби, все эти изыскания значительно упрощаются в некоторых случаях при помощи эллиптических функций.

Важность найденного нами дифференциального уравнения для нахождения y обнаруживается в случае $m = 0$, когда это уравнение интегрируется легко и дает нам общее значение y для всякого n . По этому интегралу находится и общее значение y в случае $m = 1$.

§ 5. Функции Q и P в дифференциальном уравнении

$$\frac{Qdz}{V(z^2 - 1)P} = \frac{dy}{V(y^2 - L^2)},$$

как мы видели, соответственно степеней m и $2m$. Поэтому, если $m = 0$, эти функции приводят к постоянным, и наше уравнение делается

$$\lambda \frac{dz}{V(z^2 - 1)} = \frac{dy}{V(y^2 - L^2)};$$

интегрируя его, получаем

$$\lambda \log \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{z - \sqrt{z^2 - 1}} + C = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - L^2}}{y - \sqrt{y^2 - L^2}},$$

где постоянная C есть нуль, так как при $z = \pm 1$ будем иметь $y = \pm L$. Итак,

$$\lambda \log \frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{z - \sqrt{z^2 - 1}} = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - L^2}}{y - \sqrt{y^2 - L^2}},$$

и, следовательно, без логарифмов

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - L^2}}{y - \sqrt{y^2 - L^2}} = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{z - \sqrt{z^2 - 1}} \right)^\lambda,$$

что дает

$$y = \pm \frac{L}{2} [(z + \sqrt{z^2 - 1})^\lambda + (z - \sqrt{z^2 - 1})^\lambda].$$

Чтобы определить величины L и λ , заметим, что, вследствие (7), при $m=0$ полином y должен быть $n+1$ степени и иметь первым членом $k_{n+1} z^{n+1}$. Но в разложении найденного выражения y член с наивысшей степенью z имеет значение

$$\pm 2^{\lambda-1} L z^\lambda,$$

которое может быть тождественно с $k_{n+1} z^{n+1}$ только при

$$\lambda = n+1, \quad L = \pm \frac{k_{n+1}}{2^{\lambda-1}} = \pm \frac{k_{n+1}}{2^n}. \quad (9)$$

Поэтому мы находим для y в случае $m=0$ такое выражение:

$$y = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} [(z + \sqrt{z^2 - 1})^{n+1} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{n+1}] \quad (10)$$

и, следовательно, по (7),

$$V = k_{n+1} \left[z^{n+1} - \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right]. \quad (11)$$

Таким образом, при $m=0$ мы находим с точностью до порядка h общий вид функции V , определяющей (§ 3) разности между коэффициентами приближенного выражения $f(x)$, находимого из ее разложения по степеням $x-a$, и того (выражения), предел погрешности которого в промежутке $x=a-h$, $x=a+h$ — наименьший. В случае $m=0$ положение $x=a$ не удовлетворяет уравнению $f^{n+1}(x)=0$, где n —

показатель наивысшей степени x в искомом приближенном выражении $f(x)$. В случае, когда $x = a$ — простой корень уравнения $f^{n+1}(x) = 0$ и когда, следовательно, $m = 1$, значение V , точное до членов порядка h , найдется с такою же легкостью. Действительно, при $m = 1$, уравнение (7) дает

$$y = k_{n+2} z^{n+2} - V,$$

и, так как V степени n , мы заключаем, что y , кроме члена $k_{n+2} z^{n+2}$, содержит только степени z ниже z^{n+1} ; среди полиномов такого вида y будет тот, который наименее уклоняется от нуля в пределах $z = -1$, $z = +1$. Из (10) видно, что из всех видов полиномов, в которых член с наивысшей степенью z есть $k_{n+2} z^{n+2}$, наименьшее уклонение от нуля имеет место для

$$k_{n+2} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+2} + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+2} \right],$$

а так как в этом полиноме коэффициент при z^{n+1} равен 0, то мы заключаем, что он и представляет искомое выражение $y = k_{n+2} z^{n+2} - V$. Следовательно, при $m = 1$, полином V определяется уравнением

$$V = k_{n+2} \left[z^{n+2} - \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+2} \right].$$

В случае, когда m превышает 1, $y = k_{n+m+1} z^{n+m+1} - V$, а следовательно, и V могут быть определены, как мы видели, системой $2m$ уравнений.

Таким образом, найдется во всех случаях функция V с точностью до величин порядка h . Что же касается более приближенного значения V , то нахождение его требует только элементарных действий алгебры, как мы обнаружим в следующих параграфах на случае $m = 0$.

Но прежде чем перейти к этим изысканиям, мы остановимся несколько на формуле (10), чтобы показать ту пользу, которую можно из нее извлечь при исследовании свойств целых функций. Мы нашли это выражение y , отыскивая тот из полиномов степени $n + 1$, который, имея вид $k_{n+1} z^{n+1} - V$, наименее уклоняется от нуля в пределах $z = -1$, $z = +1$. Если рассматривать V как произвольный полином степени n , то разность $k_{n+1} z^{n+1} - V$ будет общим выражением полиномов степени $n + 1$, у

которых коэффициент при z^{n-1} равен k_{n+1} . Поэтому, так как между всеми этими полиномами полином, данный формулой (10), наименее уклоняется от нуля в пределах $z = -1$, $z = +1$ и так как число L , обозначающее наибольшее его уклонение, равно $\pm \frac{k_{n+1}}{2^n}$ (9), то мы заключаем, что все другие полиномы этого вида, от $z = -1$ до $z = +1$, представляют более значительные уклонения, и, следовательно, их значения, так же как и значения (10), не могут быть заключенными в пределах более тесных, чем

$$M - \frac{k_{n+1}}{2^n}, \quad M + \frac{k_{n+1}}{2^n};$$

отсюда, заменив z на $\frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}$, k_{n+1} на $A \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}$, $n+1$ на l , мы

получаем следующую теорему:

Теорема. Если в целой функции степени l коэффициент при наивысшей степени x равен A , то, при изменении x от $x=a$ до $x=b$, значения этой функции не могут заключаться в пределах более тесных, чем

$$M - 2A \left(\frac{b-a}{4} \right)^l, \quad M + 2A \left(\frac{b-a}{4} \right)^l *.$$

* Эта теорема приводит нас ко многим другим, относящимся к решению уравнений, например:

1) Если $f(x) = x^l + Bx^{l-1} + Cx^{l-2} + \dots$, то между пределами h и $h \pm 4 \sqrt[l]{\pm \frac{1}{2} f(h)}$ находится по крайней мере один корень уравнений $f(x) = 0$ $f'(x) = 0$. Радикал следует брать со знаком $-$ или $+$, смотря по тому, одного знака $f(h)$ и $f'(h)$ или различных.

2) Уравнение $(x^l + Bx^{l-1} + Cx^{l-2} + \dots + Hx)^2 - K^2 = 0$ имеет по крайней мере один корень между пределами $-2 \sqrt[l]{\frac{1}{2} k}$, $+2 \sqrt[l]{\frac{1}{2} k}$.

3) Уравнение $x^{2l+1} + Bx^{2l-1} + Cx^{2l-3} + \dots + Hx \pm k = 0$ имеет по крайней мере один корень в пределах $-2 \sqrt[2l+1]{\frac{1}{2} k}$, $+2 \sqrt[2l+1]{\frac{1}{2} k}$, так что в пределах $-\frac{a}{3} - \frac{2}{3} \sqrt[3]{a^3 - \frac{9}{2} ab + \frac{27}{2} c}$, $-\frac{a}{3} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{a}{3} - \frac{9}{2} ab + \frac{27}{2} c}$ непременно находится по крайней мере один корень кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

§ 6. Мы видели в § 3, что полином степени n , наименее уклоняющийся от $f(x)$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$, в случае когда $f^{n+1}(a)$ не равно нулю, имеет вид

$$U + Vh^{n+1},$$

где U — сумма первых $n + 1$ членов в разложении $f(x)$ по степеням $x - a$, а V — полином степени n , определяемый следующим условием: при $x - a = hz$, V обращается в полином, который в пределах $z = -1$, $z = +1$ уклоняется от $k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+1}hz^{n+2} + \dots$ менее всех других полиномов той же степени. Величины

$$k_{n+1}, k_{n+2}, \dots$$

соответственно равны

$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)}, \frac{f^{(n+2)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+2)}, \dots$$

В § 4 и 5 мы искали выражение V , точное до количества порядка h , и нашли, что оно равно

$$k_{n+1} \left[z^{n+1} - \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Мы дадим теперь способ нахождения V со сколь угодно большою точностью.

Если мы для краткости положим

$$k_{n+1} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right] = y,$$

найденная нами величина V , точная до величин порядка h , представится в виде

$$k_{n+1}z^{n+1} - y$$

и, следовательно, точное значение V будет

$$V = k_{n+1}z^{n+1} - y + V_0h, \quad (12)$$

где V_0 — полином степени n , коэффициенты которого остаются конечными при $h = 0$. По свойству полинома V мы найдем эти коэффи-

циенты, стараясь сделать наименьшим предел значений

$$k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots - V = k_{n+2}hz^{n+2} + \\ + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots + y - V_0h$$

в промежутке от $z = -1$ до $z = +1$. А для этого нужно, как мы видели в § 3, чтобы уравнения

$$[k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots + y - V_0h]^2 - L_1^2 = 0, \\ (z^2 - 1) \frac{d[k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots + y - V_0h]}{dz} = 0$$

имели, в пределах от $z = -1$ до $z = +1$, $n+2$ общих корней. Если ограничиться только величинами порядка низшего, чем h^2 , эти уравнения будут

$$[k_{n+2}hz^{n+2} + y - V_0h]^2 - L_1^2 = 0, \quad (13)$$

$$(z^2 - 1) \frac{d[k_{n+2}hz^{n+2} + y - V_0h]}{dz} = 0. \quad (14)$$

Далее, что для нас очень важно, последнее уравнение можно заменить с той же степенью точности следующим:

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0.$$

Действительно, так как это уравнение не имеет кратных корней (что видно из выражения для y), то численные значения его корней изменятся только на величины порядка h , если к его левой части прибавим член

$$h(z^2 - 1) \frac{d[k_{n+2}z^{n+2} - V_0]}{dz},$$

после чего оно сделается тождественным с уравнением (14). Поэтому корни уравнения (14), которые не делаются бесконечными при $h = 0$ и, следовательно, все те, которые остаются в пределах -1 и $+1$, при h очень малом даются уравнением

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0$$

с точностью до первой степени h . Если в корнях уравнения (14), равных ± 1 , мы сделаем ошибку порядка h , ошибка в значении

$$[k_{n+2}hz^{n+2} \mp y - V_0h]^2 - L_1^2$$

для этих корней будет порядка h^2 или еще высшего, так как, вследствие (14), первая производная этого выражения равна нулю для этих значений z с точностью по крайней мере до величин порядка h . Что же касается корней

$$z = -1, \quad z = +1,$$

для которых эта производная не равна нулю, то они будут точными корнями уравнения

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0.$$

Поэтому значение V_0h , точное до величин порядка h^2 , определится условием, что $n+2$ корня уравнения

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0$$

удовлетворяют уравнению

$$[k_{n+2}hz^{n+2} \mp y - V_0h]^2 - L_1^2 = 0,$$

которое обращается в

$$y^2 \mp 2y(k_{n+2}z^{n+2} - V_0)h - L_1^2 = 0,$$

если в нем откинуть члены, содержащие множителем h^2 , и, наконец, в

$$(y^2 - L_1^2)y \mp 2y^2(k_{n+2}z^{n+2} - V_0)h = 0,$$

если его умножить на y . Но из найденного в § 5 следует, что полином y , имеющий значение

$$y = k_{n+1} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

удовлетворяет уравнению

$$y^2 - L^2 = 0$$

при z , равном одному из корней уравнения

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0,$$

где $L = \pm \frac{k_{n+1}}{2^n}$. Следовательно, для этих значений z можно в найденном уравнении заменить y^2 через L^2 , что дает

$$(L^2 - L_1^2) y + 2L^2 (k_{n+2} z^{n+2} - V_0) h = 0.$$

Последнее же уравнение может быть удовлетворено $n+2$ корнями уравнения

$$(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0$$

только в том случае, если оно с ним тождественно, так как оба они степени $n+2$ (это видно из того, что y степени $n+1$, а V_0 степени n). Отсюда следует, что их левые части отличаются только постоянным множителем, и потому

$$(L^2 - L_1^2) y + 2L^2 (k_{n+2} z^{n+2} - V_0) h - C(z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0,$$

где C — постоянная.

Но так как y степени $n+1$ и не содержит члена со степенью z^n , а степень V_0 не превышает n , то ясно, что в этой формуле коэффициент при z^{n+1} приводится к нулю только в случае, когда

$$L^2 - L_1^2 = 0,$$

и, следовательно, так как L равно $\pm \frac{k_{n+1}}{2^n}$, когда

$$L_1 = \pm \frac{k_{n+1}}{2^n}. \quad (15)$$

На этом основании последнее уравнение нам дает

$$V_0 = k_{n+2} z^{n+2} - \frac{C}{2hL^2} (z^2 - 1) \frac{dy}{dz}.$$

Постоянную $\frac{C}{2hL^2}$ мы найдем, замечая, что V_0 не содержит члена с z^{n+2} . Так как в выражение $(z^2 - 1) \frac{dy}{dz}$, где

$$y = k_{n+1} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

входит член $(n+1)k_{n+1}z^{n+2}$, последнее условие требует, чтобы

$$k_{n+2} - \frac{(n+1)Ck_{n+1}}{2hL^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{C}{2hL^2} = \frac{k_{n+2}}{(n+1)k_{n+1}}.$$

Подставляя эту величину $\frac{C}{2hL^2}$ в найденное выражение для V_0 , мы получаем

$$V_0 = k_{n+2} \left(z^{n+2} - \frac{z^2 - 1}{(n+1)k_{n+1}} \frac{dy}{dz} \right).$$

Таким образом, мы находим значение V_0 , точное до первой степени h , что, вследствие (12), нам дает такое значение V , точное до h^2 :

$$V = k_{n+1}z^{n+1} - y + k_{n+2} \left(z^{n+2} - \frac{z^2 - 1}{(n+1)k_{n+1}} \frac{dy}{dz} \right) h, \quad (16)$$

где, как мы видели, y имеет следующее значение:

$$y = k_{n+1} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

§ 7. Не останавливаясь на этом приближенном значении функции V , мы покажем вообще, как найти ее значение, точное до величин порядка h^{2l} , когда известно ее значение с точностью до величин порядка h^l .

Если мы обозначим через V_1 это последнее значение функции V , то ее точное значение можно представить в виде

$$V = V_1 + V_2 h^l,$$

где V_2 — полином степени n , коэффициенты которого остаются конеч-

ными при $h=0$. По свойству V (§ 5), неизвестный полином V_2 будет определен условием, что уравнения

$$[k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots - V_1 - V_2h^l]^2 - L_2^2 = 0,$$

$$(z^2 - 1) \frac{d[k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots - V_1 - V_2h^l]}{dz} = 0$$

имеют $n+2$ общих корней, лежащих в пределах $z=-1$, $z=+1$. Если обращать внимание только на величины порядка, меньшего h^{2l} , можно откинуть в этих уравнениях члены, содержащие h^{2l} , h^{2l+1} , h^{2l+2} , ... , и результату дать следующий вид:

$$[y_1 + Sh^l - V_2h^l]^2 - L_2^2 = 0,$$

$$(z^2 - 1) \frac{d[y_1 + Sh^l - V_2h^l]}{dz} = 0, \quad (17)$$

полагая для краткости

$$y_1 = k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots + k_{n+l}h^{l-1}z^{n+l} - V_1,$$

$$S = k_{n+l+1}z^{n+l+1} + k_{n+l+2}hz^{n+l+2} + \dots + k_{n+2l}h^{l-1}z^{n+2l}. \quad (18)$$

Что же касается уравнений, определяющих V_1 (значение V , точное только до h^l), их можно получить из уравнений (17), откидывая в них члены, содержащие h^l , h^{l+1} , h^{l+2} , Так что, с точностью до величин порядка h^l , мы будем иметь для

$$y_1 = k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots + k_{n+l}h^{l-1}z^{n+l} - V_1$$

следующие уравнения:

$$y_1^2 - L_1^2 = 0, \quad (z^2 - 1) \frac{dy_1}{dz} = 0,$$

в которых L_1 — значение L_2 , точное до h^l ; а это предполагает уравнение

$$L_2 = L_1 + \lambda h^l. \quad (19)$$

Переходя к определению V_2 , мы замечаем, как и в предыдущем параграфе, что в условиях, определяющих V_2h^l с точностью до величин порядка h^{2l} , последнее из уравнений (17) может быть заменено следующим:

$$(z^2 - 1) \frac{dy_1}{dz} = 0,$$

и так как в этих условиях дело касается только корней, остающихся конечными при $h=0$, то последнее уравнение может быть заменено другим, вида

$$(z^2 - 1) W = 0,$$

где W — целая функция, выбранная таким образом, что уравнение $W=0$, точное до h^l , содержит все корни уравнения $\frac{dy_1}{dz}$, которые не делаются бесконечными при $h=0$ *. Так как число этих корней равно n , ибо при $h=0$ рассматриваемый нами теперь полином y_1 делается равным найденному в § 5 (10), который был степени $n+1$, то заключаем, что степень уравнения $W=0$ может быть понижена до n .

В этом случае уравнение

$$(z^2 - 1) W = 0$$

будет только степени $n+2$, и по условиям, которыми определяются V_2 и y_1 , все его $n+2$ корней должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} [y_1 + Sh^l - V_2 h^l]^2 - L_2^2 &= 0, \\ y_1^2 - L_1^2 &= 0, \end{aligned}$$

первому с точностью до членов порядка h^{2l} , а второму до h^l .

Подставляя в первое из этих уравнений значение L_2 из (19) и откидывая члены, содержащие h^{2l} , мы получаем равенство

$$y_1^2 + 2y_1(S - V_2)h^l - L_1^2 - 2\lambda L_1 h^l = 0,$$

которое, по умножении на y_1 , дает уравнение

$$(y_1^2 - L_1^2) y_1 + 2y_1^2(S - V_2)h^l - 2\lambda L_1 h^l y_1 = 0,$$

* Вот как можно отделить корни уравнения $u + hv = 0$, которые не делаются бесконечными при $h=0$.

Если уравнение $u=0$ не имеет равных корней, то корни уравнения $u + hv = 0$, которые не делаются бесконечными при $h=0$, даются уравнением $u=0$ с точностью до первой степени h . Чтобы найти эти корни с точностью до h^2 , следует взять уравнение $u + hR = 0$, где R — остаток от деления v на u . Для приближения до h^3 следует взять $u + hR_1 = 0$, где R_1 — остаток от деления v на $u + hR$ и т. д. В случае, когда уравнение $u=0$ имеет равные корни, приложим тот же метод, но только в этом случае приближение идет не так быстро.

которому, с точностью до h^{2l} , должны удовлетворять все корни уравнения

$$(z^2 - 1) W = 0.$$

Но для этих корней, с точностью до h^l , мы имеем также уравнение

$$y_1^2 - L_1^2 = 0,$$

которое, будучи умножено на $2(S - V_2)h^l$ и вычтено из только что найденного уравнения, дает с точностью до h^{2l} следующее уравнение:

$$(y_1^2 - L_1^2)y_1 + 2L_1^2(S - V_2)h^l - 2\lambda L_1 h^l y_1 = 0,$$

или, что то же

$$V_2 h^l + \frac{\lambda h^l}{L_1} y_1 - S h^l - \frac{(y_1^2 - L_1^2)y_1}{2L_1^2} = 0.$$

Так как это уравнение, до членов порядка h^{2l} , удовлетворяется всеми корнями уравнения

$$(z^2 - 1) W = 0,$$

то, с той же степенью точности, его левая часть должна делиться на $(z^2 - 1) W$ и, следовательно, если мы обозначим через R_0 и R_1 остатки от деления $y_1 h^l$ и $S h^l + \frac{(y_1^2 - L_1^2)y_1}{2L_1^2}$ на $(z^2 - 1) W$, то выражение

$$V_2 h^l + \frac{\lambda}{L_1} R_0 - R_1,$$

члены которого низшей степени, чем $(z^2 - 1) W$, должно быть тождественно равно нулю, до величин порядка h^{2l} . Поэтому с такой же степенью приближения будем иметь

$$V_2 h^l + \frac{\lambda}{L_1} R_0 - R_1 = 0,$$

и, следовательно,

$$V_2 h^l = R_1 - \frac{\lambda}{L_1} R_0,$$

что можно привести к виду

$$V_2 h^l = r + \left(q - \frac{\lambda}{L_1} \right) R_0,$$

обозначив через q и r частное и остаток от деления R_1 на R_0 .

Но нетрудно убедиться, что это уравнение может быть удовлетворено только при

$$\frac{\lambda}{L_1} = q,$$

и, следовательно,

$$V_2 h^l = r.$$

Действительно, степень искомого полинома V_2 не выше n ; то же самое можно сказать относительно r : эта функция — остаток от деления R_1 на R_0 , а R_0 — остаток от деления $y_1 h^l$ на $(z^2 - 1)W$; следовательно, степень r по крайней мере двумя единицами меньше степени $(z^2 - 1)W$, равной $n + 2$. Напротив, остаток R_0 непременно выше степени n , ибо, как мы заметили выше, при $h = 0$ полином y_1 приводится к y , данному формулой (10), и тогда $(z^2 - 1)W$ делается $(z^2 - 1) \frac{dy}{dz}$; из выражения же y видно, что остаток от деления y на $(z^2 - 1) \frac{dy}{dz}$ содержит член со степенью z^{n+1} .

Итак, чтобы найти функцию $V_2 h^l$, точную до h^{2l} , следует поступать так: делить функции

$$y_1 h^l, \quad Sh^l + \frac{(y_1^2 - L_1^2) y_1}{2L_1^2}$$

на $(z^2 - 1)W$; делить второй остаток на первый.

Остатком от второго деления будет выражение $V_2 h^l$. По функции $V_2 h^l$ легко найти полином V , так как $V = V_1 + V_2 h^l$.

Частное от последнего деления дает нам тоже очень важное выражение. Это частное, обозначенное нами через q , равно, как мы видели, дроби $\frac{\lambda}{L_1}$; следовательно, $\lambda = qL_1$ и, по (19),

$$L_2 = L_1 (1 + qh^l).$$

Таким образом, мы находим постоянную L_2 уравнения (17), которая нам указывает предел уклонений полинома V от функции

$$k_{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}hz^{n+2} + k_{n+3}h^2z^{n+3} + \dots$$

между $z = -1$ и $z = +1$.

Только что изложенный нами метод всегда позволяет переходить от одного приближенного значения V к другому, более точному.

§ 8. Мы приложим теперь этот метод к решению следующего вопроса, очень важного для теории параллелограмов:

Найти изменения, которым надо подвергнуть коэффициенты приближенного выражения $f(x)$

$$f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{1.2.3.4} f^{IV}(a),$$

для того, чтобы оно в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$ наименее уклонялось от $f(x)$.

Мы предположим величину h настолько малою, что можно разложить искомые поправки коэффициентов по возрастающим степеням h ; кроме того, мы исключим случай, когда $f^V(x)$ делается нулем при $x = a$.

По сказанному нами в § 3 поправки даются выражением

$$Vh^5,$$

где V , как функция $z = \frac{x-a}{h}$, должна быть полиномом четвертой степени, для которого разность

$$k_5 z^5 + k_6 h z^6 + k_7 h^2 z^7 + \dots - V$$

наименее уклоняется от нуля в пределах от $z = -1$ до $z = +1$. Коэффициенты $k_5, k_6, k_7, \dots$ соответственно равны

$$\frac{f^V(a)}{1.2.3.4.5}, \frac{f^{VI}(a)}{1.2.3.4.5.6}, \frac{f^{VII}(a)}{1.2.3.4.5.6.7}, \dots$$

Уравнение (16) § 6 нам дает следующее значение V , точное до h^2 :

$$V = k_5 z^5 - y + k_6 \left(z^6 - \frac{z^2 - 1}{5k_5} \frac{dy}{dz} \right) h,$$

где

$$y = k_5 \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^5 + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^5 \right].$$

Из этих формул находим

$$y = k_5 \left(z^5 - \frac{5}{4} z^3 + \frac{5}{16} z \right),$$

$$V = k_5 \left(\frac{5}{4} z^3 - \frac{5}{16} z \right) + k_6 \left(\frac{7}{4} z^4 - \frac{13}{16} z^2 + \frac{1}{16} \right) h.$$

Величину же L_1 , которая определяет предел уклонений V от функций $k_5 z^5 + k_6 h z^6 + k_7 h^2 z^7 + \dots$, мы получаем из (15):

$$L_1 = \pm \frac{k_5}{16}.$$

Переходя к определению V , точной до h^4 , мы замечаем, что функции, обозначенные в предыдущем параграфе через V_1 , y_1 , S , имеют теперь следующие значения:

$$V_1 = k_5 \left(\frac{5}{4} z^3 - \frac{5}{16} z \right) + k_6 \left(\frac{7}{4} z^4 - \frac{13}{16} z^2 + \frac{1}{16} \right) h,$$

$$y_1 = k_5 z^5 + k_6 h z^6 - k_5 \left(\frac{5}{4} z^3 - \frac{5}{16} z \right) - k_6 \left(\frac{7}{4} z^4 - \frac{13}{16} z^2 + \frac{1}{16} \right) h =$$

$$= k_5 \left(z^5 - \frac{5}{4} z^3 + \frac{5}{16} z \right) + k_6 \left(z^6 - \frac{7}{4} z^4 + \frac{13}{16} z^2 - \frac{1}{16} \right) h,$$

$$S = k_7 z^7 + k_8 h z^8.$$

По этим значениям V_1 , y_1 , S метод предыдущего параграфа дает

$$V = V_1 + V_2 h^2,$$

где V_2 — полином, который находят при помощи следующих действий:

1) Ищут уравнение 4-й степени, точное до h^2 , содержащее все корни уравнения

$$\frac{dy_1}{dz} = k_5 \left(5z^4 - \frac{15}{4} z^2 + \frac{5}{16} \right) + k_6 \left(6z^5 - 7z^3 + \frac{13}{8} z \right) h = 0,$$

остающиеся конечными при $h=0$. Так как остаток от деления $k_6 \left(6z^5 - 7z^3 + \frac{13}{8}z \right)$ на $k_5 \left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16} \right)$ равен $k_6 \left(-\frac{5}{2}z^3 + \frac{5}{4}z \right)$, мы заключаем, пользуясь примечанием в сноске на стр. 632, что требуемым условиям удовлетворяет следующее уравнение:

$$k_5 \left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16} \right) + k_6 \left(-\frac{5}{2}z^3 + \frac{5}{4}z \right) h = 0,$$

и, следовательно, функция, которую мы обозначили в прошлом параграфе через W , имеет значение

$$W = k_5 \left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16} \right) + k_6 \left(-\frac{5}{2}z^3 + \frac{5}{4}z \right) h.$$

2) Ищут остаток от деления $y_1 h^2$ на $(z^2 - 1)W$. При данных значениях y_1 и W этот остаток, если откинуть в нем члены, содержащие $h^4, h^5, \dots$, будет равен

$$k_5 \left(z^5 - \frac{5}{4}z^3 + \frac{5}{16}z \right) h^2.$$

3) Делят функцию

$$Sh^2 + \frac{(y_1^2 - L_1^2)y_1}{2L_1^2}$$

на $(z^2 - 1)W$. В рассматриваемом нами случае остаток от этого деления имеет следующее значение, точное до h^4 :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{7k_5 k_7 + k_6^2}{4k_5} z^5 - \frac{13k_5 k_7 + 6k_6^2}{16k_5} z^3 + \frac{k_5 k_7 + 2k_6^2}{16k_5} z \right] h^2 + \\ & + \left[\frac{36k_5^2 k_8 + 2k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16k_5^2} z^4 - \frac{87k_5^2 k_8 + 10k_5 k_6 k_7 - 5k_6^3}{64k_5^2} z^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{7k_5^2 k_8 + 2k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{64k_5^2} \right] h^3. \end{aligned}$$

4) Делят последний остаток на первый

$$k_5 \left(z^5 - \frac{5}{4}z^3 + \frac{5}{16}z \right) h^2.$$

Это деление дает частное

$$\frac{7k_5k_7 + k_6^2}{4k_5^2}$$

и остаток

$$\begin{aligned} & \frac{36k_5^2k_8 + 2k_5k_6k_7 - k_6^3}{16k_5^2} h^3 z^4 + \frac{22k_5k_7 - k_6^2}{16k_5} k^2 z^3 - \frac{87k_5^2k_8 + 10k_5k_6k_7 - 5k_6^3}{64k_5^2} h^3 z^2 - \\ & - \frac{31k_5k_7 - 3k_6^2}{64k_5} h^2 z + \frac{7k_5^2k_8 + 2k_5k_6k_7 - k_6^3}{64k_5^2} h^3. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем:

1) Величина $V_2 h^2$, с точностью до h^4 , имеет значение

$$\begin{aligned} & \frac{36k_5^2k_8 + 2k_5k_6k_7 - k_6^3}{16k_5^2} h^3 z^4 + \frac{22k_5k_7 - k_6^2}{16k_5} h^2 z^3 - \frac{87k_5^2k_8 + 10k_5k_6k_7 - 5k_6^3}{64k_5^2} h^3 z^2 - \\ & - \frac{31k_5k_7 - 3k_6^2}{64k_5} h^2 z + \frac{7k_5^2k_8 + 2k_5k_6k_7 - k_6^3}{64k_5^2} h^3, \end{aligned}$$

и, следовательно, с той же степенью точности

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 h^2 &= k_5 \left(\frac{5}{4} z^3 - \frac{5}{16} z \right) + k_6 \left(\frac{7}{4} z^4 - \frac{13}{16} z^2 + \frac{1}{16} \right) h + V_2 h^2 = \\ &= \left(\frac{7}{4} k_6 h + \frac{36k_5^2k_8 + 2k_5k_6k_7 - k_6^3}{16k_5^2} h^3 \right) z^4 + \left(\frac{5}{4} k_5 + \frac{22k_5k_7 - k_6^2}{16k_5} h^2 \right) z^3 - \\ &- \left(\frac{13}{16} k_6 h + \frac{87k_5^2k_8 + 10k_5k_6k_7 - 5k_6^3}{64k_5^2} h^3 \right) z^2 - \left(\frac{5}{16} k_5 + \frac{31k_5k_7 - 3k_6^2}{64k_5} h^2 \right) z + \\ &+ \frac{1}{16} k_6 h + \frac{7k_5^2k_8 + 2k_5k_6k_7 - k_6^3}{64k_5^2} h^3. \end{aligned}$$

2) Значение постоянной L_2 , определяющей предел уклонений полинома V от функции

$$k_5 z^5 + k_6 h z^6 + k_7 h^2 z^7 + \dots$$

между $z = -1$, $z = +1$, равно

$$L_1 \left(1 + \frac{7k_5k_7 + k_6^2}{4k_5^2} h^2 \right) = \pm \frac{k_5}{16} \left(1 + \frac{7k_5k_7 + k_6^2}{4k_5^2} h^2 \right).$$

Умножая найденное значение V на h^5 и заменяя z через $\frac{x-a}{h}$, мы получаем выражение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{7}{4} k_6 h^2 + \frac{36k_5^2 k_8 + 2k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16k_5^2} h^4 + \dots \right) (x-a)^4 + \\ & + \left(\frac{5}{4} k_5 h^2 + \frac{22k_5 k_7 - k_6^2}{16k_5} h^4 + \dots \right) (x-a)^3 - \\ & - \left(\frac{13}{16} k_6 h^4 + \frac{87k_5^2 k_8 + 10k_5 k_6 k_7 - 5k_6^3}{64k_5^2} h^6 + \dots \right) (x-a)^2 - \\ & - \left(\frac{5}{16} k_5 h^4 + \frac{31k_5 k_7 - 3k_6^2}{64k_5} h^6 + \dots \right) (x-a) + \\ & + \frac{1}{16} k_6 h^6 + \frac{7k_5^2 k_8 + 2k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{64k_5^2} h^8 + \dots \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты при $(x-a)^4$, $(x-a)^3$, ... определяют поправки, которые нужно произвести в коэффициентах приближенного выражения $f(x)$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1} (x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x-a)^3 + \frac{f^{IV}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (x-a)^4,$$

чтобы уменьшить возможным образом предел его погрешности между $x=a-h$, $x=a+h$. Что же касается величины предельной погрешности, из того, что было найдено для V , следует, что она равна

$$L_2 h^5 = \pm \frac{k_5}{16} \left(1 + \frac{7k_5 k_7 + k_6^2}{4k_5^2} h^2 \right) h^5.$$

§ 9. До сих пор мы искали приближенные выражения функций, подчиняя их только условию, чтобы предел их уклонений в данном промежутке был наименьшим. Но весьма часто бывает важно, чтобы погрешность приводилась к нулю для пределов промежутка.

Нетрудно убедиться, что этот случай, если промежуток достаточно мал, решается также при помощи только что данных нами методов.

Положим, что $f(x)$ — функция, приближенное выражение которой в пределах $x = a - \gamma$, $x = a + \gamma$ ищется под видом полинома u степени n , подчиненного вышеупомянутым условиям. Так как разность $f(x) - u$ должна обращаться в 0 при $x = a - \gamma$ и $x = a + \gamma$, в полиноме u остается только $n - 1$ произвольных коэффициентов, которые, по свойству искомого minimum'a, будут определены следующим условием:

Среди наибольших и наименьших величин разности $f(x) - u$ в пределах $x = a - \gamma$, $x = a + \gamma$ встречается по крайней мере n раз одно и то же численное значение. А это требует (§ 3), чтобы для некоторой величины l уравнения

$$(f(x) - u)^2 - l^2 = 0, \quad \frac{d(f(x) - u)}{dx} = 0$$

имели n общих корней, заключенных в пределах $x = a - \gamma$, $x = a + \gamma$. Следовательно, если заменим эти пределы другими, более широкими, $x = a - h$, $x = a + h$, выбранными так, чтобы для них разность $f(x) - u$ делалась равною $+l$ или $-l$, то уравнения

$$(f(x) - u)^2 - l^2 = 0, \quad (x - a + h)(x - a - h) \frac{d(f(x) - u)}{dx} = 0 \quad (20)$$

будут иметь $n + 2$ общих корня между $x = a - h$, $x = a + h$.

Поэтому для этих пределов полином $U = u$ дает решение уравнений (1) и (2), которыми мы занимались в предыдущих параграфах, а следовательно, и наоборот, решение этих уравнений дает нам полином u для некоторых значений $a - \gamma$, $a + \gamma$. Последний мы легко найдем, замечая, что, вследствие свойств искомого minimum'a, значения $x = a - \gamma$, $x = a + \gamma$, лежащие между $a - h$, $a + h$, удовлетворяют уравнению

$$f(x) - u = 0,$$

и между этими двумя значениями x находится n общих корней уравнений

$$(f(x) - u)^2 - l^2 = 0, \quad \frac{d(f(x) - u)}{dx} = 0.$$

Чтобы показать приложения сказанного, мы найдем полином u , который, будучи сам степени n , дает точное значение $f(x) = k_{n-1}x^{n+1}$

при $x = a - \gamma$, $x = a + \gamma$, и наименее уклоняется внутри этих пределов от функции $f(x) = k_{n+1}x^{n+1}$. При этом значения $f(x)$ и при $y = \frac{k_{n+1}x^{n+1} - u}{h^{n+1}}$, $x = a - hz$, $L = \frac{l}{h^{n+1}}$ уравнения (20) обращаются в

$$y^2 - L^2 = 0, \quad (z^2 - 1) \frac{dy}{dz} = 0,$$

$n+2$ общих корня которых должны лежать между $z = -1$, $z = +1$.

Так как $y = \frac{k_{n+1}(a + hz)^{n+1} - u}{h^{n+1}}$ — полином степени $n+1$, в котором коэффициент при z^{n+1} равен k_{n+1} , то мы видим на основании (10), что это может иметь место только при

$$y = k_{n+1} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad L = \pm \frac{k_{n+1}}{2^n}.$$

Заменяя здесь y через $\frac{k_{n+1}(a + hz)^{n+1} - u}{h^{n+1}}$, z через $\frac{x - a}{h}$, L через $\frac{l}{h^{n+1}}$, мы получим

$$u = k_{n+1}x^{n+1} - k_{n+1} \left[\left(\frac{x - a + \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{x - a - \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

$$l = \pm \frac{k_{n+1}h^{n+1}}{2^n}.$$

Переходя к определению $a - \gamma$, $a + \gamma$, для которых этот полином дает искомый минимум, мы замечаем, что уравнение

$$k_{n+1}x^{n+1} - u = k_{n+1} \left[\left(\frac{x - a + \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{x - a - \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^{n+1} \right] = 0,$$

обращающееся в

$$\cos(n+1)\varphi = 0,$$

если положить $x - a = h \cos \varphi$, имеет следующие корни:

$$a - h \cos \frac{\pi}{2n+2}, a - h \cos \frac{3\pi}{2n+2}, \dots, a + h \cos \frac{3\pi}{2n+2}, a + h \cos \frac{\pi}{2n+2}.$$

Так как в этом ряду находятся только два значения

$$a - h \cos \frac{\pi}{2n+2}, \quad a + h \cos \frac{\pi}{2n+2},$$

между которыми лежат n корней уравнения

$$\frac{d(k_{n+1}x^{n+1} - u)}{dx} = \\ = \frac{d \left\{ k_{n+1} \left[\left(\frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 - h^2}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{x-a - \sqrt{(x-a)^2 - h^2}}{2} \right)^{n+1} \right] \right\}}{dx} = 0,$$

которое обращается в $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = 0$, если положить $\frac{x-a}{h} = \cos\varphi$, то мы заключаем, что $\alpha - \gamma$, $\alpha + \gamma$ не могут иметь других значений, кроме

$$\alpha - \gamma = a - h \cos \frac{\pi}{2n+2}, \quad \alpha + \gamma = a + h \cos \frac{\pi}{2n+2},$$

откуда следует

$$a = \alpha, \quad h = \frac{\gamma}{\cos \frac{\pi}{2n+2}}.$$

Подставляя эти значения a и h в найденное выражение u , получаем

$$u = k_{n+1}x^{n+1} - k_{n+1} \left[\left(\frac{x-\alpha}{2} + \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2n+2}}} \right)^{n+1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{x-\alpha}{2} - \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2n+2}}} \right)^{n+1} \right].$$

Таков общий вид полинома степени n , делающегося равным $k_{n+1}x^{1+n}$ при $x = \alpha - \gamma$, $x = \alpha + \gamma$ и между этими пределами наименее уклоняющегося от этой функции. Что же касается пределов этих уклонений, мы нашли

$$l = \pm \frac{k_{n+1}}{2^n} h^{n+1}, \quad h = \frac{\gamma}{\cos \frac{\pi}{2n+2}}.$$

Поэтому постоянная l , определяющая этот предел, имеет следующее значение:

$$l = \pm \frac{k_{n+1} \gamma^{n+1}}{2^n \cos^{n+1} \frac{\pi}{2n+2}}.$$

Так как разность $k_{n+1}x^{n+1} - u$, где u — произвольный полином степени n , представляет общий вид целой функции, в которой член с наивысшей степенью x равен $k_{n+1}x^{n+1}$, то найденные нами формулы приводят к следующей теореме:

Теорема. Между двумя корнями $x=a$, $x=b$ уравнения

$$f(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + Cx^{n-1} + \dots = 0$$

численное значение $f(x)$ не может оставаться меньше

$$2A \left(\frac{a-b}{4 \cos \frac{\pi}{2n+2}} \right)^{n+1}.$$

Исследуя таким же образом случай $f(x) = px^5 + qx^7$ и предполагая γ очень малою, мы найдем по формулам § 8, что с точностью до γ^8 , полином u четвертой степени, делающийся равным $px^5 + qx^7$ при $x = -\gamma$, $x = +\gamma$ и наименее уклоняющийся от этой функции между $x = -\gamma$ и $x = +\gamma$, имеет следующее значение:

$$u = \left(\frac{5p}{4 \cos^2 18^\circ} \gamma^2 + \frac{11 - \sin 18^\circ \cos 54^\circ}{8 \cos^4 18^\circ} q \gamma^4 \right) x^3 - \\ - \left(\frac{5p}{16 \cos^4 18^\circ} \gamma^4 + \frac{31 - 4 \sin 18^\circ \cos 54^\circ}{64 \cos^6 18^\circ} q \gamma^6 \right) x.$$

Что же касается предела уклонений этого полинома от функции $px^5 + qx^7$ между $x = -\gamma$, $x = +\gamma$, его найдем равным

$$\frac{p \gamma^5}{16 \cos^5 18^\circ} + \frac{7 - \sin 18^\circ \cos 54^\circ}{64 \cos^7 18^\circ} q \gamma^7.$$

§ 10. При помощи найденных нами формул можно во всех возможных случаях определить наиболее выгодные элементы параллелограмма. Но это не единственный результат, следующий из наших формул. Мы видели, что они дают некоторые теоремы алгебры, доказательство

которых, может быть, было бы невозможно при посредстве обыкновенных методов. Существуют и в геометрии вопросы, решение которых требует методов приближенного вычисления вроде тех, которыми мы занимались.

Приведем пример. Пусть даны уравнения двух кривых, из которых одно содержит n произвольных параметров, которые позволяют, при приличном выборе их, располагать по произволу абсциссами n точек пересечения данных кривых в промежутке $x = a - h, x = a + h$. Очевидно, что в этом промежутке кривые будут более или менее близки друг к другу, смотря по положению точек пересечения. Каково расположение точек, общих обеим кривым между $x = a - h, x = a + h$, при котором предел уклонений кривых друг от друга внутри этого промежутка наименьший?

Этот вопрос, очевидно, относится к тому методу приближенного вычисления, которым мы занимались в предыдущих параграфах. Приложение к нему наших формул дает очень интересные результаты.

Пусть

$$y = f(x)$$

уравнение кривой с данными параметрами, и

$$Y = F(x, h)$$

уравнение, которого n произвольных параметров выбраны по условию искомого minimum'a между пределами $x = a - h, x = a + h$.

Если примем $h = 0$, последняя кривая обратится в соприкасающуюся с данной в точке $x = a$, и касание их будет, если исключить некоторые особенные точки, порядка $n - 1$, и мы будем иметь

$$\frac{d^n F(x, h)}{dx^n} - \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \text{конечной величине}, \quad (21)$$

вместе с равенствами

$$F(x, h) = f(x), \quad \frac{dF(x, h)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}F(x, h)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}$$

при $x = a, h = 0$.

Предполагая, что функции

$$f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^nf(x)}{dx^n},$$

$$F(x, h), \frac{dF(x, h)}{dx}, \frac{d^2F(x, h)}{dx^2}, \dots, \frac{d^nF(x, h)}{dx^n}$$

остаются конечными вблизи $h=0$, $x=a$, мы заключаем отсюда, что при h — очень малом для значений x , лежащих между $x=a-h$, $x=a+h$, функции

$$Y-y, \frac{d(Y-y)}{dx}, \frac{d^2(Y-y)}{dx^2}, \dots, \frac{d^n(Y-y)}{dx^n}$$

не делаются бесконечно большими. Затем функции

$$\frac{d^n(Y-y)}{dx^n} = \frac{d^nF(x, h)}{dx^n} - \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

можно придать вид

$$N + \psi(x),$$

полагая для краткости

$$N = \frac{d^nF(a, 0)}{da^n} - \frac{d^nf(a)}{da^n},$$

$$\psi(x) = \frac{d^nF(x, h)}{dx^n} - \frac{d^nF(a, 0)}{da^n} - \frac{d^nf(x)}{dx^n} + \frac{d^nf(a)}{da^n}.$$

Поэтому для значений x , лежащих между $x=a-h$, $x=a+h$, при h достаточно малом, ряд Тэйлора дает

$$Y-y = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \dots + H(x-a)^{n-1} +$$

$$+ \frac{N + \psi[a + \theta(x-a)]}{1 \cdot 2 \dots n} (x-a)^n,$$

где величины $A, B, C, \dots, H, N$ не зависят от x и притом

$$N = \frac{d^nF(a, 0)}{da^n} - \frac{d^nf(a)}{da^n}$$

отлична от нуля по (21). Что же касается функции $\psi[a + \theta(x-a)]$, то для рассматриваемых нами значений x она делается бесконечно малой одновременно с h .

Эта формула нам показывает, что для x , лежащего между пределами $x = a - h$ и $x = a + h$, с точностью до величин порядка h^n включительно, значение $Y - y$ равно полиному

$$A + B(x - a) + C(x - a)^2 + \dots + H(x - a)^{n-1} + \frac{N}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} (x - a)^n,$$

и, следовательно, по § 5, искомый минимум будет иметь место только в том случае, когда предыдущий полином с такою же степенью приводится к

$$\frac{N}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left[\left(\frac{x - a + \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^n + \left(\frac{x - a - \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^n \right],$$

а это предполагает, что между пределами $x = a - h$, $x = a + h$ значение $Y - y$ имеет вид

$$Y - y = \frac{N}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left[\left(\frac{x - a + \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^n + \left(\frac{x - a - \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^n \right] + Zh^n,$$

где Z — величина, делающаяся бесконечно малой одновременно с h .

Из этого значения $Y - y$ видно, что абсциссы точек пересечения рассматриваемых нами двух кривых даны уравнением

$$\frac{N}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left[\left(\frac{x - a + \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^n + \left(\frac{x - a - \sqrt{(x - a)^2 - h^2}}{2} \right)^n \right] + Zh^n = 0.$$

Если мы положим

$$\frac{x - a}{h} = \cos \varphi,$$

это уравнение обратится в

$$\cos n\varphi + \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 2^{n-1} Z}{N} = 0,$$

из которого, откидывая член $\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 2^{n-1} Z}{N}$, мы получаем

$$\cos n\varphi = 0,$$

что дает

$$\varphi = \frac{2m + 1}{2n} \pi,$$

где m — произвольное целое число.

Значение φ , которое мы нашли, откинув в нашем уравнении член $\frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot 2^{n-1} Z}{N}$, очевидно, точно до величин порядка Z , так как уравнение $\cos n\varphi = 0$ кратных корней не имеет. Из этого мы заключаем, что с точностью до величин порядка Zh искомые значения x определяются формулой

$$\frac{x-a}{h} = \cos \frac{2m+1}{2n} \pi,$$

и, следовательно,

$$x = a + h \cos \frac{2m+1}{2n} \pi.$$

Таково общее выражение, дающее нам с точностью до h включительно абсциссы n точек пересечения двух кривых для случая рассматриваемого нами *minimum'a*. Найденное выражение приводит к следующему, очень простому построению:

Из середины промежутка $x = a - h$, $x = a + h$, отложенного по оси абсцисс, описываем круг радиуса, равного половине этого промежутка; в этот круг вписываем правильный многоугольник с $2n$ сторонами, располагая его так, чтобы две из его сторон были перпендикулярны к оси x . Варианты этого многоугольника определяют, с точностью до величин порядка h включительно, абсциссы точек, в которых кривые должны пересечься, чтобы предел их уклонов в промежутке $x = a - h$, $x = a + h$ был наименьшим.

Если хотят, чтобы обе кривые проходили через те же точки на концах промежутка, внутри которого их хотят наиболее сблизить, имеет место то же построение (§ 9), с тою только разницею, что, вместо радиуса h следует взять радиус

$$\frac{h}{\cos \frac{\pi}{2n}}.$$

Таковы два результата, получаемые из наших формул относительно расположения точек, общих двум кривым в случае, когда хотят сделать наименьшим предел уклонов этих кривых в данном промежутке;

эти точки имеют большое значение во многих вопросах, встречающихся в практике.

В следующих параграфах мы покажем приложение выделенных нами формул к нахождению элементов параллелограмов, удовлетворяющих условиям, при выполнении которых точность хода этих механизмов — наибольшая *.

* Окончание этого мемуара П. Л. Чебышев не опубликовал. О результатах приложения способов, изложенных в этом мемуаре. П. Л. Чебышев позже сообщает в ряде своих работ, в том числе в статье „Об одном механизме“ (стр. 655—662 настоящего издания), где описан полученный им оригинальный механизм, дающий значительно лучшее приближение шатунной кривой к прямой линии, чем параллелограм Уатта. Настоящий мемуар опубликован под тем же заглавием отдельной брошюрой, в которой, кроме самого мемуара, помещены подробные комментарии В. Л. Гончарова, И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского, статья „Развитие приближенных методов синтеза механизмов по Чебышеву“ и библиографический материал; редактор-составитель Н. В. Еремеев, изд. АН СССР, М.—Л, 1949, стр. 80.— *Ред.*

О НЕКОТОРОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ КОЛЕНЧАТОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАМА УАТТА

(Перевод А. М. Тяпунова)

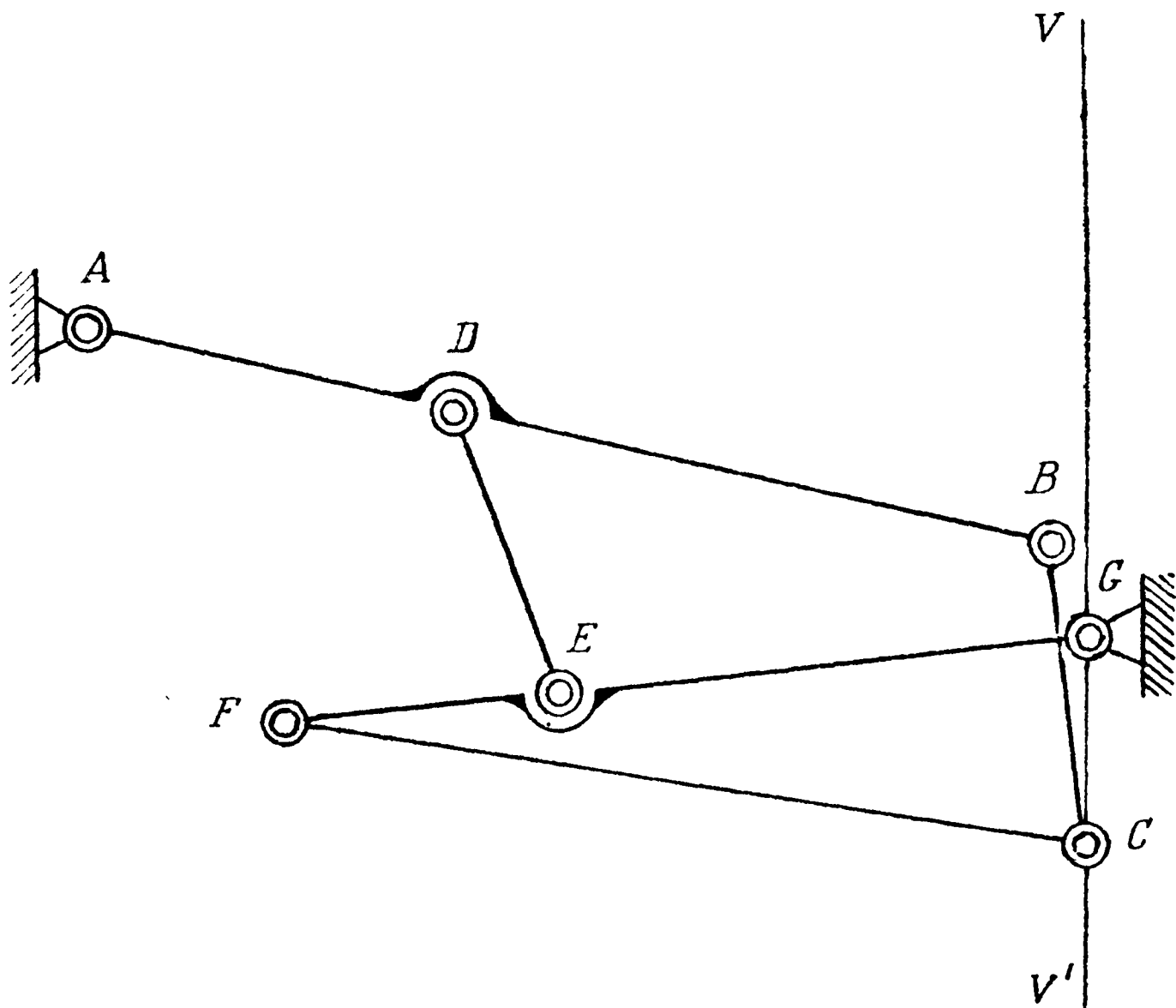
Механизм, известный под названием коленчатого параллелограмма Уатта*, представляет решение следующего в известных случаях важного для практики вопроса:

Посредством комбинации круговых движений произвести с достаточным приближением прямолинейное движение.

При всей полезности этого механизма для практики нельзя не признать, что в отношении точности хода и по своей сложности он оставляет еще желать многого. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что параллелограм Уатта производит то же движение, как *механизм с балансиром*, хотя в своем составе содержит двумя стержнями более, а в механизмах этого рода всякий новый элемент, очевидно, вносит новые средства для достижения большей точности хода. Желая воспроизвести прямолинейное движение с возможно большей точностью как при посредстве *механизма с балансиром*, так и при посредстве параллелограмма Уатта, мы достигаем овального движения, которое приближается к желаемому прямолинейному лишь настолько, что имеет с ним не более пяти общих элементов. Но такая степень приближения, без сомнения, далеко не достаточна для механизма столь сложного, как параллелограм Уатта, который состоит из четырех частей, находящихся при построении механизма в нашем распоряжении и доставляющих каждая два произвольных параметра: длину и направление. Принимая

* См. Комментарии, стр. 920 настоящего издания. — *Ред.*

в расчет, что произвольных параметров здесь 8, мы видим, что возможно попытаться построить механизм, который, при той же сложности, как и параллелограм Уатта, был бы способен доставлять движение, гораздо более близкое к искомому прямолинейному, и именно имеющее с ним не пять, а восемь общих элементов.

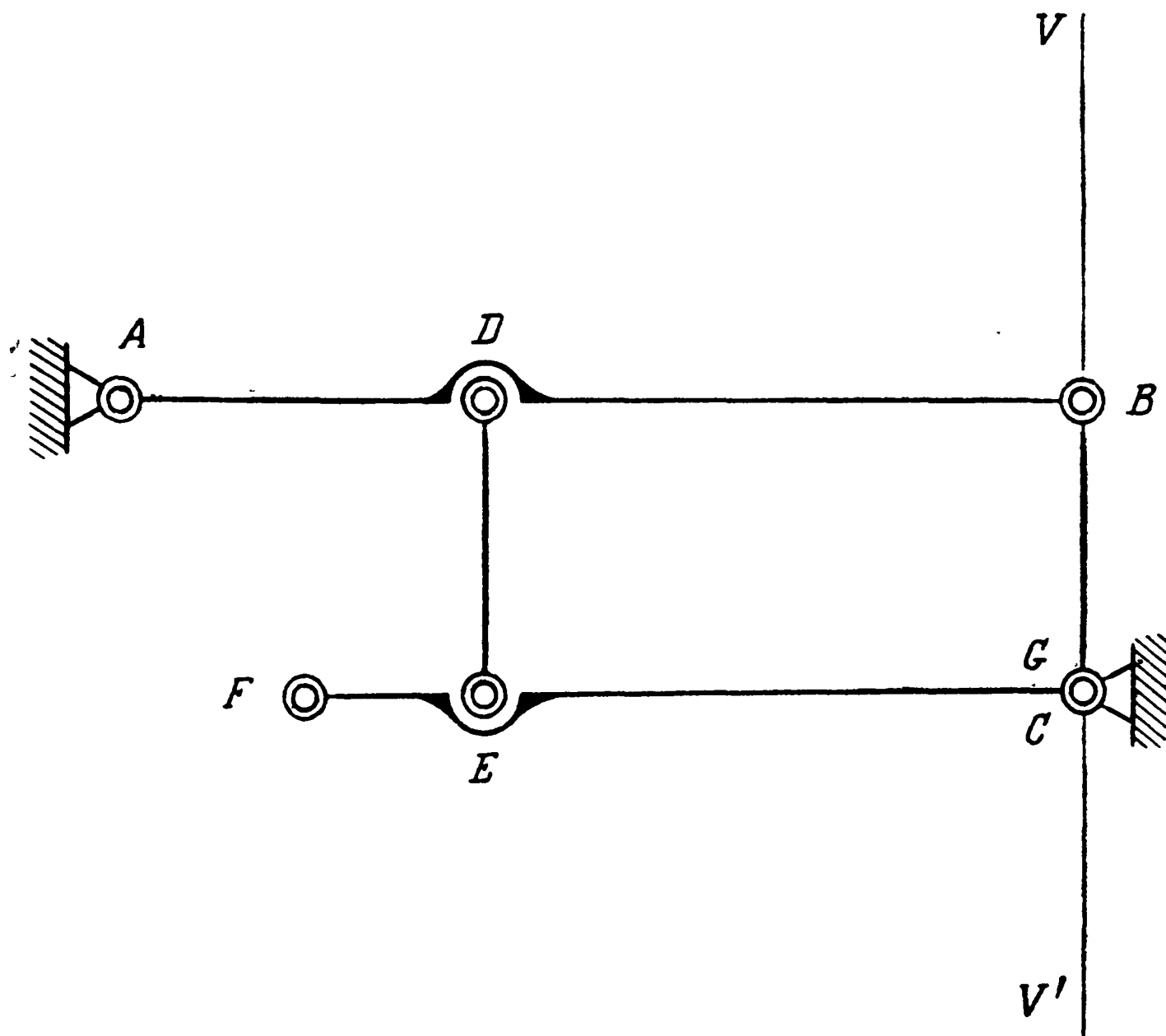


Фиг. 1.

Это мы и пытались сделать, и мы нашли, что такой механизм можно получить, сочленя четыре стержня параллелограмма Уатта между собою и с коромыслом следующим образом:

На этом чертеже (фиг. 1) AB представляет ту половину коромысла, на которой требуется построить механизм, производящий приблизительно прямолинейное движение по вертикали VV' , проходящей через конец B коромысла в его горизонтальном положении; BC , DE , CF , FG — четыре стержня, составляющие этот механизм, C — точка, доставляющая требуемое движение, G — неподвижная ось стержня FG , представляющего, как и в параллелограме Уатта, контрбалансир. Все эти стержни сочле-

нены с коромыслом и между собою таким же образом, как и в параллелограмме Уатта, с той только разницей, что стержни DE и FC не связаны более между собою, а соединены при помощи шарниров с контр-



Фиг. 2.

балансиrom FG в двух различных точках E и F . При построении этого механизма стержни CF и FG должны быть сделаны равными $\frac{\sqrt{5}+1}{4} AB$, а расстояния BD и EG равными $\frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$, вследствие чего линия BD представит среднюю пропорциональную между всей линией AB и ее частью AD , а линия EF будет половиной AD . Стержням BC и DE следует дать одинаковую длину, которая может быть выбрана правильно при том лишь условии, чтобы она не превосходила заметным образом половины хода точки C . Что касается точки G , центра вращения контрбалансира FG , то она должна быть помещена таким

образом, чтобы при горизонтальном положении коромысла стержни BC и DE были вертикальными, а стержни CF и FG принимали одно и то же горизонтальное направление, как это можно видеть на фиг. 2.

Таково устройство механизма, который при тех же составных частях, что и в параллелограмме Уатта, будет доставлять движение, приближающееся к прямолинейному настолько, что будет иметь с ним восемь общих элементов. В последнем легко убеждаемся, определяя расстояния точки C от вертикали VV' (фиг. 1) в функции угла наклона коромысла*, ибо при этом замечаем тотчас же, что кривая, описываемая точкою C , в точке, соответствующей горизонтальному положению коромысла, имеет касательную вертикаль VV' , с которою вблизи этой точки имеет 7 общих элементов, и что кривая эта пересекает ту же вертикаль в расстоянии от G , меньшем BC , что вводит еще один элемент, общий этим линиям на протяжении хода точки C .

Из этого видно также, до какой степени быстро убывают уклонения точки C от вертикали VV' (фиг. 1) по мере того, как уменьшается амплитуда качания коромысла, ибо эти расстояния по отношению к углу наклона коромысла суть 7-го порядка. Что касается до обыкновен-

* Эти расстояния, как нетрудно видеть, выражаются формулою

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} AB (\cos \psi - \cos \varphi),$$

где φ и ψ суть углы, определяемые в функции α , угла наклона коромысла, такими двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cos \varphi \right)^2 + \\ & + \left(\frac{BC}{AB} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sin \varphi \right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}, \\ & \left(1 - \cos \alpha + \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cos \varphi - \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cos \psi \right)^2 + \\ & + \left(\frac{BC}{AB} + \sin \alpha + \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \sin \varphi + \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \sin \psi \right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}. \end{aligned}$$

Отсюда для приближенного выражения этих расстояний получается следующий ряд:

$$= \frac{7 - 3\sqrt{5}}{32} \frac{AB^2}{BC} \alpha^7 + \frac{\sqrt{5} - 2}{16} \frac{AB^3}{BC^2} \alpha^8 + \dots$$

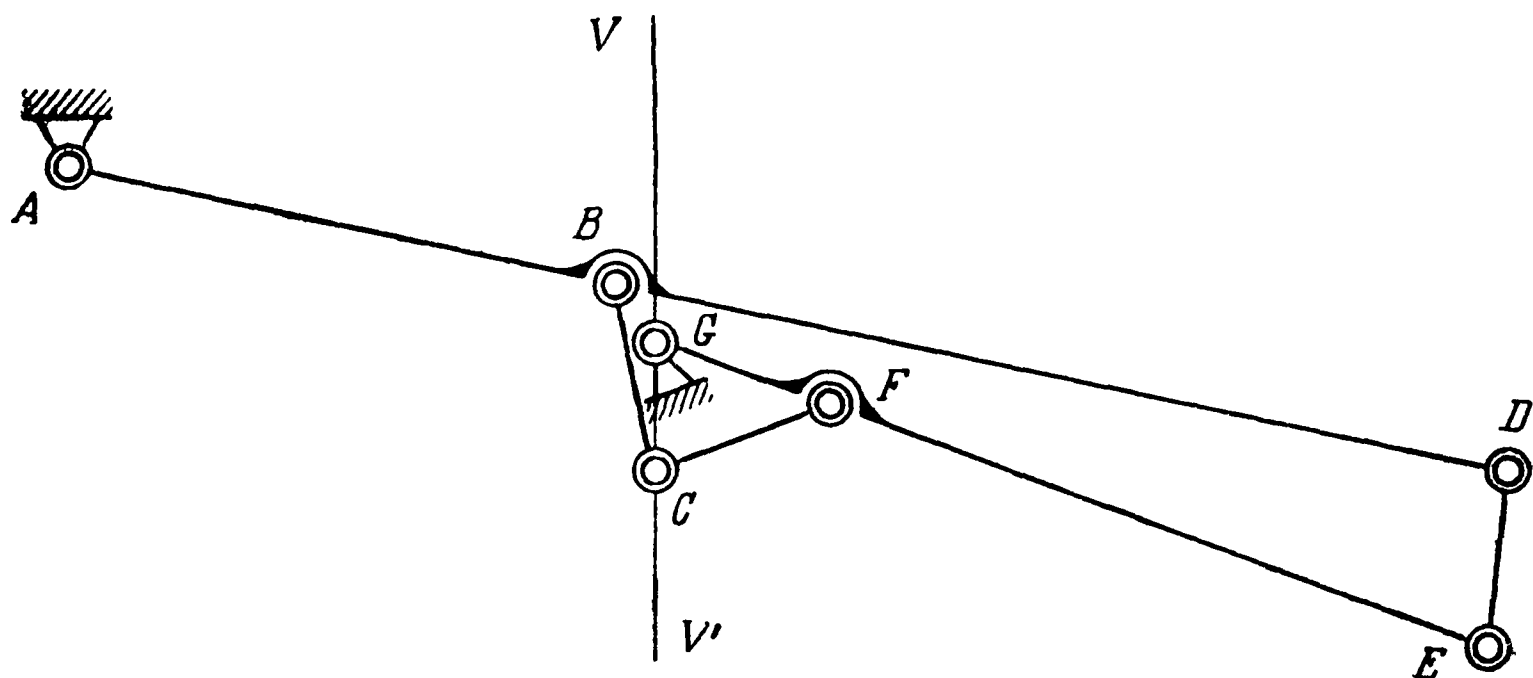
ных случаев практики, в которых наклонение коромысла никогда не достигает углов большой величины, то ход рассматриваемого механизма по своей точности значительно превышает ход параллелограма Уатта. Так, например, обращаясь к случаю, рассматриваемому Прони в его известной заметке „Sur le parallélogramme du balancier de la machine à feu” (Annales des Mines, tome XII), когда длина полукоромысла AB равна 2,515 м, длина стержня BC равна 10,762 м и предельный угол наклона коромысла равен $17^{\circ}35'30''$, мы находим, что механизм, о котором идет речь, при этих условиях давал бы лишь такие отклонения от вертикали, которые менее 0,05 мм. Параллелограм же Уатта, согласно Прони, дает в этом случае отклонения, достигающие до величины в 40 раз большей, а именно до 2 мм, что представляет величину отклонения, которою нельзя пренебрегать в ходе подобного механизма.

До сих пор, стараясь возможно более приблизиться к осуществлению вертикального движения, мы принимали в расчет только число элементов, общих вертикали и кривой, описываемой точкою C , между тем как сближение этих линий, а следовательно, и точность хода рассматриваемого механизма в значительной степени зависят от положения этих элементов. Этот вопрос был предметом наших изысканий в 1-й части мемуара под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов”*, где мы предложили способы делать такое сближение возможно более полным. Прилагая эти способы к нашему настоящему случаю, мы можем найти те небольшие изменения, которые нужно ввести в величины параметров механизма, чтобы сделать ход его возможно более точным. При посредстве этих поправок отклонения точки C от вертикальной линии могут быть уменьшены приблизительно в отношении 1 к 2^7 (§ 5 цитированного мемуара), а так как мы только что видели, что в обыкновенных случаях практики эти отклонения уже сами представляют величины весьма малые, именно сотые доли миллиметра, то ясно, что в этих случаях поправками элементов точность хода механизма может быть доведена до предела, недостижимого для технических средств изготовления механизмов. Поэтому для обыкновенных случаев практики нет никакого основания разыскивать

* Стр. 611—648 настоящего издания. — *Ред.*

новый механизм, который был бы способен доставлять прямолинейное движение с точностью еще более значительной. А так как, согласно тому, что сейчас было нами показано, эта степень точности достигается при посредстве механизма, составленного из тех же частей, что и ныне употребляемый параллелограмм Уатта, недостатки хода которого нередко чувствуются в практике, то должно признать, что наш измененный механизм заслуживает особенного внимания.

Заметим еще, что если в вышеприведенных величинах элементов этого механизма перед радикалом $\sqrt{5}$ изменим знак, то придем к такой новой форме механизма:



Фиг. 3.

где

$$GF = FG = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} AB,$$

$$BD = EG = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} AB.$$

Для этого нового вида степень точности хода механизма остается прежняя, но для его построения приходится продолжить коромысло за точку B на длину, равную

$$BD = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} AB,$$

что представляет значительные практические неудобства.

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ

В мемуаре под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“ *, мы показали, каким образом через последовательные приближения можно найти с желаемой степенью точности наивыгоднейшие размеры составных частей параллелограма Уатта и других механизмов того же рода, доставляющих движение, близкое к прямолинейному. Через разложение в ряды мы свели этот вопрос на определение целых функций, наиболее подходящих к нулю, и в мемуаре под заглавием „Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций“ **, мы рассмотрели определение под таким условием функций целых и дробных. Для приближенных решений этого достаточно, но для точного решения необходимо подвергнуть такому же анализу функции иррациональные, которые здесь представляются. Приложение к таким функциям общей теоремы, доказанной нами в последнем из выше упомянутых мемуаров касательно выражений, наиболее подходящих к нулю, интересно (во многих отношениях, и как один из результатов такого приложения мы теперь покажем устройство одного механизма, замечательного и по своей простоте и по точности, с которою он дает прямолинейное движение.

Этот механизм состоит из тех же частей, как и *сокращенный параллелограм Уатта* ***, так же сочлененных между собою; вся разница — в направлении рычагов, вращающихся около неподвижных осей: они идут в одну сторону и между собою перекрещиваются. Рычаги берутся одинаковой длины, и точка, доставляющая желаемое движение,

* Стр. 611—648 настоящего издания.— *Ред.*

** Стр. 462—578 настоящего издания.— *Ред.*

*** См. Комментарии, стр. 920 настоящего издания.— *Ред.*

находится на середине части, сочлененной помощью шарниров с концами рычагов. Прилагая вышеупомянутую теорему к функции, определяющей движение этой точки, находим, что движение ее наиболее подходит к прямолинейному, на протяжении более или менее значительном, при следующих условиях:

1) если расстояние между осями вращения рычагов составляет одну треть длины всех трех частей механизма, т. е. двух рычагов и части, сочлененной с ними;

2) если часть, сочлененная с концами рычагов, длиннее четверти каждого из рычагов. Чем ограниченнее то пространство, на котором

желают иметь движение, близкое к прямолинейному, тем длина этой части должна быть ближе к четверти длины рычагов и тем с большей точностью получается прямолинейное движение. Длина этой части определяется таким уравнением:

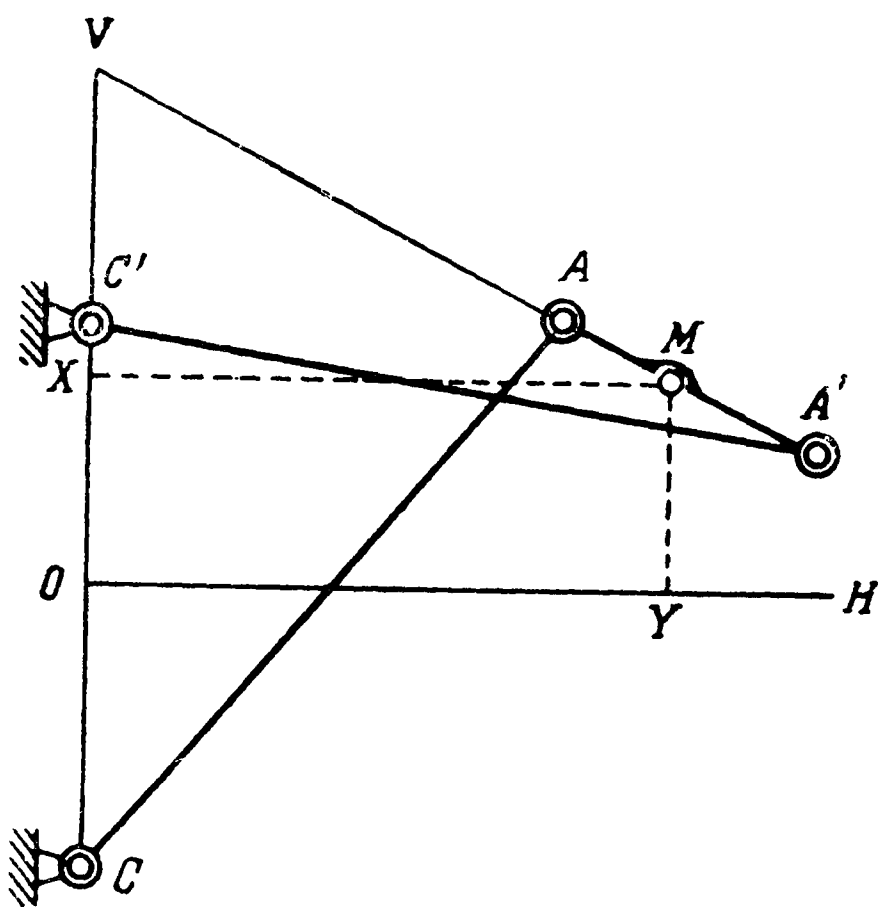
$$l^2 = \frac{(5 - 2a)(2a + 1)(4a - 1)}{(a + 2)^2},$$

где a — длина этой части, l — длина хорды той дуги, которую стараются сделать по возможности ближе к прямой линии. (За единицу принимается длина рычагов). Получаемая при этом дуга, как нетрудно убе-

диться, будет вся заключаться между двумя параллелями, отстоящими от осей вращения рычагов на расстояния, равные

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a)}, \quad \sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a) + \frac{(4a - 1)^3}{12(a + 2)^2}}.$$

В самом деле. Пусть будет (фиг. 1) $CAA'C'$ рассматриваемый механизм, где $AC = 1$, $A'C' = 1$ — рычаги, вращающиеся около осей CC' , $AA' = a$ — часть, сочлененная помощью шарниров с концами рычагов, и середина которой M дает желаемое движение. По сказанному нами,



Фиг. 1.

CC' , расстояние между осями вращения рычагов AC , $A'C'$, должно равняться

$$\frac{AC + A'C' + AA'}{3} = \frac{2+a}{3}.$$

Восставляя из середины линии CC_1 перпендикуляр OH и продолжая линии CC' , $A'A$ до пересечения их в точке V , мы для определения расстояния точки M от линий CV , OH из треугольника MXV , прямоугольника $MXOY$ и треугольников ACV , $A'C'V$ получаем такие уравнения:

$$MX = MV \cdot \sin OVM;$$

$$MY = OX = OV - MV \cdot \cos OVM;$$

$$AC^2 = (MV - AM)^2 + (OV + OC)^2 - 2(MV - AM)(OV + OC) \cos OVM;$$

$$A'C'^2 = (MV + A_1M)^2 + (OV - OC')^2 - 2(MV + A_1M)(OV - OC') \cos OVM.$$

Из этих уравнений, полагая

$$\sin \frac{OVM}{2} = S$$

и замечая, что по вышесказанному

$$AC = 1, \quad A'C' = 1,$$

$$AM = A'M = \frac{AA'}{2} = \frac{a}{2},$$

$$OC = OC' = \frac{CC_1}{2} = \frac{2+a}{6},$$

мы находим

$$1) \quad MX = a \sqrt{\frac{\left(\frac{4(1-a)}{3a} + S^2\right) \left(\frac{1+2a}{3a} - S^2\right)^2}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2}},$$

$$2) \quad MY = a \sqrt{\frac{\left(\frac{4(1-a)}{3a} + S^2\right) (1 - S^2) S^2}{\frac{(1+2a)}{3(2+a)a} - S^2}}.$$

Определяя по формуле (1) величину разностей

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a)$$

и

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2},$$

мы находим, что они представляются так:

$$\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{3a} \right)^2 S^2}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2},$$

$$\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a} \right)^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{(2+a)a} \right)}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2},$$

а потому произведение

$$\left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) \right] \left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2} \right]$$

равняется

$$\left[\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{3a} \right) \left(S^2 - \frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a} \right) S}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2} \right]^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{(2+a)a} \right).$$

Так как здесь квадрат

$$\left[\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{3a} \right) \left(S^2 - \frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a} \right) S}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2} \right]^2$$

при всех действительных величинах S имеет значение положительное, а множитель

$$S^2 - \frac{4a-1}{(2+a)a}$$

при $S^2 < \frac{4a-1}{(2+a)a}$ имеет значение отрицательное, то при изменении S^2 от 0 до $\frac{4a-1}{(2+a)a}$ произведение

$$\left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) \right] \left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2} \right]$$

будет оставаться отрицательным; а для этого множители

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}$$

должны иметь противоположные знаки и, следовательно, величина

$$MX^2$$

должна заключаться между величинами

$$\frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$

$$\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}.$$

Из этого видно, что от $S^2=0$ до $S^2=\frac{4a-1}{(2+a)a}$ расстояние точки M от линии CC_1 будет заключаться в пределах

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}},$$

и, следовательно, точка M не будет выходить из пространства, ограниченного линиями, параллельными линии CC_1 и отстоящими от нее на расстояния

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}}.$$

С другой стороны, по устройству механизма, нами рассматриваемого, точка M будет одинаково двигаться снизу и сверху линии $ОН$. Вследствие этого дуга, описываемая ею при изменении S^2 от 0 до $\frac{4a-1}{(2+a)a}$, будет одинаково расположена по ту и по другую сторону линии $ОН$, и хорда l , стягивающая такую дугу, будет равняться удвоенному расстоянию концов ее от линии $ОН$. Но по формуле (2),

делая в ней

$$S^2 = \frac{4a - 1}{(2 + a)a},$$

мы находим, что это расстояние выражается так:

$$MY = \sqrt{\frac{(5 - 2a)(1 + 2a)(4a - 1)}{4(2 + a)^2}}.$$

А потому

$$l = 2 \sqrt{\frac{(5 - 2a)(1 + 2a)(4a - 1)}{4(2 + a)^2}},$$

что по возведении в квадрат дает

$$l^2 = \frac{(5 - 2a)(1 + 2a)(4a - 1)}{(2 + a)^2}.$$

Так мы убеждаемся, что при l , удовлетворяющем этому уравнению, дуга, стягиваемая хордой l и которой середина находится на линии $ОН$, действительно вся заключается между двумя выше показанными параллелями.

Всякий раз, когда величина a незначительно разнится с $1/4$, эти параллели близки друг к другу, а потому и дуга, рассматриваемая нами, мало отличается от прямой линии. Но по мере удаления a от $1/4$, вышепоказанные параллели отодвигаются друг от друга и рассматриваемая нами дуга более и более изгибается. При a , превосходящем $0,546^*$ (что соответствует $l > 1,222$), эти изгибы до такой степени значительны, что рассматриваемая нами дуга в концах своих загибается к линии $ОН$, вследствие чего наибольшее удаление точек от линии $ОН$ имеет место не в концах дуги, а в некотором расстоянии от них.

Чтобы показать, до какой степени движение, доставляемое этим механизмом, близко подходит к прямолинейному на пространстве довольно значительном, мы приложим вышепоказанные формулы к случаю

$$l = 0,64,$$

* То есть корень уравнения $(a^2 - 6a + 2)(2a - 5)(2a + 1) - \frac{27}{4}(4a - 1) = 0$, которое получаем, приравнявая нулю производную MY^2 по S и полагая в ней $S^2 = \frac{4a - 1}{(2 + a)a}$.

как это имеет место в параллелограмме Уатта, которого действие исследовал Прони и нашел весьма удовлетворительным (*Annales des Mines*, tome XII).

Принимая $l = 0,64$ и решая при этой величине l уравнение

$$l^2 = \frac{(5 - 2a)(1 + 2a)(4a - 1)}{(2 + a)^2},$$

мы находим

$$a = 0,327.$$

Вставляя эту величину a в выражения

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a) + \frac{(4a - 1)^2}{12(2 + a)^2}},$$

определяющие расстояние параллелей от осей вращения рычагов, мы находим, что первое равняется

$$0,83428,$$

а второе

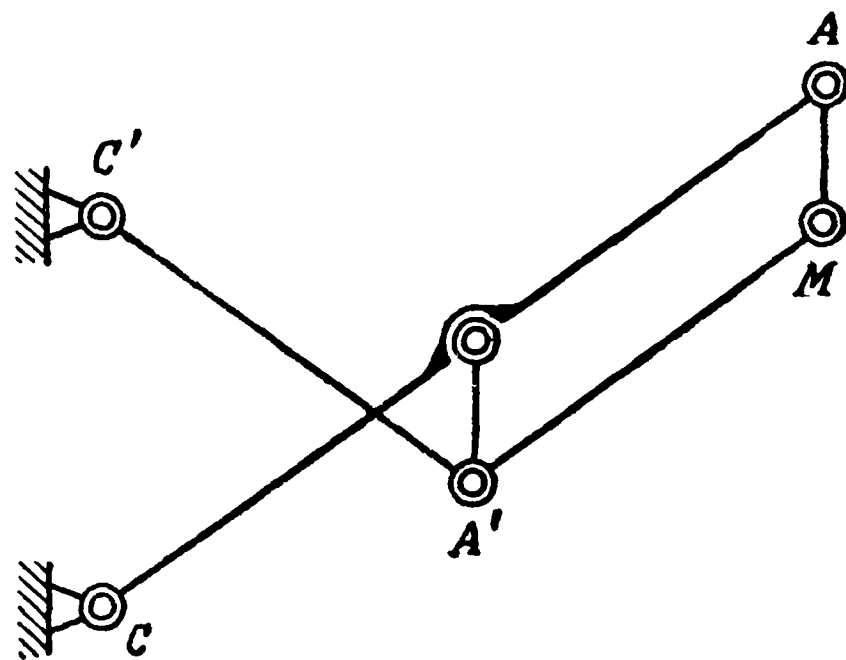
$$0,83457.$$

Следовательно, расстояние между параллелями будет

$$0,83457 - 0,83428 = 0,00029.$$

По вычислениям же Прони в паровой машине, где плечо коромысла имело 2,515 метра длины,

параллелограмм Уатта представлял уклонения, простиравшиеся до 0,002 метра или до 0,00079, если принять за единицу плечо коромысла. При действии же механизма, нами рассмотренного, эти уклонения, как сейчас нашли, будут простираться только до 0,00029, что не составляет и половины числа 0,00079.



Фиг. 2.

Заметим в заключение, что известное построение, служащее для перехода от сокращенного параллелограмма Уатта к полному*, прилагается без всякого изменения к механизму, нами рассмотренному, и через то получается полный параллелограм Уатта с отводным радиусом, направленным в противную сторону и пересекающимся с коромыслом. Такой параллелограмм представлен на фиг. 2, где точка M будет описывать дугу, которая, как видно из предыдущего, будет менее уклоняться от вертикальной линии, чем та, которая получается при обыкновенном расположении отводного радиуса $A'C'$. Но при таком изменении в устройстве параллелограмма Уатта линия, описываемая точкою M , как видно из чертежа, делает слишком острый угол с коромыслом AC , что составляет весьма важное неудобство.

* См. Комментарии, стр. 920 настоящего издания.— *Ред.*

О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ

(ПОСВЯЩАЕТСЯ ИМПЕРАТОРСКОМУ ТЕХНИЧЕСКОМУ УЧИЛИЩУ)

§ 1. На практике до сих пор употребляются только три различных параллелограмма: сокращенный и полный параллелограммы Уатта и параллелограмм, известный под названием механизма Эванса. Но подобных механизмов, доставляющих движение, подходящее в большей или меньшей степени к прямолинейному, можно составить много. В заседаниях Петербургской Академии Наук (1861 г. окт. 18-го*, 1868 г. окт. 8-го**) и Московского математического общества (1867 г. ноября 18-го) мы говорили об устройстве таких параллелограммов, которые своею точностью превосходят параллелограммы, ныне употребляемые. Теперь мы покажем, каким образом можно составлять различные параллелограммы, доставляющие прямолинейное движение с приближением, по желанию бóльшим. При этом мы увидим, что с тем же числом составляющих частей, как и полный параллелограмм Уатта, можно сделать такой параллелограмм, который даст прямолинейное движение с точностью до 13 степени, между тем как параллелограммы Уатта и механизм Эванса дают это движение с точностью не выше 5-й степени, в параллелограмах же, предложенных нами, эта степень меняется от 6 до 8. Такой параллелограмм, как мы увидим, имеет еще то преимущество, что он, сохраняя в действии свою точность, еще достаточную для практики, может своими частями заменять мотыль и шатун для преобразования попеременного прямолинейного

* „О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта“, стр. 649 — 654 настоящего издания.— *Ред.*

** „Об одном механизме“, стр. 655 — 662 настоящего издания.— *Ред.*

движения в непрерывное вращательное. Говоря о различных параллелограммах, мы будем иметь в виду только бесконечно малые движения, при которых степень точности параллелограммов особенно легко определяется; для перехода же от бесконечно малых движений к конечным нужно будет сделать некоторые изменения в размере их частей. Эти изменения вообще будут незначительны, если движение параллелограмма происходит в пределах довольно тесных, и тогда они могут быть вычислены помощью рядов по способу, показанному нами в ме-муаре „Теория механизмов, известных под названием параллелограммов“ *. Но последний из вышеупомянутых случаев, когда параллелограмм своими частями заменяет мотыль и кривошип, требует особенного приема, так как в этом случае, далеко отступающем от случая бесконечно малых движений, ряды не могут быть с пользою употреблены. Этим случаем мы особенно займемся и дадим все формулы, относящиеся до него.

§ 2. Механизмы, известные под именем параллелограммов, вообще могут быть рассматриваемы как системы прямых линий,двигающихся в одной плоскости и связанных между собою шарнирами, которые препятствуют точкам соединения линий скользить по ним, но не мешают изменяться углам, составленным этими линиями. Кроме того, некоторые из них прикреплены к некоторым точкам плоскости, так что эти линии могут только вращаться около точек прикрепления. Называя через m число линий, составляющих параллелограм, через n число шарниров, связывающих эти линии по две, и через v число точек прикрепления, мы замечаем, что на плоскости место каждой из m линий рассматриваемой системы определяется тремя величинами (за которые, например, можно взять две координаты одного из концов линии и наклонение ее к оси абсцисс). С другой стороны, каждый из n шарниров, связывающих две линии, и каждая из v точек прикрепления линии к плоскости дают по два уравнения между величинами, определяющими положение рассматриваемой нами системы (а именно: связь двух линий шарниром предполагает равенство координат двух точек, принадлежащих двум линиям: прикрепление линии одною из ее точек к плоскости предполагает данными координаты этой точки). Из

* Стр. 611—648 настоящего издания.— *Ред.*

этого видно, что в рассматриваемой нами системе место всех точек будет определяться $3m$ величинами, связанными между собою $2(n + v)$ уравнениями, и, следовательно, число независимых переменных представится разностью

$$3m - 2(n + v).$$

Но это число должно равняться 1 для того, чтобы точки рассматриваемой системы могли двигаться только по определенным траекториям, как это имеет место в параллелограмах; а потому

$$3m - 2(n + v) = 1. \quad (1)$$

С другой стороны, мы замечаем: 1) что рассматриваемая нами система не должна свободно двигаться в плоскости и 2) что все линии, ее составляющие, должны быть в связи между собою.

Первое предполагает необходимым существование точек прикрепления и, следовательно, неравенство $v > 0$.

Второе предполагает, что n , число шарниров, больше $m - 2$, так как $m - 2$ шарниров, очевидно, недостаточно для того, чтобы связать по две все m линий, составляющих систему. По уравнению же (1), при $n > m - 2$, находим

$$v < \frac{m + 3}{2}.$$

Из этого видно, что v , число шарниров, должно удовлетворять таким неравенствам:

$$v > 0, \quad v < \frac{m + 3}{2}. \quad (2)$$

§ 3. Принимая в уравнении $3m - 2(n + v) = 1$ числа m и $n + v$ за неизвестные и решая его, находим такие величины для m и $n + v$:

$$m = 1, \quad n + v = 1; \quad m = 3, \quad n + v = 4; \quad m = 5, \quad n + v = 7$$

и т. д.

Рассматривая первые значения m и $n + v$

$$m = 1, \quad n + v = 1,$$

мы замечаем, что, по (2), при $m=1$ должно быть

$$v > 0, \quad v < \frac{1+3}{2} = 2,$$

что предполагает $v=1$. Следовательно, в этом случае параллелограмм приводится к одной линии, вращающейся около одной из своих точек. При этом получается круговое движение, которое может заменить прямолинейное только с точностью до второй степени.

Переходя к следующим значениям m и $n+v$, имеем

$$m=3, \quad n+v=4.$$

А, по (2), при $m=3$ находим

$$v > 0, \quad v < \frac{3+3}{2} = 3,$$

что предполагает для v одну из таких величин:

$$v=1, \quad v=2.$$

По равенству же

$$n+v=4,$$

этим величинам v будут соответствовать такие величины n :

$$n=3, \quad n=2.$$

Итак, при $m=3$ будет или

$$v=1, \quad n=3,$$

или

$$v=2, \quad n=2.$$

В первом случае рассматриваемая нами система представляет линию, вращающуюся около одной из своих точек и связанную с двумя другими помощью трех шарниров, или, что одно и то же, треугольник, вращающийся около точки, лежащей на одной из его сторон. При этом все точки могут двигаться только по кругам, и, следовательно, могут дать прямолинейное движение только с точностью до 2-й степени.

Во втором случае, когда

$$m=3, \quad v=2, \quad n=2,$$

рассматриваемая нами система представляет две линии, вращающиеся около двух неподвижных точек и связанные с третьей помощью двух шарниров. Это простейшая система параллелограмов, которые могут дать прямолинейное движение с точностью выше второй степени; таковы суть: *сокращенный параллелограм Уатта*, *механизм Эванса* и *параллелограм*, предложенный нами в прошлом году*. Первые два параллелограмма дают прямолинейное движение с точностью до 5-й степени, последний — до 6-й степени.

В третьей системе значений m и $n + v$ имеем

$$m=5, \quad n + v=7,$$

и, по (2), при $m=5$ находим

$$v > 0, \quad v < \frac{5+3}{2} = 4,$$

откуда ясно, что v , число точек вращения линий, может иметь только такие значения:

$$v=1, \quad v=2, \quad v=3.$$

По равенству же

$$n + v = 7$$

находим, что этим величинам v будут соответствовать такие величины числа n :

$$n=6, \quad n=5, \quad n=4.$$

Первые величины v и n

$$v=1, \quad n=6$$

соответствуют тому случаю, когда 5 линий связаны 6 шарнирами и вращаются около точки, лежащей на одной из них. При этом линии составляют неизменную систему и все точки их могут описывать только круги.

* См. „Об одном механизме“, стр. 655—662 настоящего издания.—Ред.

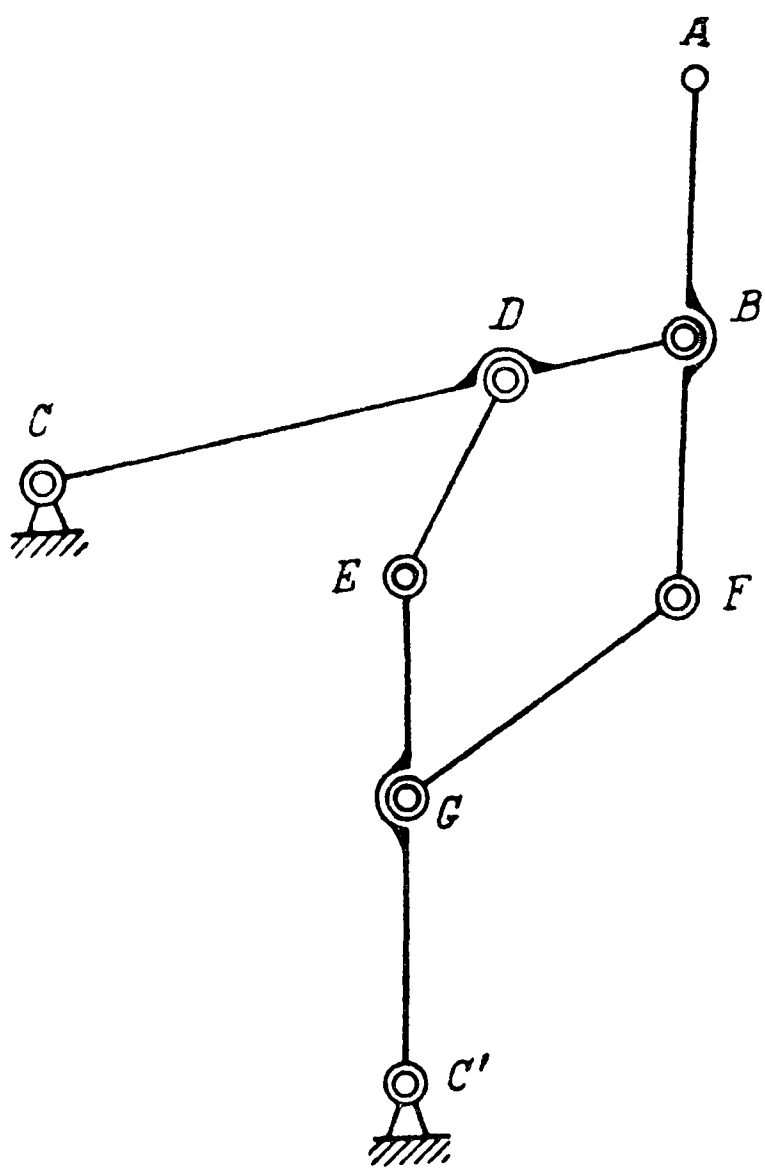
При

$$v = 2, \quad n = 5$$

получаются параллелограммы, составленные из двух вращающихся около неподвижных точек линий, сочлененных с тремя другими помощью пяти шарниров; таковы суть: *полный параллелограмм Уатта* и *параллелограмм*, предложенный нами под названием *измененного параллелограма Уатта**.

Первый из этих параллелограммов дает прямолинейное движение с точностью до 5-й степени; второй — до 7-й.

При том же сочленении составных частей, как и в параллелограме Уатта, но при другом направлении их получается параллелограмм, упоминаемый нами в конце нашей статьи, под заглавием „Об одном механизме“**. При надлежащем размере составных частей такой параллелограмм дает прямолинейное движение с точностью до 6-й степени. Сочленение же частей такое, как в *измененном параллелограме Уатта*, но с другим направлением, дает параллелограмм, изображенный на фиг. 1. Такой параллелограмм, как нетрудно показать, может дать прямолинейное движение с



Фиг. 1.

точностью до 6-й степени, и для этого размеры его частей должны быть определены следующим образом.

Если длину линии BC , вращающейся около точки C , примем за единицу и положим $GF = f$, $BF = h$ (длина этих линий произвольна), то все остальные части параллелограма и точка A на линии AF , доставляющая желаемое движение, найдутся по формулам

* Стр. 649—654 настоящего издания.— *Ред.*

** Стр. 655—662 настоящего издания.— *Ред.*

$$ED = \frac{(1-f)f^2}{1-2f^2}, \quad CD = \frac{(1-f)(1-f^2)}{1-2f^2},$$

$$EC' = \frac{(1-f)^2(1+f)}{1-f-f^2}h, \quad GC' = \frac{f^3}{1-f-f^2}h,$$

$$AB = \frac{f}{1-f-f^2}h^*.$$

Место точки C' , около которой вращается линия $C'E$, выбирается так, что в среднем положении параллелограмма линия DE идет по линии CD и пятиугольник $FDBFG$ обращается в прямоугольник.

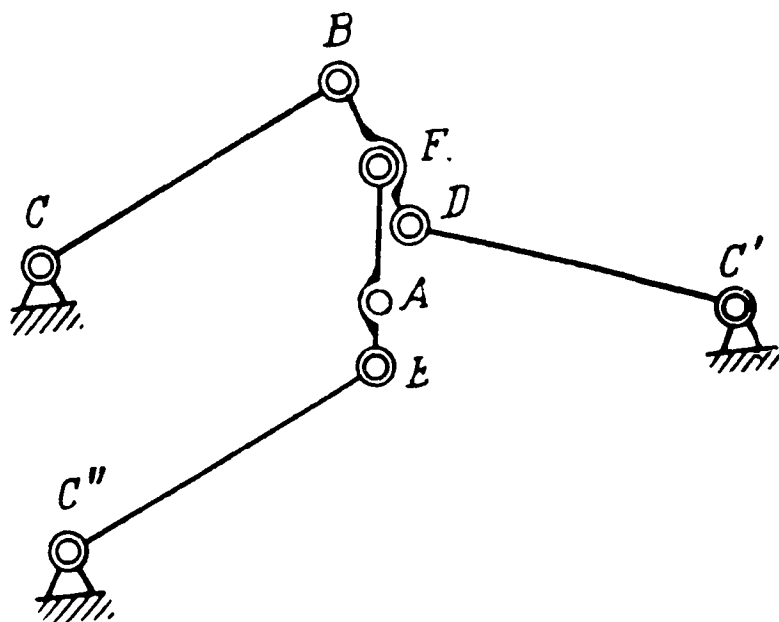
§ 4. Переходим теперь к последним величинам v , n , возможным при $m=5$.

Эти величины суть

$$v=3, \quad n=4,$$

и они, как увидим, дают параллелограммы, особенно замечательные по точности их действия. Так как $v=3$, то в этих параллелограммах линий, вращающихся около неподвижных точек, будет 3, и они все должны быть в связи между собою при помощи остальных линий, которых всего 2; а это возможно только в том случае, когда по крайней мере одна из двух связывающих линий будет непосредственно сочленена с двумя линиями, вращающимися около неподвижных точек: эти-то две линии, вращающиеся около неподвижных точек, вместе с линией, их связывающею, мы, для сокращения терминологии, будем называть *первою частью* параллелограмма; другую же линию, вращающуюся около неподвижной точки, и линию, связывающую ее с прочими, будем называть *второю частью* параллелограмма.

Параллелограмм, о котором мы говорили в заседании Московского математического общества 1867 года, 18-го ноября, принадлежит к разряду таких параллелограммов. В нем *первая часть* представляет



Фиг. 2.

* См. Комментарии, стр. 921 настоящего издания.—Ред.

собой *сокращенный* параллелограм Уатта; *вторая же часть* делается так, что в среднем положении параллелограмма все три вращающиеся около неподвижных точек линии параллельны между собою, и обе линии, связывающие их, сливаются в одну, перпендикулярную к ним. Такой параллелограм (фиг. 2), как вычисления показывают, дает прямолинейное движение с точностью до 8 степени, если в размере его частей выполнены следующие условия:

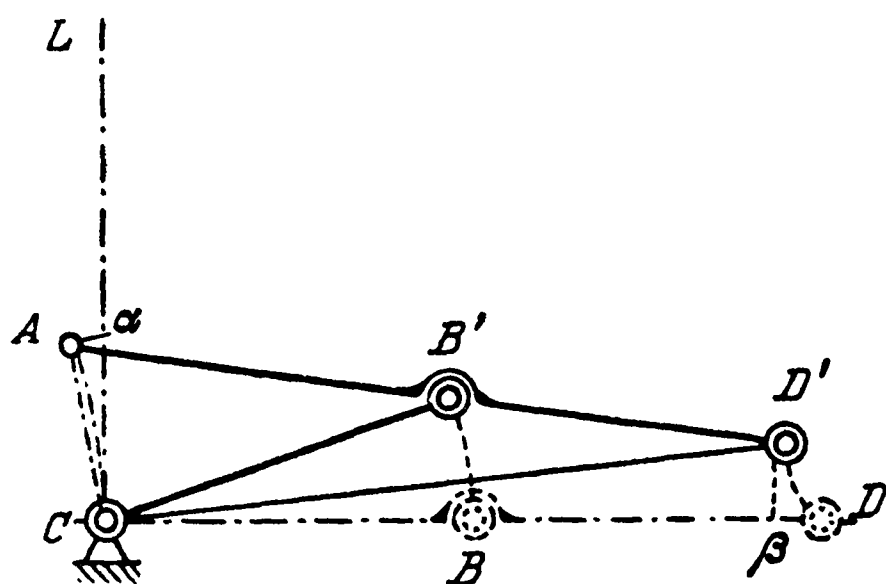
1) Все три линии BC , $C'D$, $C''E$, вращающиеся около неподвижных точек C , C' , C'' , должны быть равны.

2) Расстояния точки A , доставляющей желаемое движение, от концов F , E линии FE должны иметь такие величины:

$$AF = \frac{BF^2 - DF^2}{4FD},$$

$$AE = \frac{(BF - DF)^2}{4FD}.$$

§ 5. Параллелограмов рассматриваемого нами вида можно составить много, изменяя вид *первой части* и давая различные направления



Фиг. 3.

линиям, составляющим *вторую часть*. Чтобы параллелограммы, таким образом составленные, давали прямолинейное движение с желаемой степенью точности, их части должны удовлетворять некоторым уравнениям, которые легко найти в каждом частном случае. Но эти уравнения оказываются довольно сложными, и число их возрастает вместе со степенью точности

параллелограмма, а потому решение их представляет трудности непреодолимые, когда имеются в виду параллелограммы, отличающиеся особенною точностью их действия. Затруднение это в составлении таких параллелограмов не имеет места, если во *второй части* параллелограмма линия, вращающаяся около неподвижной точки, и линия, связывающая ее с остальной частью параллелограмма, выполняют такие условия:

1) Вторая линия вдвое длиннее первой и сочленена с нею своею серединою.

2) Один конец второй линии доставляет желаемое движение, а другой конец сочленен с остальной частью параллелограмма.

3) В среднем положении параллелограмма конец второй линии, доставляющий желаемое движение, совпадает с точкою, около которой вращается первая линия.

При выполнении этих условий *второй частью* параллелограмма он, как нетрудно убедиться, дает прямолинейное движение с точностью до $2\lambda + 1$ степени, если первая часть его доставляет такое движение с точностью до λ степени, и направление этого движения одинаково с направлением линий *второй части* параллелограмма при среднем его положении.

В самом деле, пусть будут (фиг. 3) CB , CD и CB' , AD' два положения линий, составляющих вторую часть параллелограмма: одно — соответствующее среднему положению параллелограмма, когда точка A , доставляющая желаемое движение, совпадает с точкой C , около которой вращается линия CB' , другое — когда точка A прошла бесконечно малую дугу CA , а точка D , направляемая в своем движении первою частью параллелограмма, прошла бесконечно малую дугу DD' . По вышесказанному линия CD будет касательной к дуге DD' , так как эта линия представляет направление движения точки D .

Соединяем точки A и C , C и D' прямыми AC , CD' , восставляем из точки C перпендикуляр CL к линии CD и из точек A , D' опускаем перпендикуляры $A\alpha$, $D'\beta$ на линии CL , CD .

По положению имеем

$$AD' = CD = 2CB', \quad AB' = B'D',$$

откуда видно, что угол ACD' прямой, а так как по построению угол LCD тоже прямой, то углы $AC\alpha$, $D'CD$ равны и, следовательно, прямоугольные треугольники $AC\alpha$, $D'CD$ подобны. Из подобия же треугольников имеем

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{\beta D'}{CD},$$

что дает нам для определения величины $A\alpha$ отклонения точки A от прямой CL

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'} \beta D';$$

из прямоугольного же треугольника $CD'\beta$ имеем

$$CD'^2 = C\beta^2 + \beta D'^2;$$

а так как

$$C\beta = CD - \beta D$$

и

$$CD = AD',$$

то это дает нам

$$CD'^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2.$$

Замечая же из прямоугольного треугольника ACD' , что

$$CD'^2 = AD'^2 - AC^2,$$

мы из этого равенства выводим

$$AD'^2 - AC^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2,$$

что по раскрытии скобки и сокращении дает

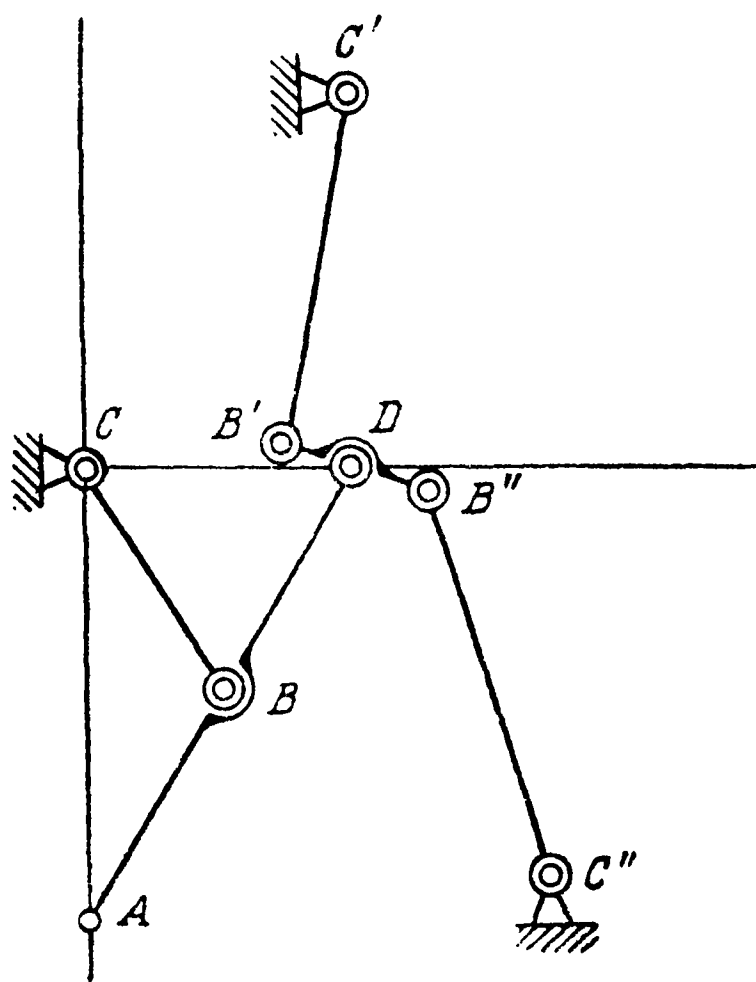
$$-AC^2 = -2AD' \cdot \beta D + \beta D^2 + \beta D'^2.$$

В этом равенстве AD' величина конечная, величины же AC , βD , $\beta D'$ бесконечно малые и порядок бесконечно малой $\beta D'$ выше порядка бесконечно малой βD , так как линия CD — касательная к дуге DD' , вследствие чего это равенство предполагает, что βD есть бесконечно малая относительно AC второго порядка. Но, по положению, $\beta D'$ должна быть относительно βD бесконечно малой порядка λ , так как дуга DD' , описываемая точкой D , представляет прямую CD с точностью до λ степени. Следовательно, линия $\beta D'$ относительно линии AC будет бесконечно малой порядка 2λ , а это по вышенайденному равенству

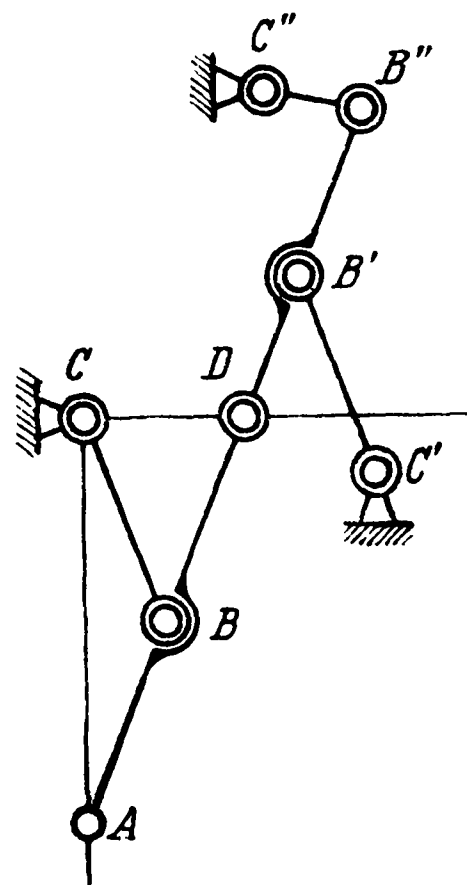
$$A\alpha = \frac{AC}{CD'} \beta D'$$

предполагает, что $A\alpha$, уклонение точки A от прямой линии LC , будет относительно AC бесконечно малой порядка $2\lambda + 1$.

§ 6. На основании доказанного нами очень просто можно составлять параллелограммы более точные из параллелограммов менее точных, прибавляя к последним систему двух линий, о которой мы сейчас говорили. Так, от *сокращенного* параллелограмма Уатта, доставляющего прямолинейное движение с точностью до 5 степени, мы переходим к параллелограмму, изображенному на фиг. 4, который при выполнении



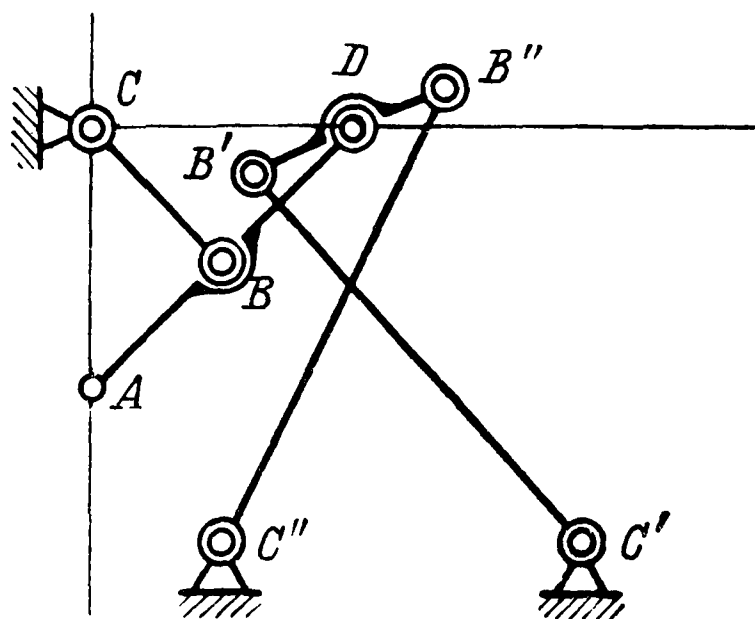
Фиг. 4.



Фиг. 5.

условий, показанных в § 5, будет давать прямолинейное движение с точностью до 11 степени. Этот параллелограмм состоит из трех линий BC , $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около неподвижных точек C , C' , C'' и двух линий $B'B''$, AD , сочлененных с первыми помощью трех шарниров B , B' , B'' ; желаемое движение доставляет конец A линии AD . Точно так же от механизма Эванса, доставляющего прямолинейное движение с точностью до 5 степени, мы переходим к параллелограмму, показанному на фиг. 5, который может дать прямолинейное движение с точностью тоже до 11 степени. Этот параллелограмм состоит из тех же

частей, как и предыдущий; вся разница в положении неподвижных точек C' , C'' , около которых вращаются линии $B'C'$, $B''C''$, и шарнира D сочленяющего линии AD и $B'B''$. В § 3 мы видели, что из тех же частей, как и сокращенный параллелограмм Уатта и механизм Эванса, составляется параллелограм, которого точность простирается до 6 сте-



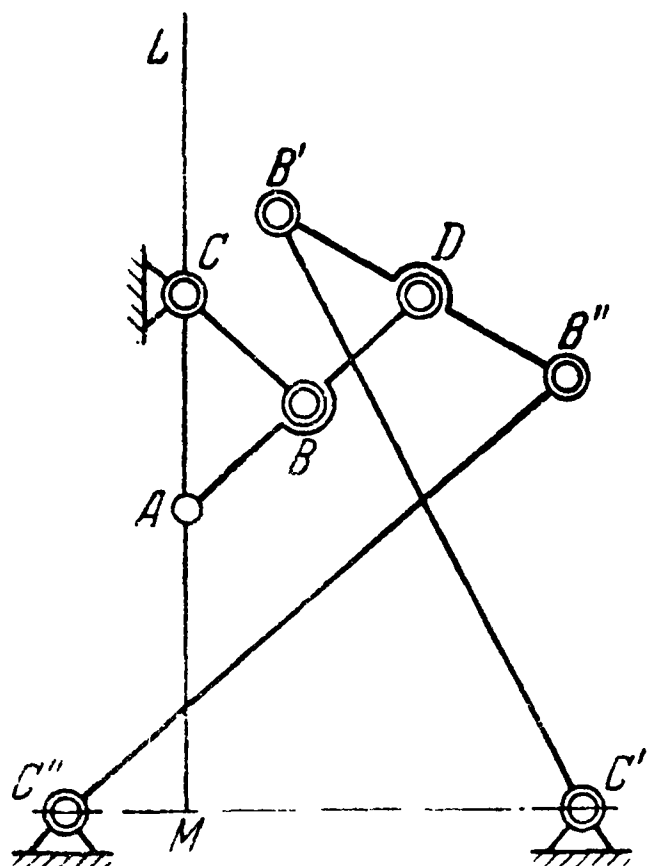
Фиг. 6.

пени. Прибавляя к такому параллелограму две линии, удовлетворяющие условиям, показанным в предыдущем параграфе, мы получим параллелограм, который даст прямолинейное движение с точностью до 13 степени. Параллелограм, таким образом получаемый, представлен на фиг. 6. Он также состоит из пяти линий: трех BC , $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около неподвижных точек C , C' , C'' , и двух $B'B''$, AD , сочлененных с первыми помощью трех шарниров B , B' , B'' . Свободный конец линии AD доставляет желаемое движение. Этот параллелограм отличается с первым из выше показанных только положением точек C' , C'' , около которых вращаются линии $B'C'$, $B''C''$.

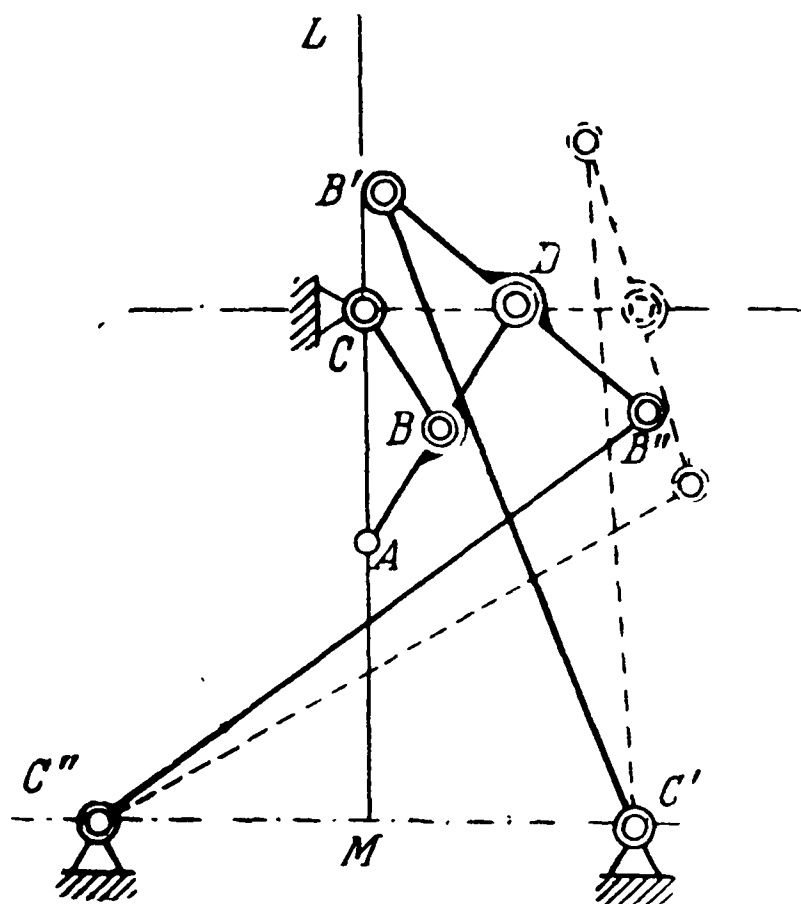
Так как этот параллелограм дает прямолинейное движение с точностью до 13 степени, то, по § 5, прибавляя к нему еще две линии, мы можем получить параллелограм, который будет действовать с точностью до 27 степени; прибавляя же еще две линии, мы увеличим степень точности до 55 и т. д. Но считая вполне достаточной для практики точность до 13 степени, мы остановимся на последнем из вышепоказанных параллелограммов и не будем говорить о параллелограмах более сложных.

§ 7. Доставляя прямолинейное движение верно до степени столь высокой, рассматриваемый нами параллелограм может дать с точностью, достаточной для практики, прямую линию значительной длины сравнительно с размерами его частей. Оставляя линии AB , BC той же длины и увеличивая длину пути точки A кверху и к низу от точки C (фиг. 7), мы дойдем до того, что линия BC будет совершать полу-

оборот по правую сторону линии LM , проходящей через точку C и перпендикулярной к линии $C'C''$. Если же при этом мы перенесем точки $C'C''$ с их места и поместим их симметрично по обе стороны линии LM (фиг. 8), то все положения параллелограмма будут симметричны около линии LM . А потому движению точки A между крайними пределами, о которых сейчас говорили, будет одинаково соответствовать и полуоборот линии BC по правую сторону линии LM и полуоборот линии BC по левую сторону LM . Следовательно, при



Фиг. 7.



Фиг. 8.

таком расположении точек C' , C'' , около которых вращаются линии $B'C'$, $B''C''$, полный оборот линии BC около точки C будет соответствовать движению точки A от одного крайнего предела до другого и возврату ее на прежнее место. При той значительной степени точности, которую обладают параллелограммы рассматриваемого вида, оказывается возможным сделать достаточно близкою к прямой линии всю дугу, проходимую точкой A при полном обороте линии BC около точки C . Этого мы достигаем, как показывают вычисления, давая составным частям параллелограмма размеры, определяемые таким образом.

За единицу принимаем длину линий $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около точек C' , C'' ; длина линии $B'B'' = a$, сочлененной с этими линиями,

и $C'C'' = b$, расстояние точек C' , C'' , выразятся так:

$$a = \frac{1}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}, \quad (3)$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}, \quad (4)$$

где σ есть sinus-versus угла наклона линии $B'B''$ к линии $C'C''$ в крайнем положении параллелограмма; линии CB , AB , BD и AD определяются равенством

$$BC = AB = BD = \frac{AD}{2} = \frac{1}{4} l, \quad (5)$$

где l — длина хода точки A , которую найдем по формуле

$$l = a \sqrt{\frac{(\mu + \sigma)\sigma(2 - \sigma)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - \sigma}}, \quad (6)$$

полагая

$$\lambda = \frac{b}{a},$$

$$\mu = \frac{4 - (a + b)^2}{2ab}. \quad (7)$$

Точка D , в которой линия $B'B''$ сочленена с линией AD , берется на середине линии $B'B''$; а место точки C , около которой вращается линия BC , выбирается так, что в среднем положении параллелограмма, когда линия $B'B''$ параллельна линии $C'C''$, точка D совпадает с точкой C .

§ 8. Нетрудно показать, что при таком устройстве рассматриваемого нами параллелограмма отклонения точки A от прямой линии LM во время полного оборота линии BC около точки C не будут превосходить предела

$$\frac{\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

где M есть наибольшая величина, которой достигают дроби

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s)^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) (2 - s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu (\mu + s) \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right)^2 (2 - s)}$$

между $s=0$ и $s=\sigma$.

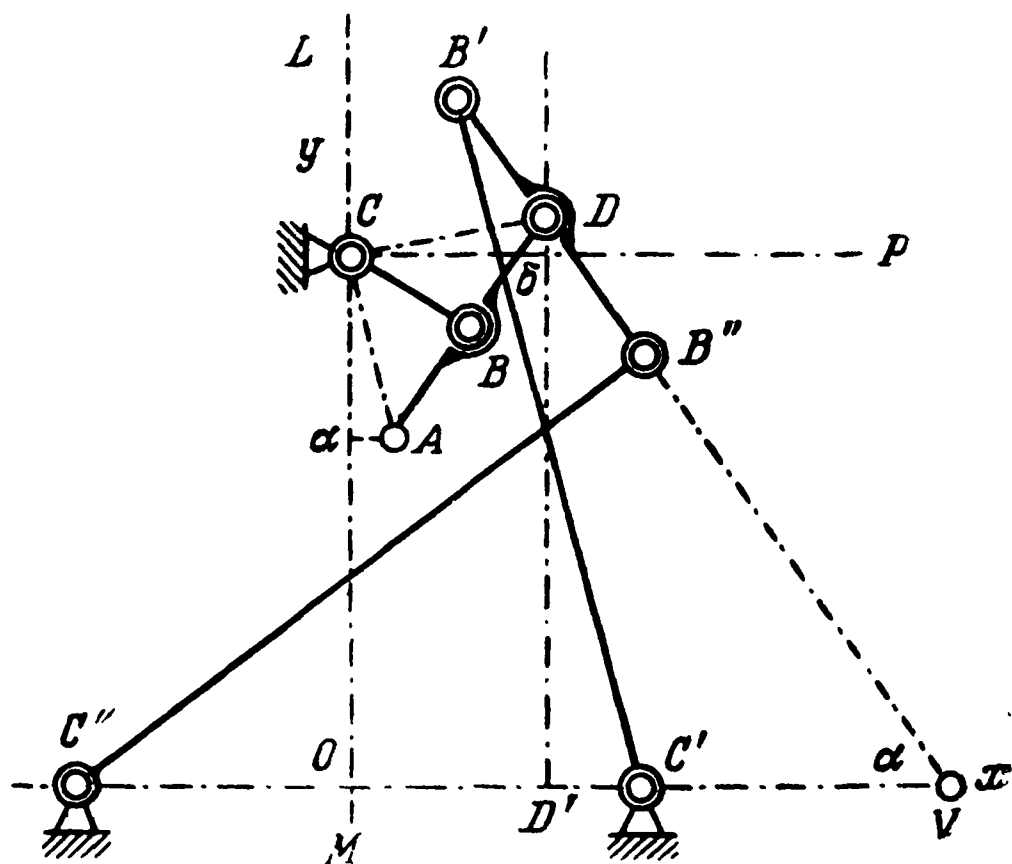
Чтобы показать это, мы сначала найдем формулы, определяющие место точки D (фиг. 9) при различных наклонениях линий $B'B''$ к $C'C''$.

Для этого принимаем линию $C'C''$ за ось абсцисс, линию LM за ось ординат; точка O , пересечение этих линий, будет начало координат, и так как по вышесказанному точки C' , C'' расположены симметрично около линии LM , то

$$C'O = C''O$$

и, следовательно,

$$C'O = C''O = \frac{1}{2} C'C'' = \frac{1}{2} b.$$



Фиг. 9.

Продолжая линию $B'B''$ до пересечения ее с осью абсцисс в точке V , мы замечаем, что координаты точки D по длине линий DV и OV и углу $B'VC'' = \alpha$ выразятся так:

$$x = OV - DV \cos \alpha, \quad y = DV \sin \alpha.$$

С другой стороны, мы замечаем, что

$$\begin{aligned} B'V &= DV + DB', & B''V &= DV - DB'', \\ C'V &= OV - OC', & C''V &= OV + OC'', \end{aligned}$$

откуда по равенствам

$$DB' = DB'' = \frac{1}{2} B'B'' = \frac{a}{2},$$

$$OC' = \frac{b}{2}, \quad OC'' = \frac{b}{2}$$

выводим

$$B'V = DV + \frac{a}{2}, \quad B''V = DV - \frac{a}{2};$$

$$C'V = OV - \frac{b}{2}, \quad C''V = OV + \frac{b}{2};$$

и так как длина линий $B'C'$, $B''C''$ принята нами за единицу, то из треугольников $C'B'V$, $C''B''V$ имеем

$$1 = \left(DV + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV - \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV + \frac{a}{2}\right)\left(OV - \frac{b}{2}\right)\cos\alpha,$$

$$1 = \left(DV - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV - \frac{a}{2}\right)\left(OV + \frac{b}{2}\right)\cos\alpha.$$

Решая эти уравнения относительно величин DV и OV и полагая для сокращения

$$1 - \cos\alpha = s, \quad \frac{b}{a} = \lambda,$$

$$\frac{4 - (a + b)^2}{2ab} = \mu,$$

находим

$$DV = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)s(2 - s)}},$$

$$OV = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - \lambda s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)s(2 - s)}}.$$

Внося эти величины DV и OV в вышепоказанные выражения координат x , y точки D и замечая, что равенство

$$1 - \cos\alpha = s$$

дает

$$\cos\alpha = 1 - s, \quad \sin\alpha = \sqrt{s(2 - s)},$$

получаем

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(\mu + s)s(2 - s)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$y = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Так выражаются координаты точки D по sinus-versus угла наклона линии $B'B''$ к линии $C'C''$.

§ 9. Приступая к определению отклонений точки A от прямой LM , опускаем из точки A перпендикуляр $A\alpha$ на линию LM ; длина этого перпендикуляра представит отклонение точки A от линии LM . Для определения этой длины опускаем из точки D перпендикуляр DD' на ось абсцисс, а из точки C восставляем перпендикуляр CP к оси ординат; линии $C\delta$, DD' будут координаты точки D , а потому на основании выведенных нами в § 8 выражений x и y имеем

$$C\delta = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(\mu + s)s(2 - s)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$DD' = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Делая в последнем из этих выражений нулем величину $s = 1 - \cos \alpha$ и замечая, что это соответствует тому случаю, когда линия $B'B''$ параллельна линии $C'C''$, причем, по § 7, точка D совпадает с точкою C , находим для определения линии OC такую формулу:

$$OC = \frac{a}{2} (\lambda + 1) \sqrt{\frac{\mu}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda}}} = \frac{a}{2} \sqrt{2\lambda\mu}.$$

С другой стороны, соединяя точки C и D прямою CD , а точки A и C прямою AC , замечаем, что по равенству линий (§ 7)

$$BC = AB = BD,$$

угол ACD прямой, а так как угол $\alpha C\delta$, по построению, тоже прямой, то прямоугольные треугольники $AC\alpha$, $DC\delta$ подобны и, следовательно,

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{D\delta}{CD},$$

что дает нам

$$A\alpha = D\delta \frac{AC}{CD}. \quad (8)$$

Но $D\delta = DD' - D'\delta$ и $D'\delta = CO$, откуда, по внесении вышенайденных величин CO , DD' , получаем

$$D\delta = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\frac{\mu + s}{(\lambda + 1)^2} - s}{2s}} - \frac{a}{2} \sqrt{2\lambda\mu},$$

или, что одно и то же,

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} - \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Умножая здесь числитель и знаменатель на сумму

$$(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)},$$

находим

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s) - \mu [(\lambda + 1)^2 - 2\lambda s]}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s} [(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}]},$$

что, по раскрытии скобок в числителе, приводится к следующему:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 + (\mu - 2\lambda - 2)s^2 + ((\lambda + 1)^2 - 2\mu)s}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s} [(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}]}.$$

Внося же в выражения вспомогательных величин λ и μ

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \mu = \frac{4 - (a + b)^2}{2ab},$$

значения a и b , по § 7, находим, что они через σ выражаются так:

$$\lambda = 1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2},$$

$$\mu = 4 - \sigma + 2\sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2};$$

а потому

$$\left. \begin{aligned} \mu - 2\lambda - 2 &= -\sigma, \\ (\lambda + 1)^2 - 2\mu &= \frac{3}{16}\sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и вышенайденное выражение $D\delta$ приводится к такому виду:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16}\sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s[(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s + 1} - \mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)]}}.$$

Переходя ко второму множителю

$$\frac{AC}{CD}$$

выражения $A\alpha$ по формуле (8), мы замечаем, что AC как катет прямоугольного треугольника ACD равен

$$\sqrt{AD^2 - CD^2},$$

а потому

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{AD^2 - CD^2}}{CD} = \sqrt{\frac{AD^2}{CD^2} - 1}.$$

Но по § 7

$$AD = \frac{1}{2} l,$$

по построению же

$$CD > C\delta,$$

где

$$C\delta = OD' = x,$$

вследствие чего находим

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 l^2}{x^2} - 1},$$

откуда, по внесении величины x , полученной в § 8, имеем

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{l^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right)}{a^2 (\mu + s) s (2 - s)} - 1},$$

что иначе можно написать так:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{\frac{l^2}{a^2} \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) - s (\mu + s) (2 - s)}}{\sqrt{s (\mu + s) (2 - s)}}.$$

Но по уравнению (6), определяющему величину хода l , выражение

$$\frac{l^2}{a^2} \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) - s (\mu + s) (2 - s)$$

обращается в нуль при $s = \sigma$, что предполагает делимость этого выражения на $s - \sigma$. Раскрывая скобки в этом выражении и деля его на $s - \sigma$, мы находим частное

$$s^2 + (\mu + \sigma - 2) s + (\mu + \sigma - 2) \sigma - \frac{l^2}{a^2} - 2\mu,$$

где, по (9),

$$\mu + \sigma - 2 = 2\lambda,$$

вследствие чего это выражение может быть заменено таким произведением двух множителей:

$$(\sigma - s) \left(2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2 \right),$$

а потому вышепоказанное неравенство приводится к такому виду:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma - s) \left(2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2 \right)}}{\sqrt{s (\mu + s) (2 - s)}}.$$

§ 10. Мы видели (§ 9), что $A\alpha$, отклонение точки A от прямой линии LM , равняется произведению

$$D\delta \frac{AC}{CD},$$

где

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16} \sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s[(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)]]}}$$

и

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma - s)\left(2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2\right)}}{\sqrt{s(\mu + s)(2 - s)}},$$

откуда видно, что $A\alpha$ будет меньше произведения этих двух выражений, а это произведение может быть разложено на два таких множителя:

$$\frac{\left(s^2 - \sigma s + \frac{3}{16} \sigma^2\right) \sqrt{s(\sigma - s)}}{(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}},$$

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)(2 - s)}}.$$

Останавливаясь на первом из этих множителей, мы замечаем, что выражение

$$\left(s^2 - \sigma s + \frac{3}{16} \sigma^2\right) \sqrt{s(\sigma - s)}$$

по возведении в квадрат дает

$$- \left[s^6 - 3\sigma s^5 + \frac{27}{8} \sigma^2 s^4 - \frac{14}{8} \sigma^3 s^3 + \frac{105}{256} \sigma^4 s^2 - \frac{9}{256} \sigma^5 s \right],$$

где полином, стоящий в скобках, равняется квадрату полинома

$$s^3 - \frac{3}{2} \sigma s^2 + \frac{9}{16} \sigma^2 s - \frac{1}{32} \sigma^3$$

без

$$\frac{\sigma^6}{32^2},$$

а потому это выражение может быть представлено в таком виде:

$$\sqrt{\frac{\sigma^6}{32^2} - \left(s^2 - \frac{3}{2} \sigma s^2 + \frac{9}{16} \sigma^2 s - \frac{1}{32} \sigma^3 \right)^2},$$

откуда видно, что числовые значения этого выражения не будут превосходить предела

$$\sqrt{\frac{\sigma^6}{32^2}} = \frac{\sigma^3}{32}.$$

С другой стороны, мы замечаем, что в этом множителе знаменатель

$$(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}$$

будет больше удвоенной величины наименьшего из двух членов

$$(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}, \quad \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)},$$

его составляющих, и, следовательно, будет больше наименьшей из двух величин

$$2(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}, \quad 2\sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}.$$

А так как в этом множителе, по замеченному выше, числитель не превосходит предела

$$\frac{\sigma^3}{32},$$

то этот множитель будет меньше наибольшей из двух таких дробей:

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}} = \frac{\sigma^3}{64(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}},$$

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2\sqrt{\mu [(\lambda + 1)^2 - 2\lambda s]}} = \frac{\sigma^3}{64\sqrt{\mu [(\lambda + 1)^2 - 2\lambda s]}},$$

вследствие чего произведение этого множителя на второй множитель

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu+s)(2-s)}}$$

будет меньше наибольшего из таких произведений:

$$\frac{\sigma^3}{64(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu+s)(2-s)}},$$

$$\frac{\sigma^3}{64\sqrt{\mu((\lambda+1)^2 - 2\lambda s)}} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu+s)(2-s)}},$$

которые приводятся к следующим:

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda+1-s)^2 \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right) (\mu+s)^2 (2-s)}},$$

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)^2 (\mu+s)(2-s)}}.$$

А так как для s возможны только значения от $s=0$ до $s=\sigma$, то наибольшая из этих двух величин не будет превосходить предела

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

где M означает наибольшую величину, которой достигают выражения

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda+1-s)^2 \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right) (\mu+s)^2 (2-s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)^2 (\mu+s)(2-s)}$$

от $s=0$ до $s=\sigma$, и, следовательно, это будет предел значений $A\alpha$, отклонений точки A от прямой линии LM , что и нужно было показать.

§ 11. Чтобы дать пример употребления выведенных нами формул, а вместе с тем и показать, сколь значительна степень точности, с которою рассмотренный нами параллелограмм дает прямолинейное движение, мы возьмем

$$\sigma = 1.$$

Делая в формулах (3), (4), определяющих a и b ,

$$\sigma = 1,$$

находим

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{335}{64} + 7\sqrt{\frac{35}{64}}}} = 0,30992,$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{\frac{35}{16}}}{\sqrt{\frac{335}{64} + 7\sqrt{\frac{35}{64}}}} = 0,76831.$$

Вставляя эти величины a и b в выражения (7), определяющие значение вспомогательных количеств λ , μ , находим

$$\lambda = \frac{0,76831}{0,30992} = 2,47902,$$

$$\mu = \frac{4 - (0,30992 + 0,76831)^2}{2 \cdot 0,30992 \cdot 0,76031} = 5,95804.$$

При этих величинах λ , μ , a и $\sigma=1$ формула (6), определяющая длину хода l , дает

$$l = 0,30992 \sqrt{\frac{(5,95804 + 1) \cdot 1 \cdot (2 - 1)}{\frac{(2,47902 + 1)^2}{2 \cdot 2,47902} - 1}} = 0,68099.$$

По величине l равенства (5) нам дают

$$BC = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$AB = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$BD = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$AD = \frac{0,68099}{2} = 0,34049.$$

Таковы должны быть размеры различных частей показанного нами параллелограмма, если за величину σ принимаем единицу.

Уклонения от прямолинейного движения в таком параллелограмме, по § 8, будут меньше

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

где M есть наибольшая величина, которой достигают дроби

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s)^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) (2 - s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu (\mu + s) \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right)^2 (2 - s)}$$

между $s=0$ и $s=\sigma=1$.

Внося в выражение этих дробей величины σ , a , λ , μ , l и ограничиваясь двумя десятичными знаками, находим, что они равны

$$\frac{11,79 - 4,96s - s^2}{(3,48 - s)^2 (5,96 + s)^2 (2,44 - s) (2 - s)},$$

$$\frac{11,79 - 4,96s - s^2}{29,54 (5,96 + s) (2,44 - s)^2 (2 - s)}.$$

Эти же дроби, как нетрудно заметить, идут постоянно возрастают от $s=0$, до $s=1$; а поэтому в этих пределах наибольшие их величины будут при $s=1$. Делая

$$s=1,$$

мы находим, что первая дробь приводится к 0,0136, а вторая к 0,0137. Последняя величина, как бóльшая, и будет наибольшею величиною

до которой достигают такие дроби между $s=0$ и $s=1$, и, следовательно, по нашему знакоположению,

$$M=0,0137.$$

Внося эту величину M и величины σ , a в формулу

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

находим, что отклонения от прямолинейного движения в рассмотренном нами случае будут меньше

$$\frac{0,30992 \cdot 1^3}{128} \sqrt{0,0137} = 0,000283,$$

что не составляет и 0,00042 длины хода $l=0,68099$, между тем как в параллелограме Уатта, бывшем предметом исследований Прони (Annales des Mines, tome XII), эти отклонения превосходят 0,00060, длины хода*.

Из этого видно, что такой параллелограм, доставляя непосредственно преобразование попеременного прямолинейного движения в постоянное круговое, может заменить собою в паровых машинах и параллелограммы, ныне употребляемые, и мотыль** с шатуном. Заметим в заключение, что при этом отношение скоростей оказывается таким, какое может дать мотыль только при длине бесконечно большой.

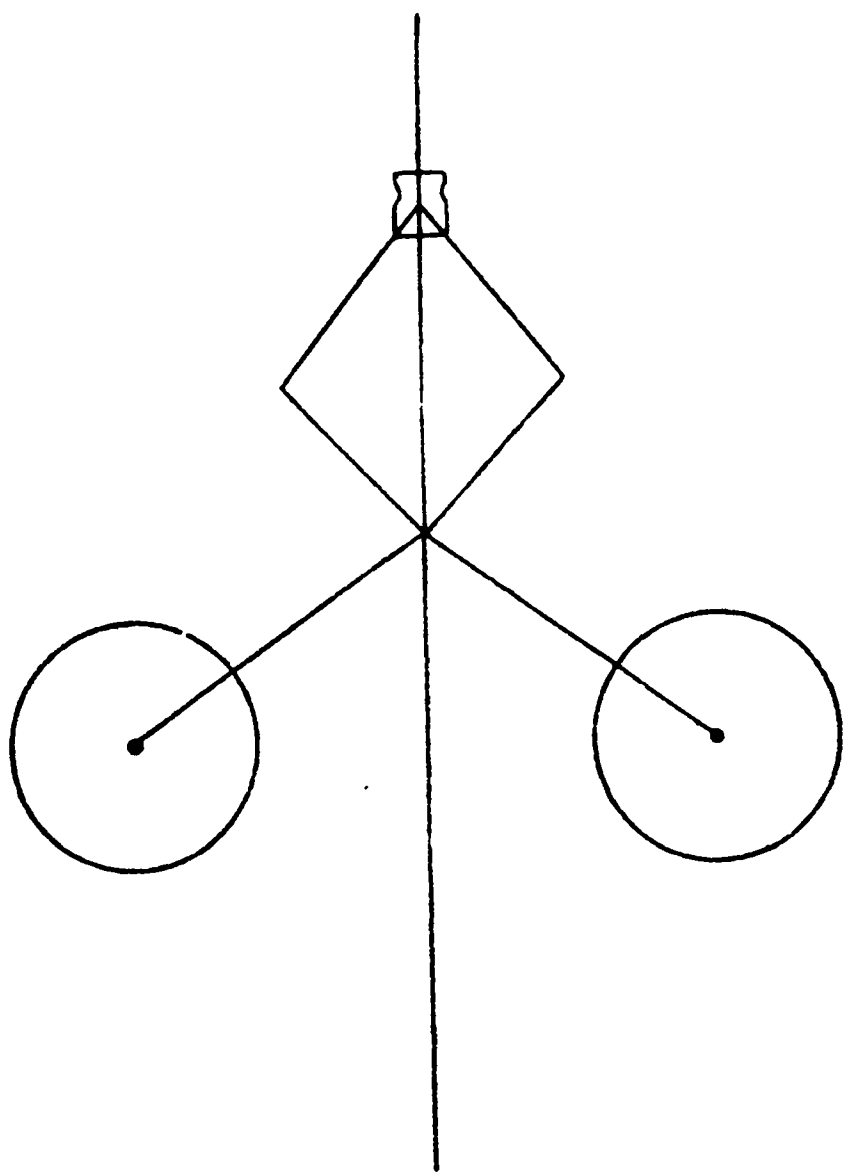
* С уменьшением σ , предел этих отклонений быстро уменьшается. Так, при $\sigma = \frac{4}{5}$, когда $a=0,29533$, $b=0,76415$, $l=0,59676$, этот предел меньше 0,00014, а при $\sigma = \frac{2}{3}$, когда $a=0,28648$, $b=0,76175$, $l=0,53716$, этот предел меньше 0,00007.

** Термин „мотыль“, употребленный здесь П. Л. Чебышевым, равнозначен термину „кривошип“.— *Ред.*

О ЦЕНТРОБЕЖНОМ УРАВНИТЕЛЕ

§ 1. В настоящее время известно несколько центробежных уравнивателей, которых скорость вращения остается одна и та же при всех возможных положениях подвижной муфты. Но такого рода изохронизм, весьма важный для практики, достигается только введением новых частей в состав центробежного уравнивателя Уатта, через что этот механизм лишается своей первоначальной простоты. Средство наиболее простое для сообщения уравнителю изохронизма бесспорно представляет *пружина*, как ее употребил Фуко в своем уравнителе; но при этом для полного изохронизма необходимо, чтобы действие пружины неизменно и вполне точно следовало одному определенному закону, чего на практике нельзя достигнуть. Что касается устройства изохронических уравнивателей без помощи пружины, то по сложности их они оказываются неудобоприменимыми на практике. Если же невозможно достигнуть вполне изохронизма, оставляя центробежный уравниватель Уатта в его первоначальном составе, то, с другой стороны, легко заметить, что степень отклонения его от изохронических уравнивателей зависит от размера и расположения его частей; а потому, прежде чем решаться на усложнение его с целью сообщить ему изохронизм (которого на практике во всяком случае можно достигнуть только отчасти), необходимо определить наибольшую степень приближения к изохронизму, которая возможна для центробежного уравнивателя в его простейшем составе. Такого рода исследования относительно центробежного уравнивателя приводят к вопросу математического анализа, подобному тому, который представляется при определении наилучшего устройства *параллелограмма Уатта*, и решение этого вопроса, как мы увидим, показывает, что центробежный уравниватель

Уатта, при надлежащих размерах его частей и расположении их, так близко подходит к изохроническому, что нет надобности усложнять этот механизм с целью достигнуть изохронизма. Степень приближения к изохронизму, которая оказывается возможною для уравнителя Уатта, едва ли не превосходит ту, которой можно ожидать на практике при выполнении уравнителей совершенно изохронических.



Фиг. 1.

§ 2. Рассматривая центробежный уравнитель Уатта (фиг. 1), мы будем предполагать, что стержни, снабженные шарами, продолжены за точки их прикрепления к оси уравнителя и концами своими сочленены с ручками, поддерживающими подвижную муфту, как это часто делается на практике. Но, не ограничиваясь частным случаем стержней прямых, мы будем предполагать, что они в точках прикрепления их к оси уравнителя перегнуты и образуют некоторый угол ϕ . Часть стержня от точки сочленения с ручками до точки прикрепления его к оси уравнителя, для сокращения

терминологии, мы будем называть *первою частью* стержня и длину ее примем за *единицу*. Другую часть стержня — от точки прикрепления к оси уравнителя до центра шара — мы будем называть *второю частью* стержня и длину ее будем изображать через r . Угловую скорость вращения мы будем вообще изображать через ω , а нормальную величину этой скорости через ω_0 , угол наклонения первой части стержня к оси уравнителя при нормальной скорости вращения ω_0 мы будем изображать через φ ; а тот же угол при какой-нибудь скорости ω через $\varphi + \alpha$, так что α будет представлять изменение этого угла при отклонении скорости вращения от ее нормальной величины ω_0 .

Определяя по началу *возможных перемещений* условие равновесия силы тяжести, постоянно действующей на муфту и шары, и силы центробежной, которая происходит при вращении со скоростью ω , мы находим такое уравнение:

$$P \left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) = 2r \left[1 + \frac{\omega^2}{g} r \cos(\psi - \varphi - \alpha) \right] \sin(\psi - \varphi - \alpha),$$

где m — длина ручек, за единицу веса принят вес шара, а P есть вес муфты.

Решая это уравнение относительно ω^2 , находим

$$\omega^2 = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) P - 2r \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{2 \frac{r^2}{g} \sin(\psi - \varphi - \alpha) \cdot \cos(\psi - \varphi - \alpha)},$$

что по разделении на ω_0^2 может быть представлено под видом

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - \frac{2r}{P} \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{\frac{\omega_0^2 r^2}{Pg} \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)},$$

или

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)},$$

полагая

$$\frac{2r}{P} = A, \quad \frac{\omega_0^2 r^2}{Pg} = B. \quad (1)$$

Так как по нашему обозначению величина

$$\alpha = 0$$

соответствует

$$\omega = \omega_0,$$

то функция

$$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}}\right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} \quad (2)$$

при $\alpha = 0$ должна равняться 1.

Полный изохронизм уравнивателя, как видели, предполагает, что угловая скорость ω при всех возможных положениях муфты и, следовательно, при всех возможных величинах угла α , определяющего ее положение, остается равною одной и той же величине ω_0 , для чего функция (2) должна приводиться к единице. Но если эта функция ни при каких значениях постоянных

$$A, B, m, \psi, \varphi,$$

в нее входящих, не делается тождественною единице, то, с другой стороны, надлежащим выбором этих величин уклонения ее от 1 при значениях α , представляющихся на практике, могут быть доведены до размеров весьма малых и, следовательно, центробежный уравнитель, в котором A, B, m, φ, ψ имеют такие величины, будет очень близко подходить к изохроническому.

§ 3. При определении параметров, с которыми данная функция наименее уклоняется от какой-либо постоянной величины при всех значениях переменной, заключающихся в известных пределах, необходимо различать два случая: 1) случай, когда эти пределы бесконечно близки между собою, и 2) случай когда эти пределы разнятся между собою конечною величиною, более или менее значительною. Величины параметров, получаемые в первом случае, как показано было в мемуаре нашем под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“*, представляют первое приближение для определения их во втором случае, приближение, по которому более точные величины этих параметров легко отыскиваются по способу, показанному в упомянутом нами мемуаре.

Останавливаясь на первом случае, когда пределы α бесконечно близки между собою, мы замечаем, что в этом случае степень приближения

* Стр. 611—648 настоящего издания.— *Ред.*

выражения

$$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}}\right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)}$$

к 1 определяется низшею степенью α в разложении разности

$$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}}\right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} - 1$$

по восходящим степеням α .

Разлагая эту разность в ряд по степеням α и приравнивая нулю коэффициенты при

$$\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4,$$

мы находим пять уравнений, которые должны быть удовлетворены для того, чтобы низшая степень α в этом разложении доходила до 5, что составляет высшую степень приближения выражения (2) к единице, так как пятью уравнениями, получаемыми при этом, вполне определяются все пять параметров, входящих в него.

Решая уравнения, таким образом получаемые, мы нашли, что они удовлетворяются при следующих величинах A, B, m, ψ, φ :

$$A = 0,84713,$$

$$B = 0,65616,$$

$$m = 1,31271,$$

$$\psi = 119^\circ 10',$$

$$\varphi = 58^\circ 46'.$$

Внося эти величины в формулу (2), мы получаем выражение, которое, отличаясь от единицы только членами 5-й и высших степеней при α незначительном (как это бывает на практике) мало разнится с единицею. Так, вычисляя значение этого выражения при различных величинах α , мы находим, что разность его с единицею достигает до 0,001 только при $\alpha = 14^\circ 40'$ и понижается до $-0,001$ только при $\alpha = -13^\circ 50'$. С уменьшением же числовой величины α эта разность уменьшается очень быстро, а именно: почти как пятая степень α .

С другой стороны, вычисляя высоту муфты при

$$\alpha = 14^\circ 40', \quad \alpha = -13^\circ 50' *,$$

находим, что при переходе α от $14^\circ 40'$ до $-13^\circ 50'$ муфта поднимается на 0,62 первой части стержня, принятой нами за единицу длины. При уменьшении же предельных величин α высота подъема муфты, как показывают вычисления, уменьшается почти пропорционально первой степени α . Из этого видно, что, давая различным частям центробежного уравнивателя Уатта такие размеры и расположение, при которых отношение $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ приводится к вышенайденному выражению, мы сделаем

его очень близко подходящим к изохроническому, а именно: по вышепоказанному при всех положениях муфты на длине, равной 0,62, отношение $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ не будет выходить из пределов $1 \pm \frac{1}{1000}$, $1 - \frac{1}{1000}$ и, следовательно, разность $\omega - \omega_0$ будет заключаться между $\pm \frac{\omega_0}{2000}$ и $-\frac{\omega_0}{2000}$.

С уменьшением же длины хода муфты на 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 его первоначальной величины пределы разности $\omega - \omega_0$ уменьшатся пропорционально

$$0,9^5; 0,8^5; 0,7^5; 0,6^5$$

и вследствие этого приведутся к таким величинам:

$$\pm 0,00029\omega_0; \pm 0,00016\omega_0; \pm 0,00008\omega_0; \pm 0,00004\omega_0.$$

§ 4. Сколь ни малы эти пределы уклонений угловой скорости ω от ее нормальной величины ω_0 , эти пределы могут быть еще уменьшены, и очень значительно. Эти пределы уклонений, как мы видели, получаются в том случае, когда при определении параметров, входящих в функцию (2), предполагают переменную α бесконечно малою. Переходя от случая, когда α остается бесконечно малою величиною, к случаю, когда α удаляется от 0 на конечные, но незначительные величины, мы по приемам, показанным в вышеупомянутом мемуаре, эти пределы можем уменьшить в $2^4 = 16$ раз. Так как приближение, доставляемое

* По формуле $\cos(\varphi + \alpha) = \sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}$.

вышенайденными величинами A, B, m, ψ, φ , совершенно достаточно для практики, мы не будем останавливаться на определении их величин, доставляющих большее приближение. Заметим только, что при величинах

$$A, B, m, \psi, \varphi,$$

которые таким образом найдутся, разность

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} - 1$$

будет приводиться к нулю при пяти различных величинах α , и, следовательно, пять различных положений подвижной муфты будут соответствовать одной и той же угловой скорости ω_0 . Что касается значений параметров

$$A, B, m, \varphi, \psi,$$

при которых всякой угловой скорости вращения соответствовало бы только одно положение муфты, они также найдутся по способу, показанному нами в вышеупомянутом мемуаре, только при этом *полином, наименее уклоняющийся от нуля, безусловно* должен быть заменен *полиномом, который наименее уклоняется от нуля, постоянно возраста или убывая*. Определяя различные полиномы под этим условием, мы находим, что полином, необходимый в настоящем случае, представляется следующей формулой:

$$\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \right)^5 - \frac{5(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{18} \left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \right)^3 + \frac{5(\alpha_1 - \alpha_0)^4}{144} \left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \right),$$

где α_1, α_2 означают пределы переменной α , в которых искомый полином вида

$$\alpha^5 + a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e,$$

постоянно возраста или убывая, наименее удаляется от нуля, и что при помощи этого полинома пределы уклонений выражения (2) от единицы, показанные в § 3, уменьшаются в отношении 4 : 9.

§ 5. Ограничиваясь первым приближением, мы, по § 3, будем иметь

$$\begin{aligned} A &= 0,84713, \\ B &= 0,65616, \\ m &= 1,31271, \\ \psi &= 119^\circ 10', \\ \varphi &= 58^\circ 46', \end{aligned}$$

где, по (1),

$$A = \frac{2r}{P}, \quad B = \frac{\omega_0^2 r^2}{Pg}. \quad (3)$$

Из этих равенств получаются такие величины P и r :

$$r = \frac{2B}{A} \cdot \frac{g}{\omega_0^2}, \quad P = \frac{4B}{A^2} \cdot \frac{g}{\omega_0^2},$$

что по внесении величин A и B дает

$$r = 1,54906 \frac{g}{\omega_0^2}, \quad P = 3,65719 \frac{g}{\omega_0^2}.$$

Таким образом, получаются величины, необходимые для определения всех частей уравнителя.

Полагая для примера

$$\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9,$$

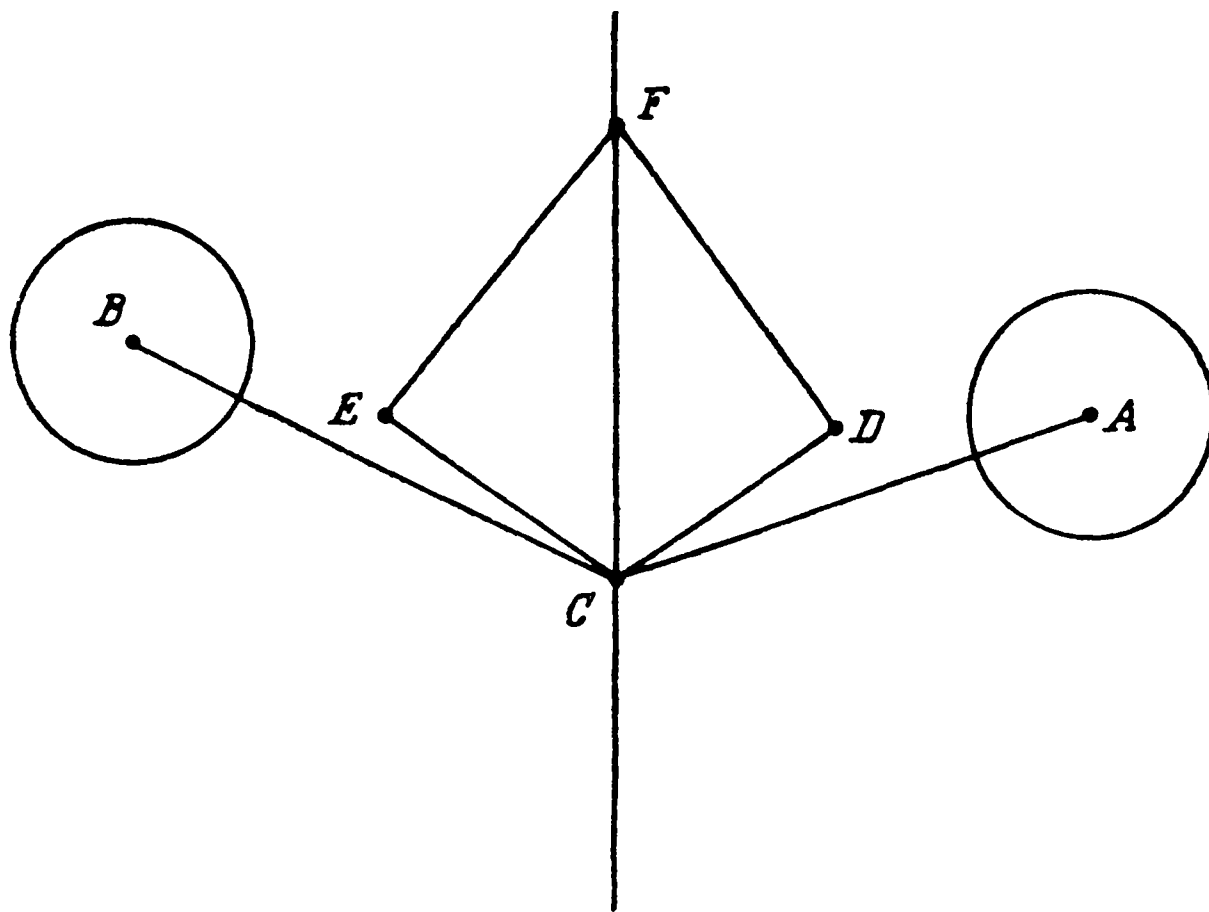
мы по этим формулам получаем

$$r = 1,72115, \quad P = 4,06355.$$

Составляя по этой величине r и вышепоказанным значениям m , ψ чертеж центробежного уравнителя, мы находим, что он будет иметь вид, представленный на фиг. 2, где CD , CE — первые части стержней, длина которых (§ 2) принимается за единицу, AC , BC — вторые части стержней, которых длина r в нашем примере равняется 1,72115; DF , EF — ручки, поддерживающие муфту F , длина их m постоянно равна 1,31271; угол перегиба стержней ACE , BCE равняется $119^\circ 10'$. Что касается углов FCD , ECF , определяющих наклонение первой части

стержня к оси уравнителя, эти углы при нормальной скорости вращения уравнителя равны $58^{\circ}46'$.

Центробежный уравнитель, таким образом составленный, как показывает фиг. 2, будет иметь стержни, поднятые вверх, и центры шаров будут выше точек прикрепления стержней к оси уравнителя. Кроме того, такой уравнитель от обыкновенного уравнителя Уатта будет отличаться муфтой, которой вес P будет всегда велик сравнительно с



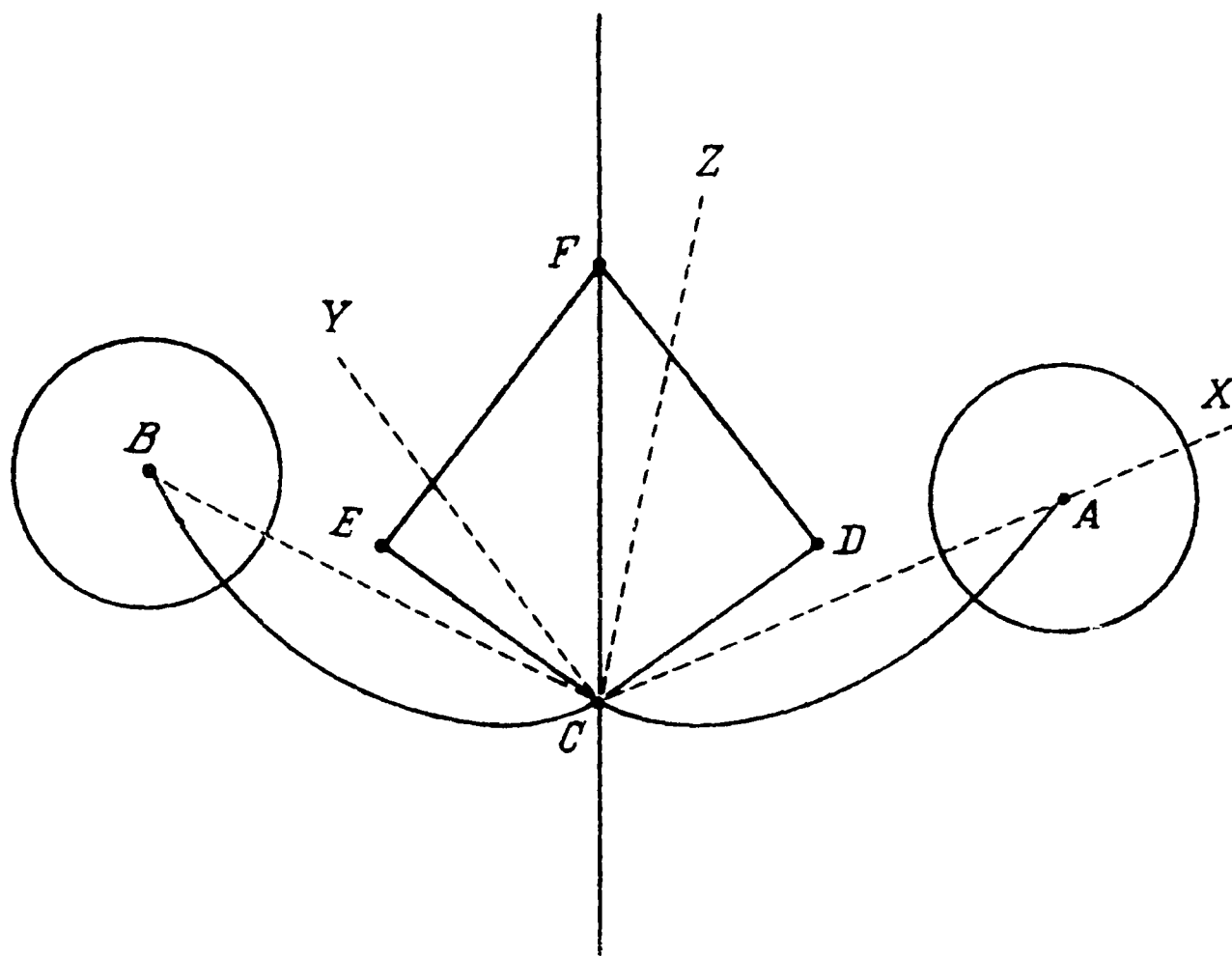
Фиг. 2.

весом шаров. Так, в нашем примере P будет равно 4,06355 и, следовательно, муфта будет тяжелее шара с лишком в 4 раза. Заметим еще, что вторые части стержней придется согнуть, как показано на фиг. 3, для того чтобы движению их не мешали первые части стержней. Изгибая таким образом стержни, необходимо иметь в виду, что центры шаров должны отстоять от точки C на расстояние, равное r , и что наклонение этого расстояния к первой части стержня должно составлять угол $\psi = 119^{\circ}10'$.

§ 6. До сих пор мы не обращали внимания на действие массы стержней и ручек, как это обыкновенно делают в теории центробежных уравнителей; но при той степени приближения к изохронизму, которую мы имеем в виду, необходимо принять в расчет влияние этих частей

уравнителя. Вводя в условие равновесия действие тяжести и центробежной силы на частицы стержней и ручек, мы находим выражение для $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, которое может быть приведено к виду (2), показанному в § 2,

если только расположение массы в стержнях и ручках удовлетворяет одному условию,— условию, которое нетрудно выразить аналитически вполне строго и которое, по незначительности массы стержней и ручек сравнительно с массой шаров, может быть с точностью, достаточной для практики, представлено так:



Фиг. 3.

„Если ручке EF (фиг. 3) по отнятии ее от муфты F дано будет такое направление, что проекция конца ее F на плоскость уравнителя* будет в точке C , то момент инерции всего стержня ACE вместе с ручкою EF , с ним сочлененною, должен быть одинаковым относительно двух плоскостей, перпендикулярных к плоскости уравнителя и делающих с линиею AC в точке A углы, равные $\frac{\pi}{4}$ “.

* Плоскостью уравнителя называем плоскость, проходящую через ось его и центры шаров.

Если такое условие выполняется каждым из двух стержней вместе с ручками, к ним прикрепленными, и масса их незначительна сравнительно с массой шаров, выражение, определяющее отношение ω^2/ω_0^2 , приводится к виду (2) с точностью, достаточной для практики, когда полагаем

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{уг. } ACE + \arcsin \frac{2(p+p_1)Y}{AP}, \\ A &= \frac{2r + 2(p+p_1)X}{P + \frac{2\rho}{m}p_1}, \\ B &= \frac{\omega_0^2}{g} \cdot \frac{r^2 + (p+p_1)(\eta^2 - \xi^2)}{P + \frac{2\rho}{m}p_1},\end{aligned}\quad (4)$$

где p — вес одного стержня, p_1 — вес одной ручки, ρ — расстояние центра тяжести ручки от точки ее сочленения с муфтой; X, Y — координаты центра тяжести, а ξ, η — плечи моментов инерции* относительно плоскостей yz, xz стержня с ручкой, направленной по вышесказанному, причем за ось x принимается линия AC , за ось y — перпендикуляр к ней в плоскости уравнителя, за ось z — перпендикуляр к этой плоскости (фиг. 3).

Что касается r и угла ACE , то r представляет расстояние центра A от точки C , а угол ACE — наклонение этого расстояния к первой части стержня ACE . Приведя таким образом к прежнему виду (2) выражение величины ω^2/ω_0^2 при действии массы стержней и ручек, мы получим уравнитель, близко подходящий к изохроническому при действии этих масс, давая его частям такие размеры и расположение, при которых величины

$$A, B, m, \phi, \varphi$$

имеют значения, показанные в § 2. Внося эти величины A, B, ϕ в

* Т. е. величины $\sqrt{\frac{x_1^2 M_1 + x_2^2 M_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}}, \sqrt{\frac{y_1^2 M_1 + y_2^2 M_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}}$, если через

$M_1, M_2, \dots$ обозначим частицы стержня и ручки, а через $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ координаты частиц $M_1, M_2, \dots$.

формулы (4), мы получаем три уравнения

$$\begin{aligned} \text{уг. } ACE + \arcsin \frac{2(p+p_1)Y}{0,84713P} &= 119^\circ 10', \\ \frac{2r + 2(p+p_1)X}{P + \frac{2\rho}{m}p_1} &= 0,84713, \\ \frac{\omega_0^2}{g} \cdot \frac{r^2 + (p+p_1)(\eta^2 - \xi^2)}{P + \frac{2\rho}{m}p_1} &= 0,65616 \end{aligned} \quad (5)$$

взамен прежних (§ 5). Что касается величин m и φ , то они остаются без перемены.

§ 7. Чтобы показать на примере употребление вышеприведенных формул, положим, что требуется сделать центробежный уравниватель, для которого

$$\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9.$$

Так как у нас везде за единицу длины принимается длина первой части стержня, то g , ускорение тяжести, представится числом более или менее значительным, смотря по длине этой части, и вследствие того надлежащим выбором этой длины отношение

$$\frac{\omega_0^2}{g}$$

может быть приведено к величине 0,9, каковы бы ни были угловая скорость ω_0 и ускорение тяжести g .

Приступая к определению различных частей уравнивателя, мы для первого приближения пренебрегаем массой стержней и ручек, для чего в формулах (5) полагаем

$$p = 0, \quad p_1 = 0.$$

При таких величинах p , p_1 и при $\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9$ формулы эти приводятся

к следующему:

$$\text{уг. } ACE = 119^\circ 10',$$

$$\frac{2r}{P} = 0,84713,$$

$$0,9 \frac{r^2}{P} = 0,65616.$$

Решая последние уравнения относительно P и r , находим

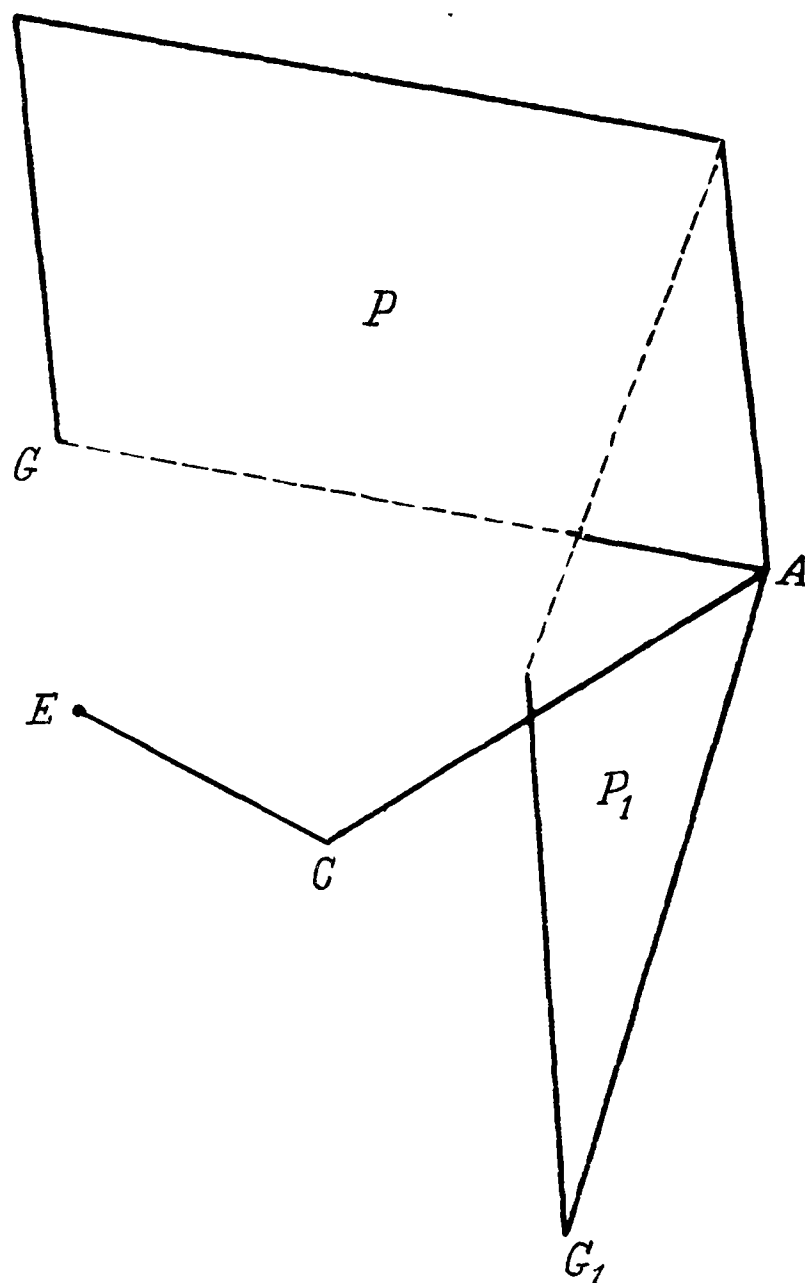
$$P = 4,063, \quad r = 1,721.$$

Первое показывает вес муфты, причем за единицу (§ 2) принимается вес одного шара; второе нам дает расстояние центра шара от точки прикрепления стержня к оси уравнителя.

Переходя к более точному определению этих величин, мы по вышенайденной величине r и углу ECA ищем приближенное место центра шара относительно первой части стержня. Для этого, взявши какую-нибудь прямую EC за первую часть стержня и длину ее за единицу, проводим (фиг. 4) линию AC под углом $ACE = 119^\circ 10'$ и откладываем

$$AC = r = 1,721.$$

Точка A будет местом центра шара, как оно получается в первом приближении; точка C будет местом прикрепления стержня к оси уравнителя, и вся ломаная линия ACE будет находиться в плоскости уравнителя. Проводя через точку A линии AG , AG_1 , делающие с линией AC углы CAG , CAG_1 , равные 45° , и через эти линии плоскости P , P_1 , перпендикулярные к плоскости уравнителя, мы получим те две плоскости, относительно которых, по § 6, должен быть одинаковым



Фиг. 4.

1) Угол ECm , образуемый в точке C средними нитями первой и второй частей стержня, равен 198° , длина прямой нити Cm равна 0,5, а радиус дуги mn равен 0,6.

2) Ширина второй части стержня $CmnA$, там, где он остается прямым, равна некоторой постоянной величине λ . Там же, где стержень согнут, ширина идет возрастая от начала изгиба до середины, где она достигает величины $\frac{5}{4}\lambda$, после чего начинает уменьшаться и при конце изгиба возвращается к прежней величине λ . Закон изменения ширины этой части стержня таков, что внешние нити представляют собою дуги кругов.

3) Ширина первой части стержня около точки C равна λ ; по мере же приближения к концу E ширина равномерно уменьшается, и в точке E она равна $\frac{3}{4}\lambda$.

4) На всем протяжении стержня толщина остается постоянно равною некоторой величине μ .

5) Площадь сечения ручек на всей длине их остается равною $0,52\mu$.

6) Шарнир, служащий для сочленения стержня с ручкою (сюда включается все то, что на концах прикасающихся друг к другу стержня и ручек выходит за границы, определяемые их длиною, шириною, толщиной или площадью сечения), составляет $0,13\mu$ кубических единиц, нами принятых.

Говоря об очертании средней нити $CmnA$ второй части стержня, мы ничего не сказали о длине дуги mn и прямой линии nA , так как длина этих линий определяется тем, что линия An представляет собою касательную к дуге mn , проведенную из точки A . Что же касается кругов, определяющих вид внешних нитей на закругленной части стержня, то они легко найдутся по ширине этой части в начале, середине и конце ее, как это будет показано ниже (§ 9).

Заметим еще, что утолщение и выемки в стержнях около C , точки их крепления к оси уравнителя, не имеют значительного влияния на рассматриваемое нами равенство моментов, так как в этом месте для всякой точки разница расстояний от плоскостей P и P_1 очень незначительна. То же можно сказать о конце ручки, который должен быть сочленен с муфтою, так как при рассматриваемом нами равенстве

проекция этого конца на плоскость чертежа будет в точке C , что предполагает равенство расстояний его от плоскостей P и P_1 .

§ 8. Остановливаясь на случае, когда стержень, ручки и шарниры, их сочленяющие, сделаны согласно с вышесказанным, и вычисляя в этом предположении величины p , p_1 , Y , ξ , η , ρ , входящие в формулы (5), мы находим

$$\begin{aligned} p &= 13,8\lambda\mu, & X &= 0,292, \\ p_1 &= 2,5\lambda\mu, & Y &= 0,205, \\ \eta^2 - \xi^2 &= 0,044, & \rho &= \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

где за единицу веса принимается вес шара, которого поперечник в рассматриваемом нами случае, как видели, равен 0,8 и который мы предполагаем состоящим из того же вещества, как и стержни с ручками и шарнирами.

Внеся эти величины в формулы (5) и заменяя отношение $\frac{\omega_0^2}{g}$ величиною его 0,9, получаем такие уравнения для определения r , P и угла ACE :

$$\frac{2r + 9,6\lambda\mu}{P + 2,5\lambda\mu} = 0,84713, \quad (6)$$

$$0,9 \frac{r^2 + 0,72\lambda\mu}{P + 2,5\lambda\mu} = 0,65616,$$

$$ACE + \arcsin \frac{6,7\lambda\mu}{0,84713P} = 119^\circ 10'. \quad (7)$$

Деля первое из этих уравнений на второе, находим

$$\frac{2r + 9,6\lambda\mu}{(r^2 + 0,72\lambda\mu) \cdot 0,9} = \frac{0,84713}{0,65616},$$

что дает такое уравнение для определения r :

$$r^2 - 1,72124r = 7,5\lambda\mu,$$

откуда выходит

$$r = 0,86062 + \sqrt{0,86062^2 + 7,5\lambda\mu}.$$

Разлагая же эту величину в ряд и ограничиваясь первою степенью $\lambda\mu$, находим

$$r = 1,7212 + 4,4\lambda\mu. \quad (8)$$

Переходя к определению P , мы замечаем, что уравнение (6) дает

$$P + 2,5 \lambda \mu = \frac{2r}{0,84713} + \frac{9,6 \lambda \mu}{0,84713},$$

что по вставке вышенайденной величины r приводится к следующему:

$$P = 4,0636 + 19 \lambda \mu. \quad (9)$$

Определив таким образом P , мы на основании уравнения (7) найдем величину угла ACE , а по этому углу и длине $AC = r$ мы найдем место точки A , центра шара.

Так с точностью, достаточной для практики, определятся стержень и вес муфты. Что касается ручек, то длина их m , как видели (§ 5), всегда равняется 1,31271; площадь же сечения их предполагалась по всей длине одинаковою и равною 0,52 $\lambda \mu$. Но, очевидно, мы ничего не изменим в условиях равновесия, если частицы муфты, соприкасающиеся с ручкой, будем считать принадлежащими не муфте, а тому концу ручки, который сочленен с нею. Точно так же может быть отнесена к другому концу ручки часть массы, назначенной для образования шарнира, связывающего ручки со стержнем.

С другой стороны, нетрудно заметить, что по незначительности массы ручек изменение в расположении ее по длине их не будет иметь значительного влияния на движение уравнителя, если только центр тяжести ручек остается на прежнем месте. Вследствие этого при устройстве уравнителей можно уклоняться от сделанного нами предположения относительно сечения ручек и увеличивать их массу за счет массы муфты и ширниров.

§ 9. Чтобы показать на примере употребление вышенайденных формул, положим, что величины λ , μ , определяющие по § 8 ширину и толщину стержня, имеют такие значения:

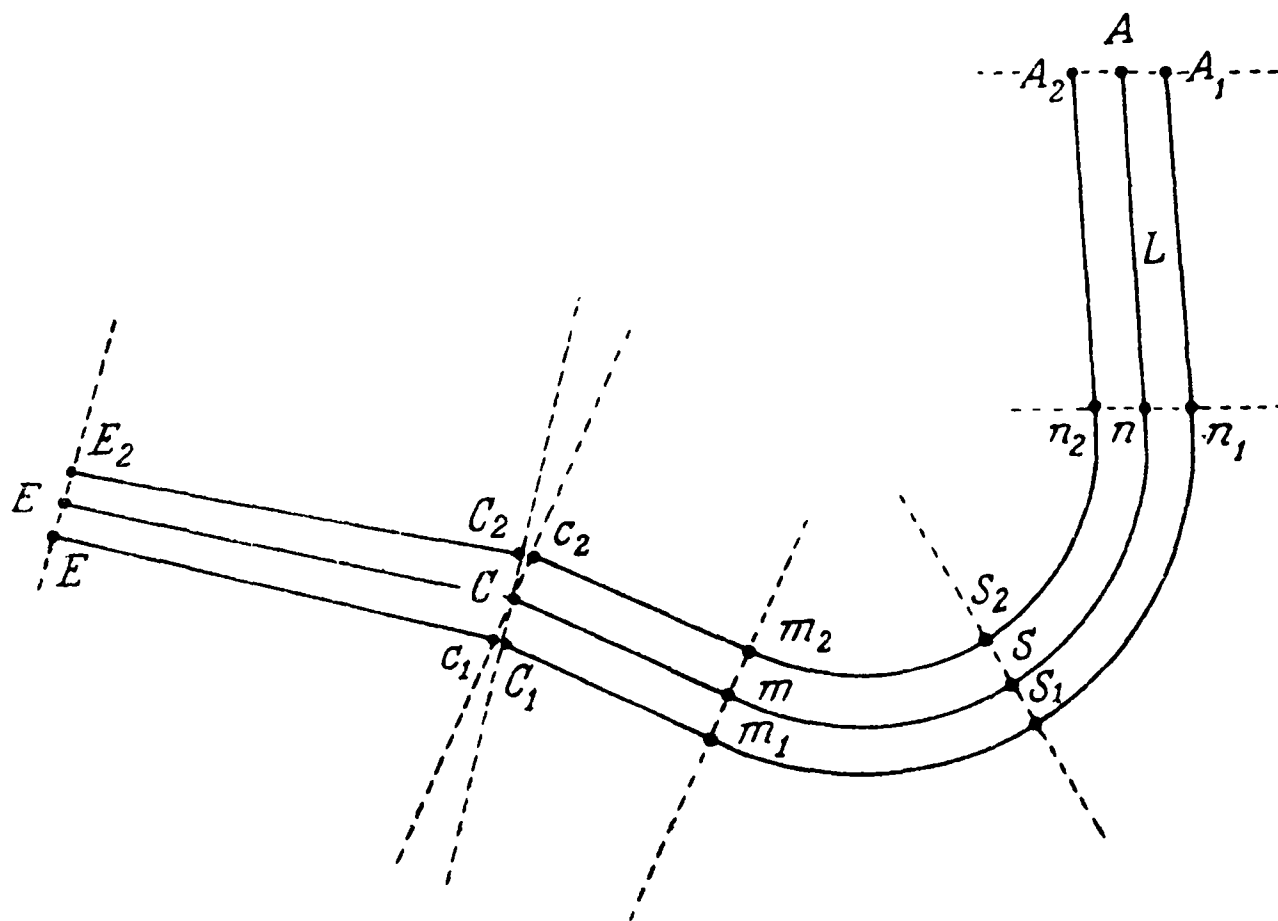
$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12.$$

Внося эти величины в формулы (8) и (9), находим

$$\begin{aligned} r &= 1,7212 + 4,4 \cdot 0,16 \cdot 0,12 = 1,8057, \\ P &= 4,0636 + 19 \cdot 0,16 \cdot 0,12 = 4,4283. \end{aligned}$$

из этой точки, определяет точку n , конец загнутой части нити и начало последней прямой части nA . Так найдется средняя нить всего стержня.

Переходя к определению крайних нитей, проводим (фиг. 7) нормали к средней нити $ECmnA$ в точках E , C , m , n , A и в точке S ,



Фиг. 7.

середине дуги mn . На этих нормалях, по ту и по другую сторону средней нити, откладываем части, равные половине ширины стержня в этих местах (§ 7), делая

$$EE_1 = EE_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \lambda = 0,06,$$

$$CC_1 = CC_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$Cc_1 = Cc_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$mm_1 = mm_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$SS_1 = SS_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \lambda = 0,10,$$

$$nn_1 = nn_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$AA_1 = AA_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08.$$

Проведя через точки

$$\begin{aligned} E_1, C_1, \\ c_1, m_1, \\ n_1, A_1, \\ E_2, C_2, \\ c_2, m_2, \\ n_2, A_2 \end{aligned}$$

прямые, а через точки

$$\begin{aligned} n_1, S_1, m_1, \\ n_2, S_2, m_2 \end{aligned}$$

дуги кругов, мы, по § 8, получим очертание внешних нитей стержня.

Заметим при этом, что расширение стержня около точки C , которое необходимо сделать для прикрепления стержня к оси уравнителя, не будет иметь значительного влияния на наши уравнения, так как около C координаты всех точек (фиг. 3) имеют малую величину. Вследствие этого около точки C стержень может быть расширен, сколько этого потребует прочность. Увеличивая же массу в конце его E для того, чтобы образовать шарнир, мы должны иметь в виду, что объем всего шарнира на конце стержня и ручки должен составлять

$$0,13 \lambda \mu,$$

что при

$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12$$

приводится к

$$0,002496.$$

Что касается другого конца стержня, на котором будет шар, то (фиг. 7), откладывая от точки A , места центра шара, по направлению nA линию AL , равную $0,4$, радиусу шара, мы найдем то место стержня, где он будет прикасаться к поверхности шара.

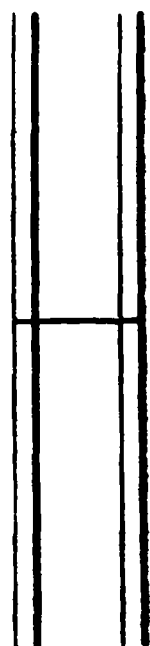
Переходя к ручкам, мы замечаем, что, по § 5, длина их всегда равна $m = 1,31271$. По формуле же

$$0,52 \lambda \mu$$

при

$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12$$

мы находим, что в рассматриваемом нами случае площадь сечения ручек должна равняться 0,01. Мы предполагали, что такое сечение будет одинаково на всей длине ручек; но по замеченному в § 8 можно изменять распределение массы по длине ручек, лишь бы центр тяжести оставался на том же месте. Так, вместо ручки с одинаковым сечением по всей длине, можно взять ручку, составленную из двух параллельных полосок, связанных посредине третьейю поперечною полоскою (фиг. 8): центр тяжести такой ручки будет тоже посредине длины. Если вес ручки окажется более того, сколько он был бы при площади сечения 0,01 по всей длине, на одну половину лишнего веса ее, как видели, должна быть уменьшена муфта, а на другую половину шарнир, сочленяющий ручку со стержнем. Делая то же относительно каждой ручки, мы должны будем уменьшить оба шарнира на половину лишнего веса одной ручки, и на весь лишний вес ее уменьшить вес муфты $P = 4,4283$.



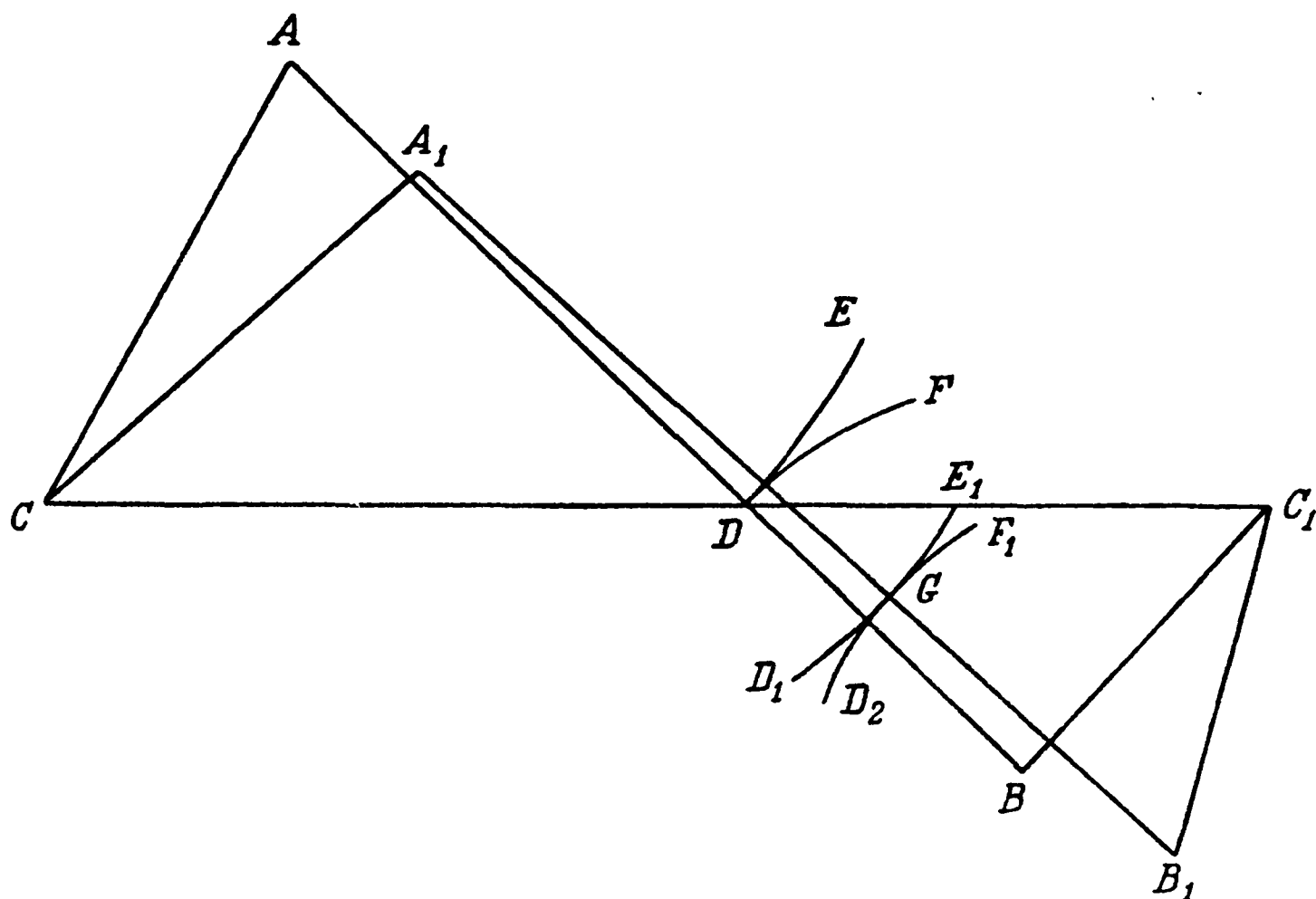
Фиг. 8.

Толщина стержня, как [видели, предполагается по всей длине его равною $\mu = 0,12$.

О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ

§ 1. Рассматривая построение зубчатых колес в теории, обыкновенно предполагают данную форму зуба на одном колесе и по ней ищут форму зуба другого колеса. Таким образом, делая различные предположения относительно вида зуба одного колеса, можно найти бесчисленное множество различных видоизменений зубчатых колес. Но из всех этих видоизменений на практике употребляются очень немногие. Для того чтобы практика могла, не ограничиваясь этими частными видами зубьев, употреблять всякий раз то самое очертание их, которое в данном случае представляется наиболее пригодным, необходимо иметь такой общий способ черчения их, при котором легко получалась бы форма зубьев на обоих колесах, наиболее соответствующая тем или другим требованиям практики. Если иметь в виду теоретически точное очертание зубьев, определение их формы под такими условиями представляет трудности непреодолимые. Но практика и не требует точного определения [вида зубьев; она обыкновенно довольствуется приближенным черчением их, при котором выступы и впадины зубьев ограничены дугами кругов, надлежащим образом выбранных. Если же иметь в виду только такие очертания зубьев (а они вообще с точностью, достаточною для практики, могут заменить собою все другие), вопрос об определении зубьев, наиболее соответствующих каким-либо требованиям практики, становится значительно легче, приводясь к определению центра и радиуса нескольких кругов. Но приступая к рассмотрению зубьев, ограниченных дугами кругов, мы замечаем, что они никогда не могут дать такого зацепления, при котором отношение угловых скоростей оставалось бы постоянно равным одной и той же величине, как это необходимо для правильного действия зуб-

чатых колес; а потому при определении очертания таких зубьев необходимо иметь в виду по возможности уменьшить неправильности в движении зубчатых колес, происходящие от более или менее значительной перемены отношения угловых скоростей в продолжение зацепления одной пары зубьев. Этим мы теперь и займемся; мы покажем, каким образом найдется очертание выступов и впадины зубьев, ограниченных дугами кругов, при котором неправильности в движении колес достигают самого низшего предела, возможного при выполнении тех или других требований практики.



Фиг. 1.

§ 2. Пусть будут (фиг. 1) C , C_1 центры зубчатых колес (которые мы для сокращения будем называть: колесо C , колесо C_1) и их первообразных кругов; $R = CD$, $R_1 = C_1D$ — радиусы первообразных кругов; $\rho = AD$, $\rho_1 = BD$ — радиусы, которыми описана дуга DE , ограничивающая выступ колеса C , и дуга DF , ограничивающая впадину зуба на колесе C_1 ; A , B — места центров этих дуг в момент, когда они соприкасаются на линии центров, и A_1 , B_1 — места центров, когда рассматриваемые дуги соприкасаются в какой-нибудь точке G ниже этой линии. Углы ACA_1 , BC_1B_1 будут представлять величину поворота колес

C, C_1 от момента, когда зубья соприкасались на линии центров, до момента, когда они соприкасаются в какой-нибудь точке G ниже этой линии. Называя вообще величину этих углов через λ и μ и изображая через $F(\lambda)$ функцию, определяющую величину угла μ , соответствующую какой-либо величине угла λ , мы замечаем, что производная $F'(\lambda)$ будет представлять отношение угловых скоростей колес C, C_1 при различных величинах угла $\lambda = A C A_1$.

Так как при $\lambda = A C A_1 = 0$ угол $\mu = B C_1 B_1$ тоже приводится к нулю, функция $F(\lambda)$ при $\lambda = 0$ будет обращаться в нуль. С другой стороны, нетрудно заметить, что при этой величине λ производная $F'(\lambda)$ должна равняться $\frac{R}{R_1}$. В самом деле, при $\lambda = A C A_1 = 0$, как видели, зубья соприкасаются на линии центров в точке D , вследствие чего по общему свойству зацеплений отношение угловых скоростей колес C, C_1 при этой величине λ будет равно $\frac{CD}{C_1 D}$ или $\frac{R}{R_1}$, а это отношение по вышесказанному и будет величина производной $F'(\lambda)$ при $\lambda = 0$.

Приступая к рассмотрению неправильностей в ходе колес C, C_1 , неизбежных при зубьях, ограниченных дугами кругов, мы замечаем, что в рассматриваемом нами случае, где радиусы пересобразных кругов равны R, R_1 , отношение угловых скоростей должно было бы оставаться постоянно равным $\frac{R}{R_1}$ и, следовательно, при повороте колеса C на угол $\lambda = A C A_1$ колесо C_1 должно бы было повернуться на угол, равный $\frac{R}{R_1} \lambda$. А так как по нашему знакоположению μ , угол поворота колеса C_1 , соответствующий повороту колеса C на угол λ в рассматриваемом нами зацеплении, будет представляться функцией $F(\lambda)$, то разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

нам покажет ошибку в повороте колеса C_1 , которая будет иметь место при повороте колеса C на угол $A C A_1 = \lambda$.

Так как по вышесказанному функция $F(\lambda)$ при $\lambda = 0$ обращается в нуль, то разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

при $\lambda = 0$ будет тоже приводиться к нулю. При других величинах λ эта разность будет вообще отличаться от нуля и при переходе λ от нуля до предельной величины своей, соответствующей моменту, когда дуги DE , DF соприкасаются своими концами E , F , — величины, которую мы будем изображать через l , эта разность будет более или менее уклоняться от нуля. Для уменьшения по возможности неправильности в ходе колес при рассматриваемом нами зацеплении необходимо дуги DE , DF выбрать таким образом, чтобы разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

от $\lambda = 0$ до $\lambda = l$ наименее удалялась от нуля. Точное определение дуг DE , DF под таким условием очень трудно по сложности состава функции $F(\lambda)$; но, ограничиваясь приближенным решением этого вопроса, совершенно достаточным для практики, мы можем устранить затруднение, происходящее от сложности функции $F(\lambda)$, заменяя выражение

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

его разложением в ряд по восходящим степеням переменной λ .

Так как угол λ , заключаясь в пределах $\lambda = 0$, $\lambda = l$, остается всегда малою величиною, то нет надобности удерживать в разложении выражения

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

значительное число членов. Для решения различных вопросов, представляющихся в практике, как мы увидим, нам достаточно будет иметь это разложение до третьей или четвертой степени λ включительно; вследствие чего разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

будет представляться у нас или полиномом

$$K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2 + K_1 \lambda + K_0,$$

или полиномом

$$K_4\lambda^4 + K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2 + K_1\lambda + K_0.$$

§ 3. По сказанному выше, определение дуг DE , DF , доставляющих наиболее правильное зацепление, приведет к определению полиномов вида

$$K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2 + K_1\lambda + K_0,$$

$$K_4\lambda^4 + K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2 + K_1\lambda + K_0,$$

наиближе подходящих к нулю в [данных пределах. Эти полиномы подобны тем, которые представляются при определении наилучшего устройства параллелограмма Уатта, и разнятся они с этими последними только некоторыми особенностями, [происходящими от вышезамеченного нами относительно значения функции $F(\lambda)$ и ее производной $F'(\lambda)$ при $\lambda=0$. Так как при $\lambda=0$ функция $F(\lambda)$ обращается в нуль, то в разложении разности

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1}\lambda$$

не будет члена без λ ; вследствие же того, что $F'(\lambda)$ при $\lambda=0$ равняется $\frac{R}{R_1}$, мы замечаем, что в разложении разности

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1}\lambda$$

коэффициент при λ будет равняться нулю. Из этого видно, что наши полиномы приведутся к следующему:

$$K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2, \quad K_4\lambda^4 + K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2.$$

Вот какого вида полиномы представляются при решении рассматриваемого нами вопроса о зубчатых колесах. В этих полиномах, подобно тому как и в полиномах, представляющихся в теории параллелограмма Уатта, первые коэффициенты предполагаются данными, а остальные должны быть выбраны так, чтобы значение полиномов в пределах $\lambda=0$ и $\lambda=l$ наименее уклонялось от нуля. На основании того, что было показано в мемуаре нашем „Теория механизмов, известных под

названием параллелограмов^{*}, определение таких полиномов в общем виде возможно только при помощи эллиптических функций; но для случая 3 и 4 степени они легко определяются. Ограничиваясь тысячными долями в числовых коэффициентах, мы находим, что эти полиномы могут быть представлены так:

$$K_3(\lambda^3 - 0,894 l \lambda^2),$$

$$K_4(\lambda^4 - 1,559 l \lambda^3 + 0,578 l^2 \lambda^2)^{**}.$$

Эти полиномы в пределах $\lambda = 0$ до $\lambda = l$ меньше всех других полиномов того же вида будут удаляться от нуля, но они при предельной величине $\lambda = l$, как нетрудно заметить, достигают наибольшего отклонения от нуля, вследствие чего зубчатые колеса, в которых отклонения от нормального хода выразятся такими полиномами, будут наихуже действовать при конце зацепления каждой пары зубьев. Для практики это очень невыгодно; для нее особенно полезно, чтобы колеса приходили в нормальное положение как при начале, так и при конце зацепления, а потому вышепоказанные полиномы полезно заменить такими, которые, представляя наименьшее отклонение от нуля в пределах $\lambda = 0$, $\lambda = l$, обращались бы в нуль не только при $\lambda = 0$, но и при $\lambda = l$. На основании того, что было замечено нами в § 9 вышеупомянутого мемуара, такого рода полиномы получатся из вышеприведенных формул, когда заменим l в выражении полинома третьей степени через $\frac{l}{0,894}$, а в выражении полинома четвертой степени — через $\frac{l}{0,952}$. Таким образом,

* Стр. 611—648 настоящего издания.— *Ред.*

** Точное выражение этих полиномов есть следующее:

$$K_3(\lambda^3 - a l \lambda^2),$$

$$K_4\left(\lambda^4 - \frac{4 p l}{q} \lambda^3 + \frac{(13 p^2 - 4) l^2}{2 q^2} \lambda^2\right),$$

где a определяется уравнением $a^3 + \frac{27}{4}(a - 1) = 0$, а p и q имеют такие величины:

$$p = \sqrt{\frac{20 + 24 \sqrt{3}}{83}}, \quad q = \frac{p}{2} + \sqrt{1 - p^2} + \sqrt{p^2 + 2p \sqrt{1 - p^2}}.$$

мы получаем полиномы

$$K_2(\lambda^3 - l\lambda^2), \\ K_4(\lambda^4 - 1,638 l\lambda^3 + 0,638 l^2\lambda^2)$$

взамен вышеприведенных, и эти полиномы нам послужат к определению таких очертаний выступа и впадины зубьев, при которых в конце и начале зацепления колеса будут иметь нормальное положение, а в продолжение зацепления отклонения от нормального хода будут по возможности малыми.

§ 4. Мы начнем с того случая, когда при выборе дуг, ограничивающих выступ и впадину зубьев, остается за удовлетворением тех или других требований практики только одна величина, которою можно располагать для уменьшения по возможности неправильностей в ходе колес. В этом случае, ограничиваясь в разложении выражения

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

третьею степенью λ , мы, по сказанному в предыдущем параграфе, должны положить

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda = K_3(\lambda^3 - l\lambda^2). \quad (1)$$

Так как по самому составу функции $F(\lambda)$ разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

всегда приводится (§ 2) с точностью до λ^3 к полиному вида

$$K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2,$$

то равенство (1) нам даст одно уравнение между коэффициентами K_2 , K_3 и, следовательно, между величинами, входящими в состав функции $F(\lambda)$ и которыми определяются рассматриваемые нами дуги.

Это уравнение мы могли бы вывести, найдя выражение функции $F(\lambda)$ и сличив коэффициенты при λ^2 , λ^3 в двух частях равенства (1); но это уравнение мы можем получить гораздо проще, заметив, что

равенство (1), будучи продифференцировано, дает

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1} = K_3(3\lambda^2 - 2l\lambda),$$

что предполагает, с точностью до λ^2 , обращение в нуль разности

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

при таких величинах λ :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{2}{3}l.$$

Первая величина λ , как видели (§ 2), будет всегда обращать в нуль разность

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1};$$

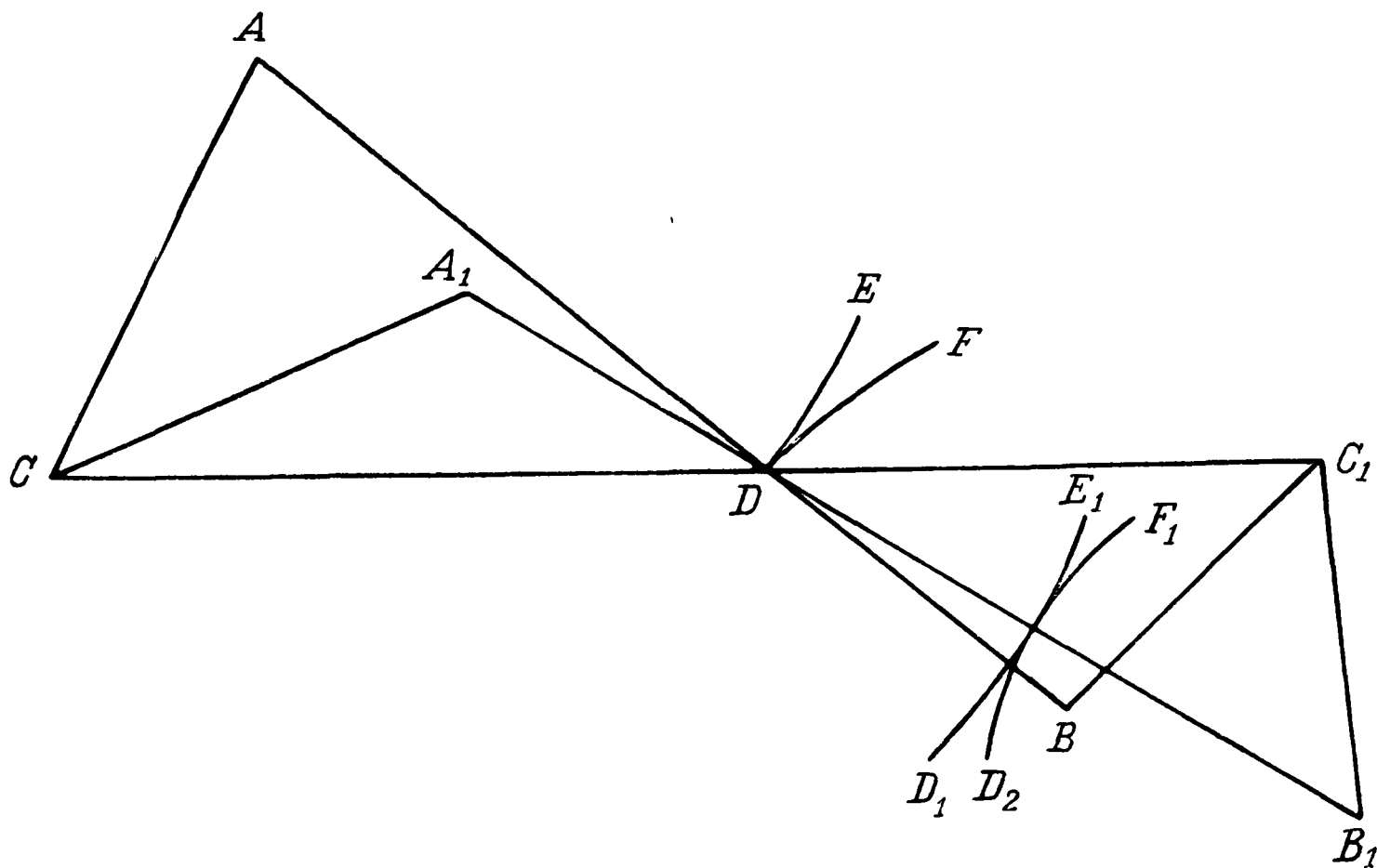
обращение же в нуль этой разности при $\lambda = \frac{2}{3}l$ нам послужит для вывода искомого уравнения между величинами, входящими в состав функции $F(\lambda)$.

Для этого мы замечаем, что, по § 2, производная $F'(\lambda)$ представляет отношение угловых скоростей рассматриваемых нами колес, дробь же $\frac{R}{R_1}$ — нормальную величину этого отношения; а потому обращение в нуль разности

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

при $\lambda = \frac{2}{3}l$ показывает, что при этой величине λ отношение угловых скоростей колес будет иметь настоящую величину и, следовательно, общая нормаль в точке соприкосновения зубьев должна пересекать линию центров в точке соприкосновения первообразных кругов. На основании этого нетрудно найти величину изменения в наклонении общей нормали соприкасающихся зубьев при повороте колеса C на угол $\lambda = \frac{2}{3}l$, что послужит нам для вывода уравнения между величинами, определяющими рассматриваемые нами очертания зубьев.

§ 5. Сохраняя прежние обозначения, мы будем изображать (фиг. 2) радиусы CD , C_1D первообразных кругов C , C_1 через R , R_1 ; радиусы AD , BD , которыми описаны дуги DE , DF , через ρ , ρ_1 ; A , B — места, занимаемые центрами дуг DE , DF в момент, когда они соприкасаются на линии центров в точке D . Называя через A_1 , B_1 места этих цент-



Фиг. 2.

ров после поворота колеса C на угол $\lambda = \angle ACA_1 = \frac{2}{3} l$, и когда, по вышесказанному, общая нормаль дуг D_1E_1 , D_2F_1 проходит попрежнему через точку D , и изображая через r радиус $AC = A_1C$, через

$$L, N, v$$

углы ACD , ADC , ADA_1 , мы из треугольника A_1DC выводим такое выражение тангенса угла $A_1DC = ADC - ADA_1$:

$$\operatorname{tang}(ADC - ADA_1) = \frac{A_1C \sin A_1CD}{CD - A_1C \cos A_1CD},$$

где, по вышешоказанному обозначению,

$$ADC = N, ADA_1 = v, A_1C = r, CD = R,$$

$$A_1CD = ACD - \angle ACA_1 = L - \frac{2}{3} l,$$

вследствие чего это равенство приводится к следующему:

$$\operatorname{tang}(N - \nu) = \frac{r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)},$$

или, что одно и то же,

$$\frac{\operatorname{tang} N - \operatorname{tang} \nu}{1 + \operatorname{tang} N \operatorname{tang} \nu} = \frac{r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)}.$$

Решая это уравнение относительно $\operatorname{tang} \nu$, находим

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{\left[R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)\right] \operatorname{tang} N - r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right) + r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right) \operatorname{tang} N},$$

что по вставке

$$\frac{\sin N}{\cos N}$$

на место $\operatorname{tang} N$ приводится к следующему:

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{R \sin N - r \sin\left(L + N - \frac{2}{3}l\right)}{R \cos N - r \cos\left(L + N - \frac{2}{3}l\right)}. \quad (2)$$

Разлагая здесь

$$\sin\left(N + L - \frac{2}{3}l\right), \quad \cos\left(N + L - \frac{2}{3}l\right)$$

по восходящим степеням l , мы находим, что числитель представляется рядом

$$R \sin N - r \sin(L + N) + \frac{2}{3}rl \cos(L + N) + \frac{2}{9}rl^2 \sin(L + N) + \dots,$$

а знаменатель — рядом

$$R \cos N - r \cos(L + N) - \frac{2}{3}rl \sin(L + N) + \frac{2}{9}rl^2 \cos(L + N) + \dots$$

Но из треугольника ACD выходят такие равенства:

$$\begin{aligned} CD \sin ADC &= AC \sin CAD, \\ CD \cos ADC + AC \cos CAD &= AD, \end{aligned}$$

которые по замене угла CAD разностью

$$\pi - (ADC + ACD)$$

и при помощи вышепоказанного обозначения приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} R \sin N &= r \sin (L + N), \\ R \cos N - r \cos (L + N) &= \rho. \end{aligned}$$

На основании этих равенств мы замечаем, что вышенайденные разложения числителя и знаменателя формулы (2) приводятся к такому простейшему виду:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} (R \cos N - \rho) l + \frac{2}{9} R \sin N \cdot l^2 + \dots \\ \rho - &\frac{2}{3} R \sin N \cdot l + \frac{2}{9} (R \cos N - \rho) l^2 + \dots \end{aligned}$$

Замечая же, что частное, получаемое при делении первого из этих рядов на второй, равняется

$$\frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2 + \dots,$$

мы, по формуле (2), заключаем, что $\operatorname{tang} v$ с точностью до вторых степеней включительно имеет такую величину:

$$\operatorname{tang} v = \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2.$$

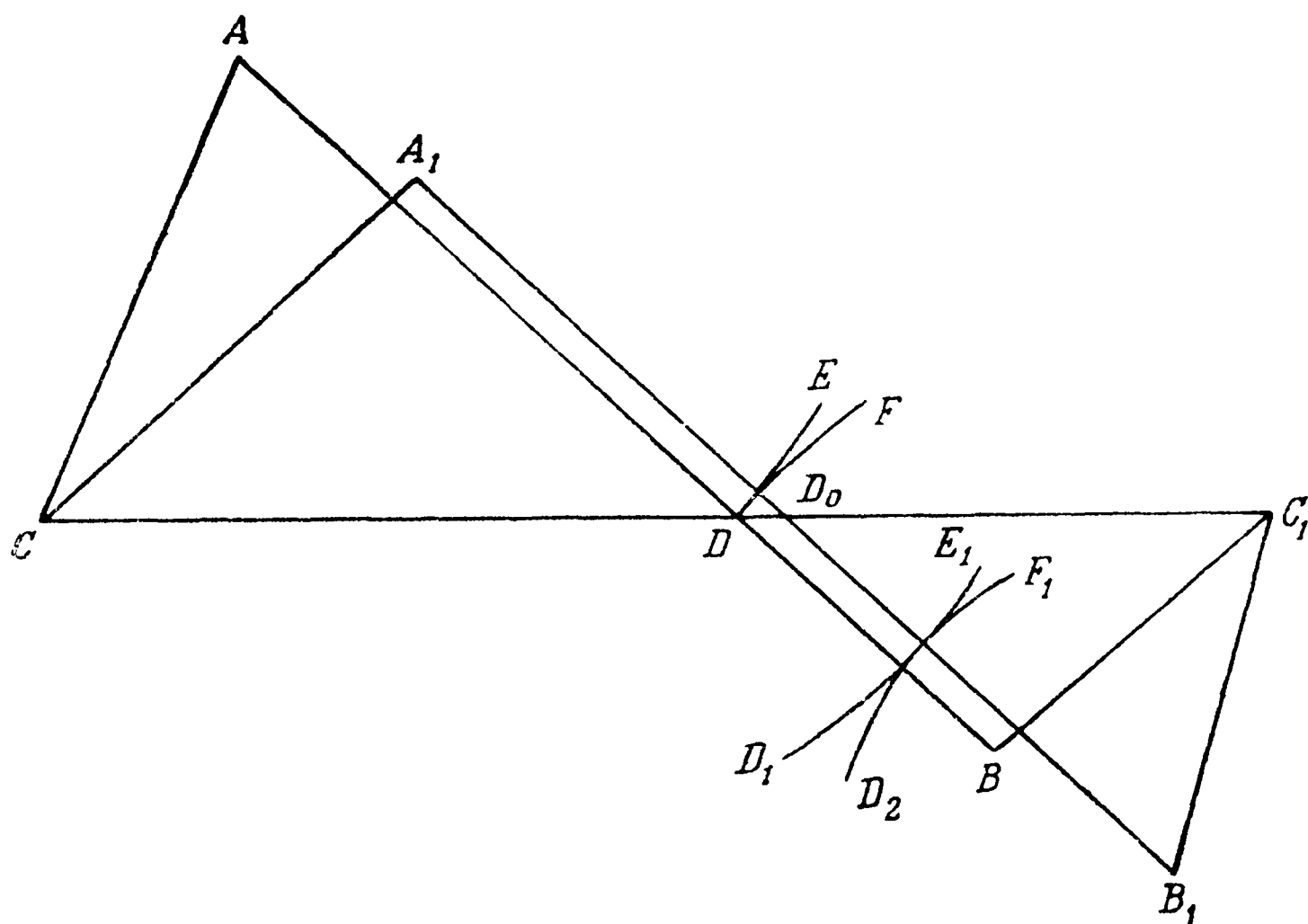
Но так как с точностью до вторых степеней тангенс дуги v может быть заменен самою дугою, то эта формула приводится к следующему:

$$v = \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2. \quad (3)$$

Такова должна быть величина угла φ , представляющего изменение наклона общей нормали соприкасающихся зубьев при повороте колеса C на угол $ACA_1 = \frac{2}{3}l$, для того чтобы она проходила через точку соприкосновения первообразных кругов при $ACA_1 = \frac{2}{3}l$, как это должно быть в рассматриваемом нами зацеплении. На основании этого нетрудно найти уравнение между величинами

$$\rho, \rho_1, N,$$

определяющими дуги DE, DF ; для этого нужно только иметь общее выражение угла φ при каких бы то ни было величинах ρ, ρ_1, N . К определению этого выражения мы теперь и приступим.



Фиг. 3.

§ 6. Пусть будут A, B — места центров рассматриваемых нами дуг (фиг. 3), когда они соприкасаются на линии центров и когда по нашему знакоположению

$$ACD = L, \quad ADC = N, \quad CD = R, \quad C_1D = R_1,$$

и A_1, B_1 — места этих центров, когда колесо C повернулось на какой-нибудь угол $ACA_1 = \lambda$ и когда по нашему знакоположению

$$A_1CD = L - \lambda, \quad A_1D_0C = N - \nu.$$

Изображая через M угол BC_1D и через μ изменение его, соответствующее повороту колеса C на угол $ACA_1 = \lambda$, находим

$$B_1C_1D = M + \mu.$$

Чтобы вывести уравнение, определяющее величину угла ν при каком-нибудь λ , берем проекцию ломаной линии $CA_1B_1C_1$ на линию центров CC_1 и на линию, перпендикулярную к ней, что дает нам такие равенства:

$$\begin{aligned} A_1C \cos A_1CD + A_1B_1 \cos B_1D_0C + B_1C_1 \cos B_1C_1D &= CC_1, \\ A_1C \sin A_1CD - A_1B_1 \sin A_1D_0C + B_1C_1 \sin B_1C_1D &= 0. \end{aligned}$$

Замечая, что здесь

$$\begin{aligned} A_1C &= r, \quad B_1C_1 = r_1, \quad A_1B_1 = \rho + \rho_1, \quad CC_1 = R + R_1, \\ A_1CD &= L - \lambda, \quad A_1D_0C = N - \nu, \quad B_1C_1D = M + \mu, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} r \cos (L - \lambda) + (\rho + \rho_1) \cos (N - \nu) + r_1 \cos (M + \mu) &= R + R_1, \\ r \sin (L - \lambda) - (\rho + \rho_1) \sin (N - \nu) + r_1 \sin (M + \mu) &= 0, \end{aligned}$$

откуда, по исключении угла $M + \mu$, выходит

$$\begin{aligned} r_1^2 &= [R + R_1 - r \cos (L - \lambda) - (\rho + \rho_1) \cos (N - \nu)]^2 + \\ &+ [-r \sin (L - \lambda) + (\rho + \rho_1) \sin (N - \nu)]^2, \end{aligned}$$

что по раскрытии скобок приводится к следующему:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (R + R_1)^2 + (\rho + \rho_1)^2 + r^2 + 2r(\rho + \rho_1) \cos (L + N - \lambda - \nu) - \\ &- 2(R + R_1)[r \cos (L - \lambda) + (\rho + \rho_1) \cos (N - \nu)]. \end{aligned}$$

В частном предположении $\lambda = 0, \nu = 0$ это уравнение нам дает

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (R + R_1)^2 + (\rho + \rho_1)^2 + r^2 + 2r(\rho + \rho_1) \cos (L + N) - \\ &- 2(R + R_1)[r \cos L + (\rho + \rho_1) \cos N]. \end{aligned}$$

Вычитая это из предыдущего равенства, находим уравнение, которое может быть представлено под таким видом:

$$\frac{\cos(L + N - \lambda - v) - \cos(L + N)}{R + R_1} - \frac{\cos(N - v) - \cos N}{r} - \frac{\cos(L - \lambda) - \cos L}{\rho + \rho_1} = 0.$$

Чтобы вывести отсюда разложение угла v по степеням угла λ , полагаем

$$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2 + \dots,$$

где $K_1, K_2, \dots$ — искомые коэффициенты.

Внося эту величину v в уравнение и разлагая все члены его по степеням λ , находим, что оно приводится к такому равенству:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} (K_1 + 1) - \frac{\sin N}{r} K_1 - \frac{\sin L}{\rho + \rho_1} \right] \lambda + \\ & + \left[\frac{2 \sin(L + N) K_2 - \cos(L + N) (K_1 + 1)^2}{R + R_1} - \right. \\ & \left. - \frac{2 \sin N \cdot K_2 - \cos N \cdot K_1^2}{r} + \frac{\cos L}{\rho + \rho_1} \right] \frac{\lambda^2}{2} + \dots = 0, \end{aligned}$$

откуда для определения коэффициентов K_1, K_2 получаются равенства

$$\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} (K_1 + 1) - \frac{\sin N}{r} K_1 - \frac{\sin L}{\rho + \rho_1} = 0,$$

$$\frac{2 \sin(L + N) K_2 - \cos(L + N) \cdot (K_1 + 1)^2}{R + R_1} - \frac{2 \sin N \cdot K_2 - \cos N \cdot K_1^2}{r} + \frac{\cos L}{\rho + \rho_1} = 0,$$

которые дают нам

$$K_1 = \frac{\frac{\sin L}{\rho + \rho_1} - \frac{\sin(L + N)}{R + R_1}}{\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} - \frac{\sin N}{r}},$$

$$K_2 = \frac{\frac{\cos(L + N)}{R + R_1} (K_1 + 1)^2 - \frac{\cos N}{r} K_1^2 - \frac{\cos L}{\rho + \rho_1}}{2 \left(\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} - \frac{\sin N}{r} \right)}.$$

Для исключения из этих формул угла $L = ACD$ и угла $L + N = ADC + ACD$ мы из треугольника ACD выводим, что

$$\begin{aligned}\sin ACD &= \frac{AD}{AC} \sin ADC, \\ \sin (ADC + ACD) &= \sin CAD = \frac{CD}{AC} \sin ADC, \\ \cos ACD &= \frac{CD - AD \cos ADC}{AC}, \\ \cos (ADC + ACD) &= -\cos CAD = -\frac{AD - CD \cos ADC}{AC},\end{aligned}$$

что по нашему знакоположению представится так:

$$\begin{aligned}\sin L &= \frac{\rho}{r} \sin N, \quad \sin (L + N) = \frac{R}{r} \sin N, \\ \cos L &= \frac{R - \rho \cos N}{r}, \quad \cos (L + N) = -\frac{\rho - R \cos N}{r}.\end{aligned}$$

Внося же величины

$$\sin L, \quad \sin (L + N), \quad \cos L, \quad \cos (L + N)$$

в вышенайденные выражения коэффициентов K_1, K_2 , по приведении получаем

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}, \\ K_2 &= \frac{(\rho - R \cos N)(K_1 + 1)^2 + (R + R_1) \left[\cos N \cdot K_1^2 + \frac{R - \rho \cos N}{\rho + \rho_1} \right]}{2R_1 \sin N}.\end{aligned}$$

Так выражаются коэффициенты K_1, K_2 в ряду

$$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2 + \dots, \quad (4)$$

определяющем величину угла v при всяком значении угла λ и каковы бы ни были ρ, ρ_1, N .

§ 7. Полагая в найденной нами формуле

$$\lambda = \frac{2}{3} l,$$

мы замечаем, что этой величине λ соответствует такая величина v :

$$v = \frac{2}{3} K_1 l + \frac{4}{9} K_2 l^2 + \dots$$

В рассматриваемом же нами зацеплении по формуле (3) (§ 5) этот угол должен иметь такую величину:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \cdot \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2;$$

приравнивая друг другу эти два выражения одного и того же угла, мы выводим относительно рассматриваемого нами зацепления уравнение, которое по сокращении на $\frac{2}{3} l$ приводится к такому виду:

$$K_1 - \frac{R}{\rho} \cos N + 1 + \frac{2}{3} \left[K_2 - \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \right] l = 0, \quad (5)$$

где K_1 , K_2 имеют значения, показанные в § 6. Значение K_1 , как видели, дается такою простою формулою:

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}. \quad (6)$$

Что же касается формулы, определяющей значение K_2 , то она, при той степени приближения, которою мы ограничиваемся, легко может быть значительно упрощена. Для этого мы замечаем, что при вычислении этой величины можно пренебрегать даже первыми степенями l , так как она входит множителем только при последнем из удерживаемых нами членов. По уравнению же (5), с точностью до первой степени l , мы находим такое равенство:

$$K_1 - \frac{R}{\rho} \cos N + 1 = 0, \quad (7)$$

при помощи которого вышенайденное выражение K_2 можно легко упростить.

В самом деле, внося на основании этого равенства разность

$$\frac{R}{\rho} \cos N - 1$$

вместо K_1 в выражение K_2 , показанное в § 6, мы замечаем, что числитель этого выражения приводится к следующему:

$$(\rho + R_1 \cos N) \frac{R^2}{\rho^2} \cos^2 N - 2(R + R_1) \frac{R}{\rho} \cos^2 N + \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} (R + \rho_1 \cos N).$$

Но по равенству (7), где, по (6),

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho_1 + \rho)},$$

находим

$$\frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)} - \frac{R}{\rho} \cos N + 1 = 0,$$

что приводится к такому равенству:

$$\frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} = \frac{RR_1}{\rho\rho_1} \cos N. \quad (8)$$

Заменяя же на основании этого равенства в последнем члене рассматриваемого нами выражения множитель

$$\frac{R + R_1}{\rho + \rho_1}$$

множителем $\frac{RR_1}{\rho\rho_1} \cos N$, находим, что это выражение приводится к следующему:

$$\left[\frac{R^2 R_1}{\rho^2} \cos^2 N - \frac{(R + R_1) R}{\rho} \cos N + \frac{R^2 R_1}{\rho\rho_1} \right] \cos N,$$

а это, по замене

$$R + R_1$$

через

$$\frac{RR_1(\rho + \rho_1)}{\rho\rho_1} \cos N$$

на основании (8), обращается в такое выражение:

$$\frac{R^2 R_1}{\rho\rho_1} (1 - \cos^2 N) \cos N,$$

или

$$\frac{R^2 R_1}{\rho \rho_1} \sin^2 N \cos N,$$

что приводится к

$$\frac{R(R + R_1)}{\rho + \rho_1} \sin^2 N$$

заменой, по (8), величины

$$\frac{\cos N}{\rho \rho_1}$$

через

$$\frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \frac{1}{RR_1}.$$

Таким образом, мы доходим до замены числителя в выражении коэффициента K_2 , показанного в конце § 6, следующей величиной:

$$\frac{R(R + R_1)}{\rho + \rho_1} \sin^2 N,$$

через что получается такая простая формула для определения этого коэффициента:

$$K_2 = \frac{R}{2R_1} \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \sin N. \quad (9)$$

Внося найденные нами величины K_1 , K_2 в уравнение (5) и заменяя по (8) в последнем члене его

$$\frac{R \cos N}{\rho}$$

через

$$\frac{R + R_1}{R_1} \frac{\rho_1}{\rho + \rho_1},$$

мы находим, что оно по сокращении приводится к такому виду:

$$\cos N - \frac{R + R_1}{RR_1} \frac{\rho \rho_1}{\rho + \rho_1} + \frac{1}{3R_1} \frac{(R_1 + 2R)\rho_1 - (R + 2R_1)\rho}{\rho + \rho_1} \sin N \cdot l = 0. \quad (10)$$

§ 8. Выведенное нами уравнение (10) представляет очень простое геометрическое свойство дуг, ограничивающих выступ и впадину зубьев в рассматриваемом нами зацеплении. Чтобы показать это

Замечая, что по положению

$$ACD - A_1CH = ACA_1 = l$$

$$ADC - A_1HC = N - (N - v) = v,$$
[illegible]

Фиг. 5.

$$\omega = l + v = (K_1 + 1)l + K_2 l^2,$$
$$\omega = \frac{R + R_1}{R_1} \frac{\rho_1}{\rho + \rho_1} l + \frac{R}{2R_1} \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \sin N \cdot l^2. \quad (11)$$

При помощи этого выражения угла $\omega = DAE$ нетрудно показать, что уравнение (10) представляет такое простое геометрическое свойство дуги DE :

„Конец E дуги DE в момент (фиг. 5) соприкосновения зубьев на линии центров лежит на круге, проходящем через D , точку соприкосновения первообразных кругов, и через P, P_1 — концы дуг DP, DP_1 , представляющих величину поворота колес C, C_1 в продолжение зацепления дуги DE с дугою DF “.

Чтобы показать это свойство дуги DE , проводим через точки D, P, P_1 круг и, изображая через E_1 точку, где этот круг пересекает хорду дуги DE , ищем длину линии DE_1 . Для определения этой длины мы замечаем, что по нашему обозначению имеем

$$ADC = N, \quad DAE = \omega, \quad DCP = l, \quad CD = R, \quad C_1D = R_1,$$

и что угол DC_1P_1 , представляющий величину поворота колеса C_1 в продолжение всего зацепления дуги DE с дугою DF , будет равняться

$$\frac{R}{R_1} DCP = \frac{R}{R_1} l.$$

Проведя же через точку D перпендикуляр GD к линии CC_1 и перпендикуляр DT к линии AD , мы замечаем, что эти перпендикуляры, будучи касательными к дугам DP, DP_1, DE , будут составлять с хордами этих дуг такие углы:

$$PDG = \frac{1}{2} DCP, \quad P_1DG = \frac{1}{2} DC_1P_1, \quad EDT = \frac{1}{2} ADE,$$

что по вышепоказанному обозначению дает

$$PDG = \frac{l}{2}, \quad P_1DG = \frac{Rl}{2R_1}, \quad EDT = \frac{\omega}{2}.$$

Что касается угла GDT , то по перпендикулярности его сторон со сторонами угла ADC находим, что

$$GDT = ADC$$

и, следовательно, по нашему обозначению угла ADC будем иметь

$$GDT = N.$$

Определяя на основании этого углы PDP_1 , P_1DE , PDE , образуемые линиями DP , DP_1 , DE , находим

$$\begin{aligned} PDP_1 &= PDG + P_1DG = \frac{l}{2} + \frac{R}{2R_1} l, \\ P_1DE_1 &= GDT - GDP_1 - EDT = N - \frac{R}{2R_1} l - \frac{\omega}{2}, \\ PDE_1 &= GDT + PDG - EDT = N + \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, определяя длину хорд DP , DP_1 по величине углов

$$DCP = l, \quad DC_1P_1 = \frac{R}{R_1} l$$

и длине радиусов

$$DC = R, \quad DC_1 = R_1,$$

находим

$$\begin{aligned} PD &= 2CD \cdot \sin \frac{PCD}{2} = 2R \sin \frac{l}{2}, \\ DP_1 &= 2C_1D \cdot \sin \frac{DC_1P_1}{2} = 2R_1 \sin \frac{Rl}{2R_1}. \end{aligned}$$

Имея же длину хорд DP , DP_1 и величину углов, образуемых ими и хордой DE_1 , мы легко найдем длину последней на основании уравнения

$$DP \sin (P_1DE_1) - DP_1 \sin (PDE_1) + DE_1 \sin (PDP_1) = 0,$$

которое имеет место для всяких трех хорд, проведенных из одной точки окружности.

Внеся сюда вышенайденные величины линий DP , DP_1 и углов P_1DE_1 , PDE_1 , PDP_1 , получаем такое уравнение для определения длины DE_1 :

$$\begin{aligned} 2R \sin \frac{l}{2} \sin \left(N - \frac{Rl}{2R_1} - \frac{\omega}{2} \right) - 2R_1 \sin \frac{Rl}{2R_1} \cdot \sin \left(N + \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2} \right) + \\ + DE_1 \sin \left(\frac{l}{2} + \frac{Rl}{2R_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы вывести отсюда величину DE_1 с точностью до второго порядка, разлагаем первые два члена с точностью до третьего порядка, а множитель при DE_1 с точностью до второго порядка. Таким образом

находим

$$\frac{R+R_1}{2R_1} DE_1 \cdot l - \frac{(R+R_1)R}{2R_1} \cos N \cdot l^2 + \\ + \left[\frac{R_1^2 - R^2}{12R_1^2} Rl - \frac{(R+R_1)R}{4R_1} \omega \right] \sin N \cdot l^2 = 0,$$

откуда получается такая величина DE_1 :

$$DE_1 = R \cos N \cdot l + R \left(\frac{\omega}{2} + \frac{R-R_1}{6R_1} l \right) \sin N \cdot l,$$

что по внесении величины ω (11), с точностью до второй степени l , приводится к следующему:

$$DE_1 = R \cos N \cdot l + R \frac{(4R+2R_1)\rho_1 + (R-R_1)\rho}{6R_1(\rho+\rho_1)} \sin N \cdot l^2.$$

Так с точностью до второй степени l включительно выражается длина линии DE_1 , определяющей точку E_1 пересечения хорды DE с кругом, проходящим через три точки D, P, P_1 .

Но определяя на основании вышенайденных формул длину хорды DE , мы замечаем, что она с точностью до вторых степеней может быть представлена дугою DE_1 и, следовательно, произведением

$$\rho \cdot \omega,$$

так как по нашему знакоположению радиус есть ρ , а длина ее в частях радиуса есть ω . На основании этого по формуле (11) находим такое выражение для величины хорды DE :

$$DE = \frac{R+R_1}{R_1} \frac{\rho\rho_1}{\rho+\rho_1} l + \frac{R\rho}{2R_1} \frac{R+R_1}{\rho+\rho_1} \sin N \cdot l^2.$$

Сличая эту величину хорды DE с вышенайденною длиною линии DE_1 , мы замечаем, что разность их выражается так:

$$DE - DE_1 = \left(\frac{R+R_1}{R_1} \frac{\rho\rho_1}{\rho+\rho_1} - R \cos N \right) l - \\ - \frac{R}{3R_1} \frac{(2R-R_1)\rho_1 - (2R_1+R)\rho}{\rho+\rho_1} \sin N \cdot l^2.$$

Сравнивая же это выражение разности $DE - DE_1$ с первой частью

уравнения (10), мы замечаем, что они отличаются друг от друга только множителем $—lR$, откуда видно, что уравнение (10) приводится к равенству

$$DE - DE_1 = 0,$$

по которому E_1 , точка пересечения хорды DE с рассматриваемым нами кругом, должна совпадать с точкой E , концом хорды DE , что и следовало показать.

§ 9. Повторяя относительно дуги DF , представляющей очертание впадины колеса C_1 , все то, что было выведено нами относительно дуги DE , ограничивающей выступ колеса C , мы получаем те же формулы, только с заменю букв, соответствующих колесу C , буквами, соответствующими колесу C_1 , и обратно. Что касается угла l , определяющего величину поворота колеса в продолжение зацепления дуги DE с дугой DF , он заменится величиною

$$—\frac{R}{R_1} l,$$

так как колесо C_1 , в продолжение этого зацепления, должно повернуться на угол $\frac{R}{R_1} l$ и притом в сторону противоположную. Взамен же угла $\omega = DAE$, представляющего взаимное наклонение радиусов AD , AE , проходящих через концы дуги DE , мы будем иметь

$$\omega_1 = DBF$$

со знаком $—$, вследствие обратного положения радиусов DB , BF , проходящих через концы дуги DF . Формула, получаемая таким образом из уравнения (11), приводится к следующему:

$$\omega_1 = \frac{R+R_1}{R} \frac{\rho}{\rho+\rho_1} l - \frac{R}{2R_1} \frac{R+R_1}{\rho+\rho_1} \sin N \cdot l^2, \quad (13)$$

уравнение же (10) остается без изменения, и из этих уравнений относительно дуги DF выходит то же самое, что мы вывели в предыдущем параграфе относительно дуги DE , т. е., что конец ее F лежит тоже на круге, проходящем через точки D , P , P_1 . Таким образом мы доходим до следующего заключения относительно рассматриваемого нами зацепления:

„В момент соприкосновения зубьев на линии центров лежат на одном круге следующие пять точек: концы выступа и действующей части выемки зубьев, соприкасающихся на линии центров, точки первообразных кругов, которые приходят на линию центров при конце зацепления рассматриваемых зубьев, и точка соприкосновения первообразных кругов“.

Так как в формулах наших, при определении положения различных точек, пренебрегались степени l выше второй, то это свойство рассматриваемого нами зацепления верно только до l^3 . Но по незначительности величины l , представляющей поворот колеса при действии одной пары зубьев сверху или снизу линии центров, такая точность для практики совершенно достаточна.

На основании формул (11) и (13) нетрудно показать другое свойство рассматриваемых нами зубчатых колес. Для этого мы замечаем, что эти формулы в сумме дают

$$\omega + \omega_1 = \frac{R + R_1}{R_1} l,$$

а так как по нашему знакоположению

$$\omega = DAE, \quad \omega_1 = DBF, \quad l = DCP$$

и по вышезамеченному

$$\frac{Rl}{R_1} = DC_1P_1,$$

то это уравнение приводится к следующему:

$$DAE + DBF = DCP + DC_1P_1.$$

Рассматривая углы, образуемые хордами дуг DP , DP_1 , DE , DF с их касательными DG , DT , находим, что

$$\begin{aligned} PDG &= \frac{1}{2} DCP, & P_1DG &= \frac{1}{2} DC_1P_1, \\ EDT &= \frac{1}{2} DAE, & FDT &= \frac{1}{2} DBF, \end{aligned}$$

вследствие чего предыдущее равенство дает

$$EDT + FDT = PDG + P_1DG,$$

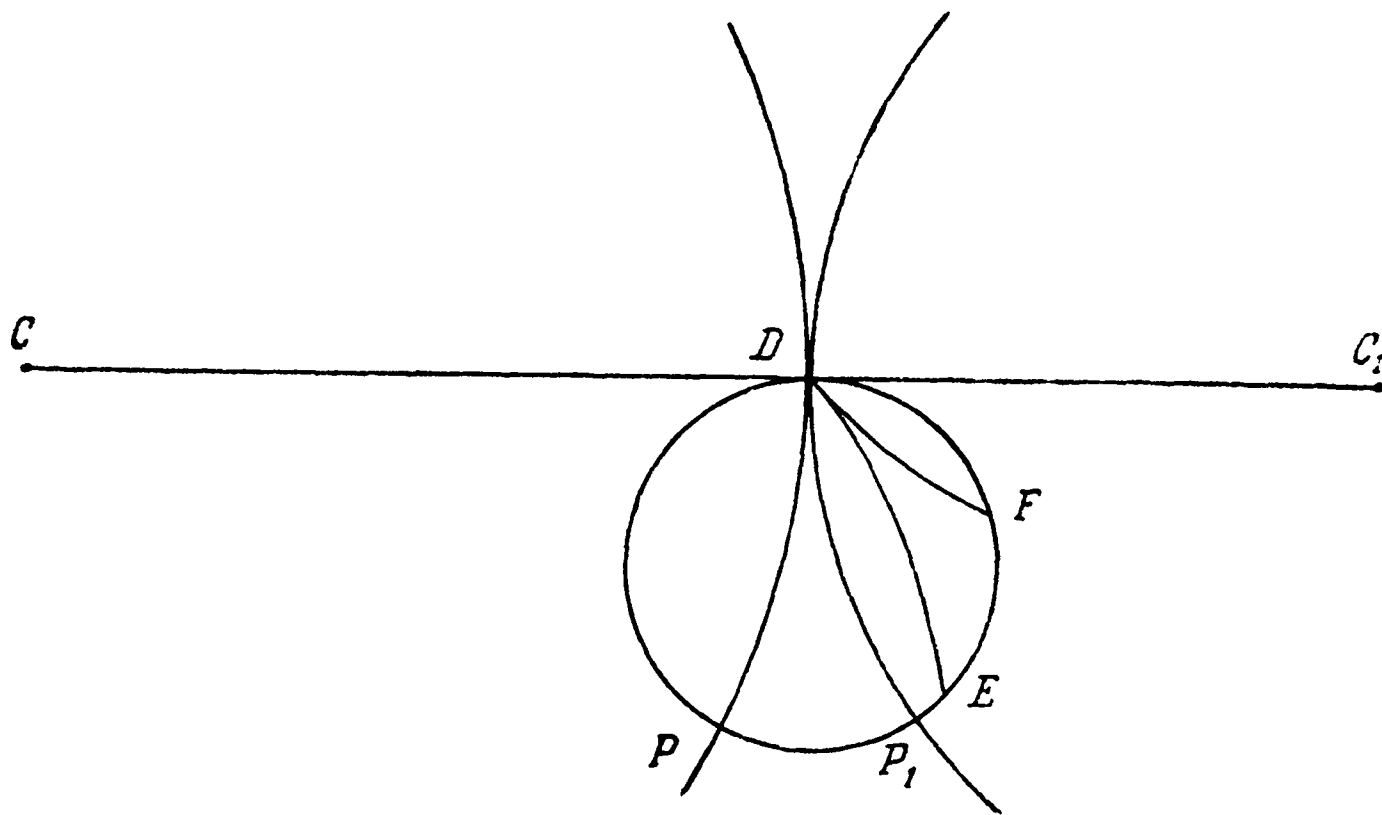
откуда выходит

$$EDF = PDP_1;$$

это показывает нам, что углы, составляемые хордами DP , DP_1 и хордами DE , DF , равны между собою. Замечая же, что точки P , P_1 , F , E по вышепоказанному должны лежать на одном круге с точкою D , мы из равенства этих углов заключаем о равенстве расстояний P от P_1 и E от F , откуда выходит такое свойство рассматриваемого нами зацепления:

„Расстояние между концами выступа и действующей части впадины двух зубьев, соприкасающихся на линии центров, равно расстоянию точек первообразных кругов, которые приходят на линию центров при конце зацепления этих зубьев“.

Так как при черчении зубчатых колес всегда даются первообразные круги и дуги зацеплений до линии центров и после линии центров, то по вышепоказанному мы всегда можем найти круг, на котором должны лежать конец выступа зуба одного колеса и конец действующей части впадины другого колеса, и узнать расстояние между этими концами.



Фиг. 6.

Пусть будут (фиг. 6) C , C_1 —центры первообразных кругов, D —точка их соприкосновения. Для определения очертания выступа на колесе C и действующей части впадины колеса C_1 на первообразных кругах C , C_1 откладываем дуги DP , DP_1 , равные дугам зацепления ниже линии центров. Проведя через точки D , P , P_1 круг, мы на основании вышедоказанного заключаем, что на этом круге должны лежать и конец

зуба колеса C и конец действующей части впадины колеса C_1 в момент, когда соприкосновение происходит на линии центров, и что между этими концами должно быть расстояние, равное линии PP_1 . Выбор места для этих концов на круге DPP_1 будет зависеть от тех или других требований практики: чем дальше от точки D возьмутся эти места, тем, очевидно, будет длиннее выступ колеса C , глубже впадина колеса C_1 , а вместе с тем будут уже и конец зуба на колесе C и впадина на колесе C_1 при дне ее. Выбравши эти места на круге DPP_1 , а также и направление нормали соприкасающихся зубьев в точке D , мы найдем требуемые очертания выступа и впадины, проведя через точку D дуги кругов, нормальные в этой точке к известной линии и проходящие через известные точки круга DPP_1 .

§ 10. Переходим теперь к тому случаю, когда, очерчивая выступы и впадины колес дугами кругов, мы можем располагать выбором двух величин для уменьшения по возможности неправильностей в зацеплении, неизбежных по свойству кругов.

Разлагая разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

в ряд по восходящим степеням λ и ограничиваясь четвертою степенью λ , мы замечаем, что, по § 3, эта разность должна приводиться к полиному

$$K_4(\lambda^4 - 1,638 l \lambda^3 + 0,638 l^2 \lambda^2),$$

откуда для определения величин λ , обращающих производную

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

в нуль, получается такое уравнение:

$$4\lambda^3 - 1,638 \cdot 3l \lambda^2 + 0,638 \cdot 2l^2 \lambda = 0.$$

Решая же это уравнение, находим

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 0,365 l, \quad \lambda = 0,865 l.$$

Из этого, по § 4, мы заключаем, что общая нормаль соприкасающихся зубьев в рассматриваемом нами зацеплении должна проходить через

точку соприкосновения первообразных кругов при следующих величинах угла λ :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 0,365 l, \quad \lambda = 0,865 l.$$

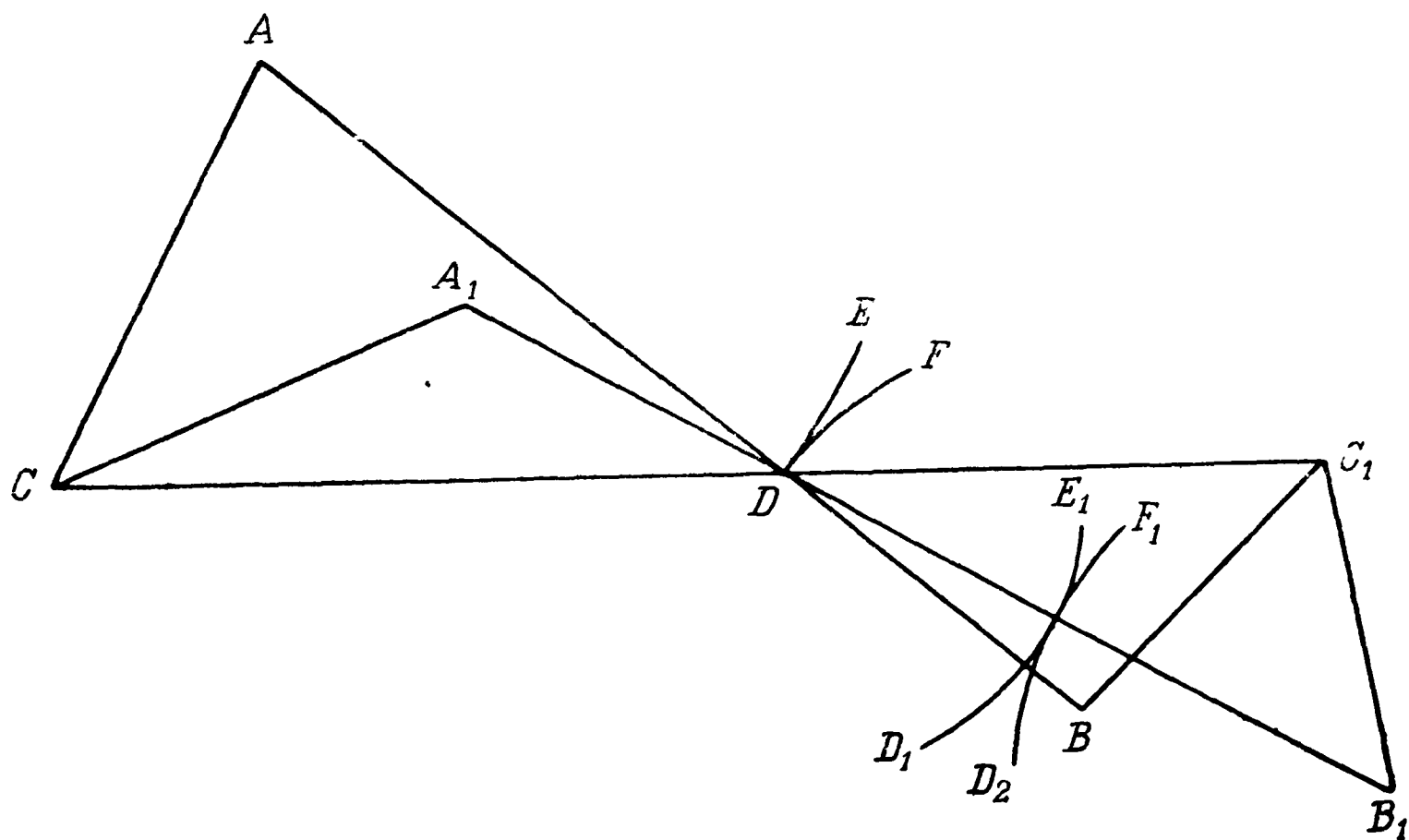
Уравнения, которые отсюда вытекают относительно рассматриваемого нами зацепления, как мы увидим, особенно легко получаются при помощи угла ν , определяющего (§ 5) изменения наклона общей нормали соприкасающихся зубьев.

Определяя по формуле (4) значения угла ν , соответствующие вышенайденным величинам λ , мы замечаем, что первая из них есть нуль, а последние найдутся из формулы

$$\nu = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2,$$

когда здесь положим

$$\lambda = 0,365 l, \quad \lambda = 0,865 l.$$



Фиг. 7.

Изображая эти величины ν через ν_1 , ν_2 , мы по вышесказанному будем иметь

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0,365 K_1 l + 0,365^2 K_2 l^2, \\ \nu_2 &= 0,865 K_1 l + 0,865^2 K_2 l^2. \end{aligned}$$

Приступая к выводу уравнений, мы, согласно с прежним обозначением, полагаем (фиг. 7), что C , C_1 суть центры первообразных

кругов; $CD = R$, $C_1D = R_1$ — их радиусы; A, B — места центров дуг DE , DF , когда они соприкасаются на линии центров; $\rho = AD$, $\rho_1 = BD$ — радиусы этих дуг; $AC = r$, $BC_1 = r_1$ — расстояние точек A, B от центров C, C_1 ; $N = ADC$ — угол наклона общей нормали дуг DE , DF к линии центров. Изображая через A_1, B_1 места, занимаемые центрами дуг DE, DF в тот момент, когда угол наклона нормали соприкасающихся зубьев уменьшился на v_1 , мы замечаем, что линия A_1B_1 будет представлять положение этой нормали, соответствующее $\lambda = 0,365 l$, и, следовательно, эта линия, по вышесказанному, должна проходить через D , точку соприкосновения первообразных кругов. Рассматривая же треугольники $CAD, CA_1D, C_1BD, C_1B_1D$, где по нашему знакоположению

$$\begin{aligned} AC = A_1C = r, \quad BC_1 = B_1C_1 = r_1, \\ AD = \rho, \quad BD = \rho_1, \quad AB = A_1B_1 = \rho + \rho_1, \\ CD = R, \quad C_1D = R_1, \quad ADC = BDC_1 = N, \\ A_1DC = B_1DC_1 = N - v_1, \end{aligned}$$

и полагая

$$AD - A_1D = B_1D - BD = h,$$

получаем такие равенства:

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos N, \\ r^2 &= (\rho - h)^2 + R^2 - 2(\rho - h)R \cos(N - v_1), \\ r_1^2 &= \rho_1^2 + R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos N, \\ r_1^2 &= (\rho_1 + h)^2 + R_1^2 - 2(\rho_1 + h)R_1 \cos(N - v_1), \end{aligned}$$

что по исключении r, r_1 нам дает

$$\begin{aligned} \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos N &= (\rho - h)^2 + R^2 - 2(\rho - h)R \cos(N - v_1), \\ \rho_1^2 + R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos N &= (\rho_1 + h)^2 + R_1^2 - 2(\rho_1 + h)R_1 \cos(N - v_1). \end{aligned}$$

Для исключения же из этих уравнений величины h решаем эти уравнения относительно $\rho - h$, $\rho_1 + h$ и полученные результаты складываем. Таким образом находим уравнение

$$\begin{aligned} \rho + \rho_1 - (R + R_1) \cos(N - v_1) &= \sqrt{\rho^2 - 2R\rho \cos N + R^2 \cos^2(N - v_1)} + \\ &+ \sqrt{\rho_1^2 - 2R_1\rho_1 \cos N + R_1^2 \cos^2(N - v_1)}, \end{aligned}$$

которое может быть представлено под видом

$$\begin{aligned} \rho + \rho_1 - (R + R_1) \cos(N - \varphi_1) = \\ = \sqrt{(\rho - R \cos N)^2 + R^2 [\cos^2(N - \varphi_1) - \cos^2 N]} + \\ + \sqrt{(\rho_1 - R_1 \cos N)^2 + R_1^2 [\cos^2(N - \varphi_1) - \cos^2 N]}. \end{aligned}$$

Полагая для сокращения

$$\frac{\cos^2(N - \varphi_1) - \cos^2 N}{\cos^2 N} = t_1 \quad (14)$$

и замечая, что это равенство дает

$$\cos(N - \varphi_1) = \cos N \cdot \sqrt{1 + t_1},$$

мы вышенайденное уравнение можем написать так:

$$\begin{aligned} \rho + \rho_1 - (R + R_1) \cos N \sqrt{1 + t_1} = \sqrt{(\rho - R \cos N)^2 + R^2 \cos^2 N \cdot t_1} + \\ + \sqrt{(\rho_1 - R_1 \cos N)^2 + R_1^2 \cos^2 N \cdot t_1}. \end{aligned}$$

Разлагая здесь все радикалы по степеням t_1 и сокращая все уравнение на t_1 , находим по перенесении всех членов в первую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \cos N}{\rho - R \cos N} + \frac{R_1^2 \cos N}{\rho_1 - R_1 \cos N} + R + R_1 - \\ - \frac{1}{4} \left[\frac{R^4 \cos^3 N}{(\rho - R \cos N)^3} + \frac{R_1^4 \cos^3 N}{(\rho_1 - R_1 \cos N)^3} + R + R_1 \right] t_1 + \\ + \frac{1}{8} \left[\frac{R^6 \cos^5 N}{(\rho - R \cos N)^5} + \frac{R_1^6 \cos^5 N}{(\rho_1 - R_1 \cos N)^5} + R + R_1 \right] t_1^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Делая же для сокращения

$$\frac{R \cos N}{\rho - R \cos N} = X, \quad \frac{R_1 \cos N}{\rho_1 - R_1 \cos N} = Y, \quad (15)$$

мы это уравнение можем написать так:

$$\begin{aligned} RX + R_1 Y + R + R_1 - \frac{1}{4} (RX^3 + R_1 Y^3 + R + R_1) t_1 + \\ + \frac{1}{8} (RX^5 + R_1 Y^5 + R + R_1) t_1^2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Повторяя те же суждения относительно угла φ_2 , соответствующего повороту колеса C на угол $\lambda = 0,865 l$, при котором нормаль также

должна проходить через точку D , и полагая

$$\frac{\cos^2(N - \nu_2) - \cos^2 N}{\cos^2 N} = t_2, \quad (17)$$

находим уравнение

$$RX + R_1Y + R + R_1 - \frac{1}{4}(RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1)t_2 + \\ + \frac{1}{8}(RX^5 + R_1Y^5 + R + R_1)t_2^2 + \dots = 0, \quad (18)$$

подобное уравнению (16).

Решая эти уравнения, мы найдем величины X , Y , а по этим величинам формулы (15) нам дадут ρ , ρ_1 , длину радиусов, которыми должны быть описаны дуги в рассматриваемом нами зацеплении.

§ 11. Для облегчения решения уравнений (16), (18) мы сначала пренебрегаем в них членами, содержащими t_1 , t_2 в степенях выше первой. Таким образом мы получаем уравнения

$$RX + R_1Y + R + R_1 - \frac{1}{4}(RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1)t_1 = 0, \\ RX + R_1Y + R + R_1 - \frac{1}{4}(RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1)t_2 = 0$$

для определения приближенных величин X , Y , и эти уравнения, как нетрудно заметить, приводятся к следующим:

$$RX + R_1Y + R + R_1 = 0, \\ RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1 = 0.$$

Для решения этих уравнений мы выводим из первого

$$Y = -\frac{R}{R_1}X - \frac{R}{R_1} - 1, \quad (19)$$

и эту величину Y вставляем во второе, что дает нам такое уравнение

$$RX^3 + R_1 \left(-\frac{R}{R_1}X - \frac{R}{R_1} - 1 \right)^3 + R + R_1 = 0,$$

которое по раскрытии скобки и по сокращении на $R(R + R_1)$ приводится к следующему:

$$(R_1 - R)X^3 - 3RX^2 - 3(R + R_1)X - R - 2R_1 = 0.$$

Решая это уравнение, мы находим, что оно имеет два корня, равных -1 , и один корень, равный

$$\frac{R + 2R_1}{R_1 - R}.$$

Замечая же по формулам (15), что X может равняться -1 только при обращении радиуса ρ в нуль, мы заключаем, что корни этого уравнения, равные -1 , не соответствуют нашей задаче, а потому за искомую величину X должны взять последний корень

$$\frac{R + 2R_1}{R_1 - R}.$$

Переходя к определению Y , мы полагаем в формуле (19)

$$X = \frac{R + 2R_1}{R_1 - R},$$

и по этой формуле находим, что

$$Y = \frac{R_1 + 2R}{R - R_1}.$$

Так определяются первые приближенные величины X , Y . Для определения величин X , Y более точных, полагаем

$$\begin{aligned} X &= \frac{R + 2R_1}{R_1 - R} + \alpha, \\ Y &= \frac{R_1 + 2R}{R - R_1} + \beta, \end{aligned} \quad (20)$$

изображая через α , β погрешности вышенайденных величин X , Y .

Внося эти новые величины X , Y в уравнения (16), (18) и откидывая члены, которые относительно α , β , t_1 , t_2 порядка выше второго, находим

$$\begin{aligned} R\alpha + R_1\beta - \frac{3}{4} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 \alpha + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \beta \right] t_1 + \\ + \frac{1}{8} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] t_1^2 = 0, \\ R\alpha + R_1\beta - \frac{3}{4} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 \alpha + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \beta \right] t_2 + \\ + \frac{1}{8} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] t_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Ограничиваясь при определении величин α , β первыми степенями t_1 , t_2 , мы замечаем, что при такой степени приближения оба эти уравнения предполагают

$$R\alpha + R_1\beta = 0.$$

Чтобы получить другое простое уравнение между α , β , мы вычитаем предыдущие уравнения одно из другого, что дает нам по сокращении на $\frac{3}{4}(t_2 - t_1)$

$$\begin{aligned} & R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 \alpha + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \beta = \\ & = \frac{1}{6} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] (t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Приступая к определению α , β на основании выведенных нами уравнений, мы из предпоследнего находим

$$\beta = -\frac{R}{R_1} \alpha$$

и эту величину β вносим в последнее уравнение, через что оно обращается в следующее:

$$\begin{aligned} & R \left[\left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 - \left(\frac{R_1 + 2R}{R_1 - R} \right)^2 \right] \alpha = \\ & = \frac{1}{6} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] (t_1 + t_2), \end{aligned}$$

откуда по сокращении получается такая величина α :

$$\alpha = \frac{R_1 (R + 2R_1) (R_1 + 2R)}{2 (R_1 - R)^3} (t_1 + t_2).$$

Вставляя же эту величину α в вышенайденное выражение β через α , получаем

$$\beta = \frac{R (R + 2R_1) (R_1 + 2R)}{3 (R_1 - R)^3} (t_1 + t_2).$$

Так находим мы величины α , β с точностью до первых степеней t_1 , t_2 , и эти величины по внесении в формулы (20) нам дают с тою же

степенью точности

$$X = \frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \left[1 + \frac{R_1(R_1 + 2R)}{2(R_1 - R)^2} (t_1 + t_2) \right],$$

$$Y = \frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \left[1 + \frac{R(R + 2R_1)}{2(R - R_1)^2} (t_1 + t_2) \right].$$

§ 12. Внося эти величины X, Y в формулы (15), мы находим такие уравнения для определения радиусов ρ, ρ_1 :

$$\frac{R \cos N}{\rho - R \cos N} = \frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \left[1 + \frac{R_1(R_1 + 2R)}{2(R_1 - R)^2} (t_1 + t_2) \right],$$

$$\frac{R_1 \cos N}{\rho_1 - R_1 \cos N} = \frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \left[1 + \frac{R(R + 2R_1)}{2(R - R_1)^2} (t_1 + t_2) \right].$$

Решая эти уравнения и ограничиваясь членами первого порядка относительно t_1, t_2 , получаем

$$\rho = \frac{3RR_1 \cos N}{R + 2R_1} \left[1 - \frac{(R_1 + 2R)(t_1 + t_2)}{6(R_1 - R)} \right],$$

$$\rho_1 = \frac{3RR_1 \cos N}{R_1 + 2R} \left[1 - \frac{(R + 2R_1)(t_1 + t_2)}{6(R - R_1)} \right].$$

Для определения величины $t_1 + t_2$, заключающейся в этих формулах, мы замечаем, что формулы (14), (17), будучи разложены в ряды по степеням ν , дают с точностью до второй степени

$$t_1 = \frac{2 \cos N \sin N}{\cos^2 N} \nu_1 = 2 \operatorname{tang} N \cdot \nu_1,$$

$$t_2 = \frac{2 \cos N \sin N}{\cos^2 N} \nu_2 = 2 \operatorname{tang} N \cdot \nu_2.$$

Но по § 10, с точностью до второй степени l , имеем

$$\nu_1 = 0,365 K_1 l, \quad \nu_2 = 0,865 K_1 l,$$

вследствие чего сумма $t_1 + t_2$, с точностью до второй степени l , выразится так:

$$t_1 + t_2 = 2(0,365 + 0,865) K_1 \operatorname{tang} N \cdot l = 2,460 K_1 \operatorname{tang} N \cdot l,$$

где, по (6), множитель K_1 имеет такую величину:

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)},$$

что по внесении вышенайденных величин ρ , ρ_1 приводится, с точностью до первых степеней t_1 , t_2 не включительно, к следующему

$$K_1 = \frac{R - R_1}{3R_1}.$$

Внося эту величину K_1 в вышенайденное выражение суммы $t_1 + t_2$, получаем

$$t_1 + t_2 = \frac{2,460}{3} \frac{R - R_1}{R_1} \tan N \cdot l = 0,820 \frac{R - R_1}{R_1} \tan N \cdot l,$$

а эта величина $t_1 + t_2$ по внесении в вышенайденные выражения радиусов ρ , ρ_1 дает

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3RR_1 \cos N}{R + 2R_1} \left[1 + 0,137 \frac{R_1 + 2R}{R_1} \tan N \cdot l \right], \\ \rho_1 &= \frac{3RR_1 \cos N}{R_1 + 2R} \left[1 - 0,137 \frac{R + 2R_1}{R_1} \tan N \cdot l \right]. \end{aligned}$$

Так определяются радиусы ρ , ρ_1 , которыми должны быть очерчены в рассматриваемом нами зацеплении выступы колеса C и впадины колеса C_1 .

§ 13. Для определения длины дуг, которыми будут очерчены выступы и впадины колес в рассматриваемом нами зацеплении, мы замечаем, что, по (§ 8), с точностью до l^3 имеем

$$\omega = (K_1 + 1)l + K_2 l^2,$$

где ω — длина дуги, ограничивающей выступ колеса C_1 , выраженная в частях радиуса, а коэффициенты K_1 , K_2 , по § 6, имеют такие величины:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}, \\ K_2 &= \frac{(\rho - R \cos N)(K_1 + 1)^2 + (R + R_1) \left[\cos N \cdot K_1^2 + \frac{R - \rho \cos N}{\rho + \rho_1} \right]}{2R_1 \sin N}. \end{aligned}$$

Внося в эти выражения коэффициентов K_1 , K_2 найденные нами (§ 12) величины радиусов ρ , ρ_1 и ограничиваясь в выражении K_1 первой степенью l , а в выражении K_2 нулевой степенью, получаем

$$K_1 + 1 = \frac{R + 2R_1}{3R_1} \left(1 - 0,137 \frac{R_1 + 2R}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l \right)$$

$$K_2 = \frac{(R + 2R_1)(R_1 + 2R)}{18R_1^2} \operatorname{tang} N,$$

что по вставке в вышепоказанную величину ω , с точностью до l^3 , нам дает

$$\omega = \frac{R + 2R_1}{3R_1} \left[1 + \left(\frac{1}{6} - 0,137 \right) \frac{R_1 + 2R}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l \right] l.$$

Заменяя же здесь ω через $-\omega_1$, l через $-\frac{R}{R_1} l$, R через R_1 , ρ через ρ_1 и обратно, мы по § 9 найдем формулу для определения ω_1 , длины дуги, ограничивающей впадину колеса C_1 , выраженную в частях радиуса. Формула эта по сокращении приводится к следующему:

$$\omega_1 = \frac{R_1 + 2R}{3R_1} \left[1 - \left(\frac{1}{6} - 0,137 \right) \frac{R + 2R_1}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l \right] l.$$

На основании выведенных нами формул мы находим, что сумма

$$\omega + \omega_1$$

равняется

$$\frac{R + R_1}{R_1} l$$

и что произведение

$$\rho \cdot \omega$$

с точностью до l^3 приводится к выражению

$$R \cos N \cdot l + \frac{R(R_1 + 2R)}{6R_1} \sin N \cdot l^2,$$

одинаковому с выражением (§ 8) хорды DE_1 , получаемым из формулы

$$DE_1 = R \cos N \cdot l + R \left(\frac{\omega}{2} + \frac{R - R_1}{6R_1} l \right) \sin N \cdot l$$

подстановкою в нее величины угла ω . Откуда, по сказанному в § 8, мы заключаем, что и здесь будут иметь место свойства, доказанные нами (§ 8 и 9) для того случая, когда при выборе дуг, ограничивающих выступы и впадины колес, можно располагать только одною величиною для уменьшения неправильностей зацепления. В этом случае, как видели (§ 9), можно менять согласно каким-либо требованиям практики направление нормали соприкасающихся зубьев на линии центров без перемены мест, выбранных (фиг. 6) на круге DPP_1 для конца выступа колеса C и конца действующей части выемки колеса C_1 . В случае же, который мы теперь рассматриваем, положение этих концов вполне определяет направление вышепоименованной нормали, так как по § 8 (фиг. 5)

$$N = GDT = GDE + EDT = GDE + \frac{\omega}{2},$$

что, по внесении вышенайденной величины ω и по вставке в нее значений ρ , ρ_1 , дает уравнение, определяющее угол N по углу GDE . Замечая же, что в этом случае получается высшая степень правильности, которой можно достигнуть в зацеплении с зубьями, ограниченными дугами кругов, мы заключаем, что всякий раз, когда направление нормали AB выбирается согласно каким-либо требованиям практики, надобно стараться, чтобы это направление по возможности менее разнилось с направлением, находимым по вышесказанному.

Так как по вышенайденным величинам ω , ω_1 , с точностью до первой степени l , находим

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1},$$

а по § 8 (фиг. 5)

$$\begin{aligned}\omega &= DAE = 2EDT, \\ \omega_1 &= DBF = 2FDT,\end{aligned}$$

то, с точностью до l , будем иметь

$$\frac{FDT}{EDT} = \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1}.$$

Из этого видно, что при вышепоказанном направлении нормали AB соприкасающихся зубьев общая касательная их DT делит дугу

FE на части, которых отношение, с точностью до l , равняется величине

$$\frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1},$$

откуда выходит очень простое построение для определения по приближению направления касательной DT , соответствующего тому направлению нормали AB , при котором неправильности рассматриваемого нами зацепления становятся по возможности малыми. Заметим в заключение, что, определяя углы, образуемые (фиг. 5) хордами PD , P_1D с диаметром круга DPP_1 , проходящим через точку D , мы находим, что они, с точностью до l^2 , выражаются так:

$$\frac{R + 2R_1}{6R_1} l, \quad \frac{R_1 + 2R}{6R_1} l.$$

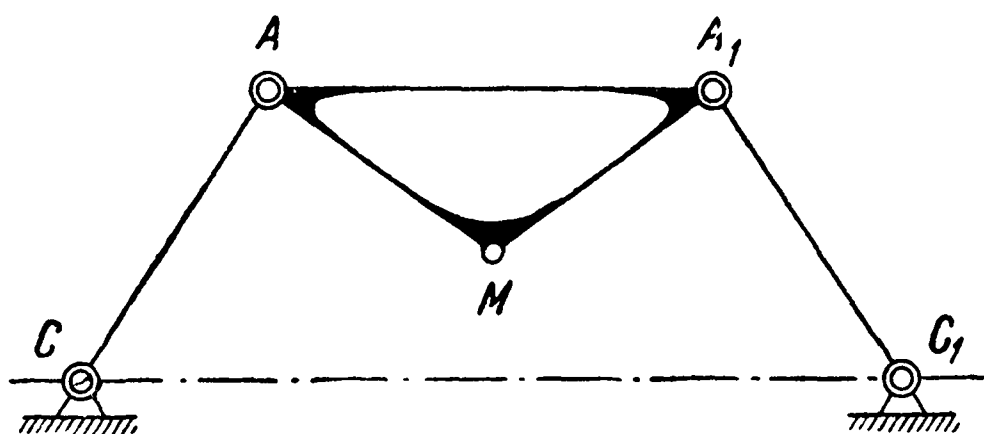
Сличая эти величины с величиною углов

$$PDG = \frac{\omega}{2}, \quad GDP_1 = \frac{\omega_1}{2},$$

определяемых вышенайденными формулами, мы замечаем, что они, до вторых степеней l^2 , одинаковы, откуда видно, что при этой степени приближения диаметр круга DPP_1 , проходящий через точку D , имеет такое наклонение к хордам DP , DP_1 , какое должна иметь DT , касательная дуг DE , DF , к хордам DE , DF для того, чтобы зубья действовали по возможности правильнее.

О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ КАКИХ-ЛИБО ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1. В записке, читанной 5 декабря 1878 г., „О параллелограмах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси“*, мы показали условия, при которых такие параллелограммы доставляют прямолинейное движение с возможно большей точностью.



Фиг. 1.

Параллелограммы эти состоят из двух линий (фиг. 1) AC , A_1C_1 , вращающихся около неподвижных точек C , C_1 , и линии AA_1 , сочлененной с подвижными концами этих линий; точка M , неизменно соединенная с линией AA_1 , доставляет желаемое движение.

В том случае, когда $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M$, механизм этот становится симметрическим около оси, перпендикулярной к линии, проходящей через центры C , C_1 . Этот частный случай простейших параллелограммов и был предметом вышеупомянутой записки. По формулам, данным в этой записке, получаются очень простые условия, необходимые и достаточные для того, чтобы такие механизмы давали прямолинейное движение с возможно большей точностью на бесконечно малом ходе. Условия эти могут быть представлены так, если рассматривать параллелограмм в среднем его положении, когда углы A_1AC , AA_1C_1 равны:

* Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, изд. АН СССР, М.—Л., 1948, т. IV, стр. 101—112.— *Ред.*

1) Углы A_1AC , AA_1C_1 равняются $\frac{A+2n\pi}{3}$, где A есть величина равных углов A_1AM , AA_1M , а n — какое-нибудь целое число.

2) Отношение длины вращающихся линий AC , A_1C_1 к сторонам $AM = A_1M$ треугольника AA_1M равняется

$$\frac{\cos^2 3\varphi}{\cos 2\varphi \cos^2 \varphi},$$

где φ есть величина углов A_1AC , AA_1C_1 .

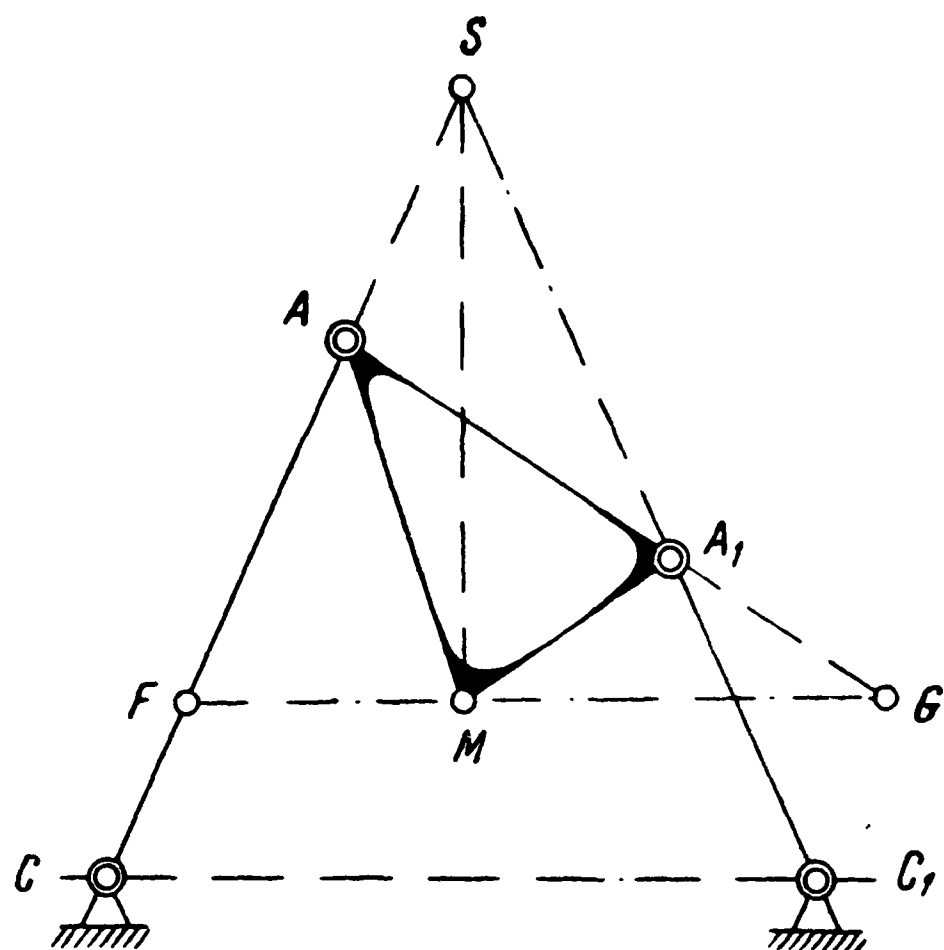
В том случае, когда эти условия выполнены, точка M описывает кривую линию, которая имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою, параллельной линии, проходящей через центры C , C_1 , и это есть высший предел приближения к прямой линии бесконечно малых дуг, которые могут быть получены при движении рассматриваемого нами механизма.

Случай бесконечно малых движений, для которого общие формулы, данные нами относительно простейших симметрических параллелограмов, приводятся к вышепоказанным равенствам, заслуживает особенного внимания как предел, к которому приближаются эти параллелограмы при уменьшении длины рассматриваемого хода точки M и от которого вообще мало разнятся случаи, представляющиеся на практике, где обыкновенно имеют в виду сделать по возможности близкою к прямой линии только незначительную часть траектории точки M . Что касается перехода от бесконечно малого хода точки M к конечному, это, как мы показали в мемуаре под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“ *, можно всегда сделать при помощи функций, *наименее уклоняющихся от нуля*.

§ 2. Мы теперь займемся рассмотрением тех же параллелограмов в общем их виде, когда (фиг. 2) вращающиеся линии AC , A_1C_1 и треугольник AA_1M — какие-нибудь. В этом общем виде, как будет показано, высший предел приближения к прямолинейному движению остается прежний, т. е. кривые, описываемые точкой M , не могут иметь сопри-

* Стр. 611—648 настоящего издания. — *Ред.*

косновения с прямою линиею порядка выше *пятого*. Условия, при которых такое соприкосновение имеет место, как мы увидим, в общем



Фиг. 2.

случае приводятся к равенствам, подобным тем, которые получены были нами для параллелограмов симметрических, а именно:

1) Углы A_1AC , AA_1C_1 , при которых точка M приходит на линию FG , имеющую соприкосновение 5-го порядка с кривою, ею описываемую, по углам треугольника AA_1M определяются равенствами

$$A_1AC = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3},$$

$$AA_1C_1 = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

где n , n_1 — какие-нибудь целые числа, равные или не равные между собою.

2) Отношения линий AC , A_1C_1 к сторонам AM , A_1M треугольника AA_1M определяются равенствами

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)}, \quad \frac{A_1C_1}{A_1M} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)},$$

где

$$\varphi = A_1AC = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3}, \quad \varphi_1 = AA_1C_1 = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

а γ есть угол, составляемый линиею AA_1 и касательною FG при этих величинах углов A_1AC , AA_1C_1 .

Что касается определения направления линии FG , касательной к кривой, описываемой точкою M , то по свойству кривых, описываемых движением в плоскости точек, неизменно связанных между собою, ли-

ния FG должна быть перпендикулярна к линии MS , проведенной из точки M в точку пересечения линий AC , A_1C_1 , чем вполне и определяется направление этой линии.

Чтобы обнять все случаи, когда данный треугольник AA_1M , двигаясь вершинами A , A_1 по кругам, вершиною M описывает кривую, имеющую с прямою линиею соприкосновение пятого порядка, числам n , n_1 должны быть даны такие величины:

$$0, 1, 2,$$

причем, по вышепоказанным равенствам, получается 9 систем для величины углов A_1AC , AA_1C_1 .

Определяя для каждой из 9 систем углов A_1AC , AA_1C_1 направление касательной FG , мы находим такие две величины угла γ :

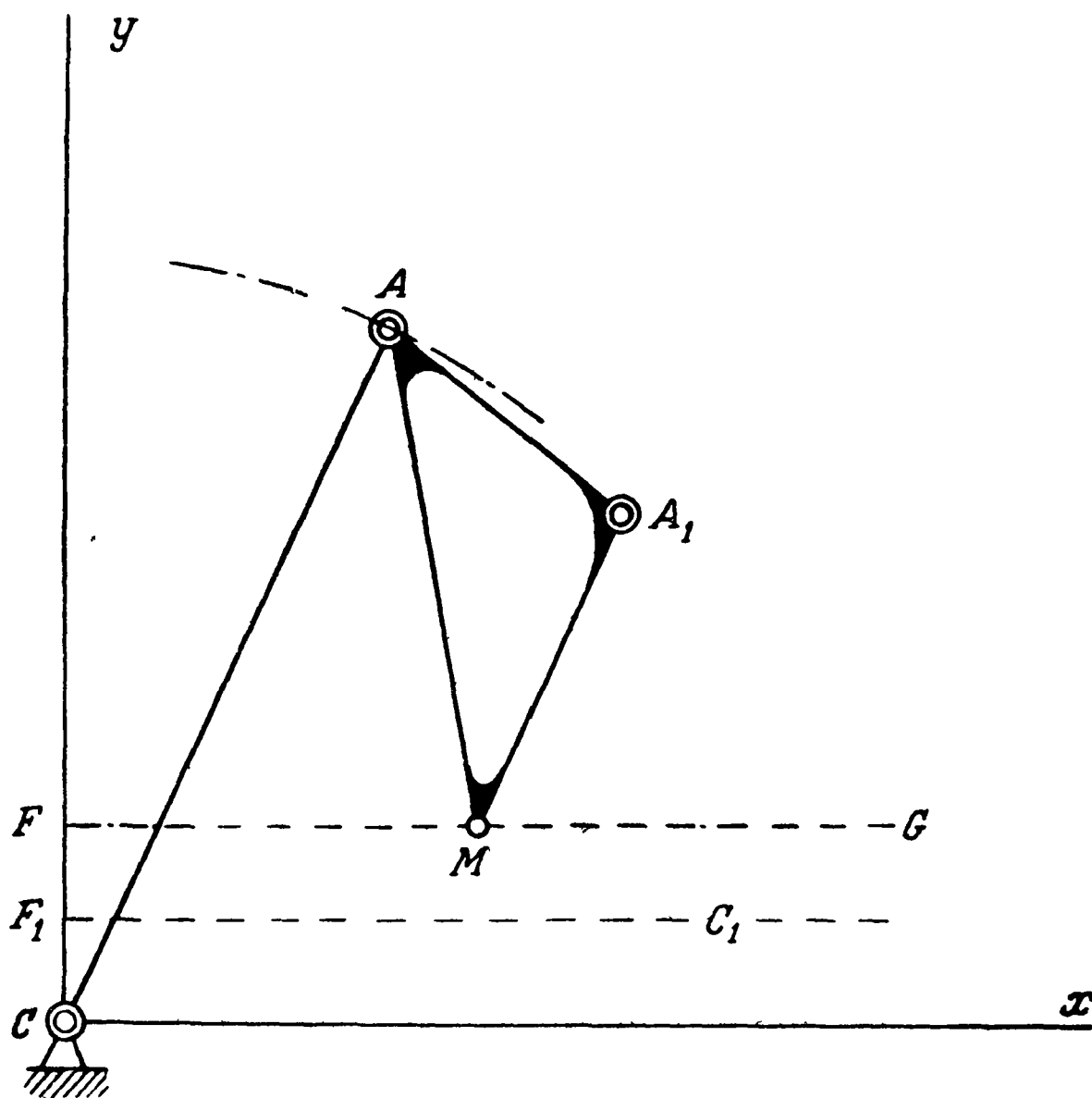
$$\gamma = AGM, \quad \gamma = AGM + \pi,$$

доставляющие для каждой системы углов A_1AC , AA_1C_1 две системы линий AC , A_1C_1 . Таким образом получится вообще 18 решений рассматриваемой задачи, когда принимается за данное треугольник AA_1M .

§ 3. Определяя уравнение кривой, описываемой точкою M при движении точек A , A_1 по кругам, мы замечаем, что условия, при которых эта кривая имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою линиею, представляются некоторой системой четырех уравнений степеней более или менее высоких. По сложности этих уравнений трудно было ожидать, чтобы они сводились на равенства столь простые, как вышепоказанные. Мы этого легко достигаем, замечая, что при бесконечно малых перемещениях треугольника AA_1M в рассматриваемом нами вопросе вершина M , с точностью до бесконечно малых порядка 6-го, будет двигаться по прямой FG . А потому с такою же степенью точности рассматриваемое нами движение треугольника AA_1M может быть определено движением точек M и A : первой по прямой, второй по кругу; и при этом движении треугольника, с точностью тоже до 6-го порядка, расстояние точки A_1 от C_1 должно оставаться величиною постоянною. Определяя условия, необходимые для этого, мы находим также систему четырех уравнений. Но эта система уравнений при помощи вспомогательных величин легко приводится к одному уравнению 4-й степени. Решая же это уравнение,

мы находим весьма простые соотношения между величинами, входящими в наш вопрос, откуда и получаются вышепоказанные равенства.

§ 4. Приступая (фиг. 3) к определению движения вершины A_1 треугольника AA_1M в том случае, когда вершина M движется по прямой FG , а вершина A по кругу, описанному из центра C радиусом AC , принимаем за начало координат центр C , за ось x линию, параллель-



Фиг. 3.

ную FG , за ось y перпендикуляр к ней. Переменные углы, составляемые линиями AM , AC с осью x , изображаем через α , β и полагаем

$$\begin{aligned} AC &= r, & CF &= b, & AA_1 &= a, & AM &= m, \\ MA A_1 &= A, & MA_1 A &= A_1, \\ C_1 F_1 &= x_1, & C F_1 &= y_1. \end{aligned}$$

Проектируя ломаную линию CAA_1 на оси координат, мы находим такие равенства для определения координат точки A_1 при различных

величинах β , α :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \beta + a \cos (A - \alpha), \\y &= r \sin \beta + a \sin (A - \alpha).\end{aligned}$$

Чтобы найти соотношение между углами α , β , мы проектируем ломаную линию $САМ$ на ось y и, замечая, что эта проекция равна $CF = b$, выводим такое равенство:

$$b = r \sin \beta - m \sin \alpha,$$

которое нам дает

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{m \sin \alpha + b}{r}, \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Внося эти величины $\sin \beta$, $\cos \beta$ в вышенайденные выражения координат точки A_1 , получаем

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + a \cos (A - \alpha), \\ y &= m \sin \alpha + a \sin (A - \alpha) + b.\end{aligned}$$

Изображая через α_0 величину переменного угла α , вблизи которой, согласно с сказанным в предыдущем параграфе, изменения расстояния точки A_1 от C_1 остаются бесконечно малыми порядка не ниже 6-го, и изображая через r_1 величину этого расстояния при $\alpha = \alpha_0$, мы замечаем, что выражение расстояния этих точек

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

при разложении его по восходящим степеням разности $\sin \alpha - \sin \alpha_0$ даст такое равенство:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = r_1 + K(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots\tag{2}$$

Возводя это равенство в квадрат и ограничиваясь шестой степенью $\sin \alpha - \sin \alpha_0$, получаем

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 + 2r_1K(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots$$

Внося же сюда вышепоказанные величины координат точки A_1 , находим равенство

$$\begin{aligned} & [\sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + a \cos (A - \alpha) - x_1]^2 + \\ & + [m \sin \alpha + a \sin (A - \alpha) + b - y_1]^2 = \\ & = r_1^2 + 2r_1 K (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots, \end{aligned}$$

откуда по раскрытии скобок и по разделении всего на $2rx_1$ получается такое уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{a}{x_1} \sin A \cdot \sin \alpha - \frac{a \cos A}{x_1} \cos \alpha \right] \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2} - \\ & - \left[\frac{am \sin A}{rx_1} \sin \alpha + \frac{a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A}{rx_1} \right] \cos \alpha + \\ & + \frac{am \cos A}{rx_1} \sin^2 \alpha - \frac{a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1}{rx_1} \sin \alpha + \\ & + \frac{r_1^2 - r^2 - x_1^2 - y_1(y_1 - 2b) - a^2}{2rx_1} = -\frac{r_1}{rx_1} K (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

§ 5. Этому уравнению мы дадим вид более удобный для нашей цели, полагая

$$\sin \alpha = \frac{dz + 1}{z + d},$$

где

$$d = \sin \alpha_0. \quad (4)$$

При этой величине $\sin \alpha$ находим

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \alpha_0 &= \frac{dz + 1}{z + d} - d = \frac{1 - d^2}{z + d} = \frac{1 - d^2}{z} - \frac{d(1 - d^2)}{z^2} + \dots \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{dz + 1}{z + d} \right)^2} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{z + d} \sqrt{z^2 - 1}, \\ \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2} &= \frac{\sqrt{r^2 (z + d)^2 - [(md + b)z + (m + db)]^2}}{r(z + d)} = \\ &= \frac{\sqrt{r^2 - (md + b)^2}}{r(z + d)} \sqrt{\left(z + \frac{rd - m - db}{r - md - b} \right) \left(z + \frac{rd + m + db}{r + md + b} \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{r^2 - (md + b)^2}}{r(z + d)} \sqrt{(z - g)^2 - h^2}, \quad (5) \end{aligned}$$

где положено

$$\left(z + \frac{rd - m - db}{r - md - b}\right) \left(z + \frac{r + m + db}{r + md + b}\right) = \\ = (z - g - h)(z - g + h) = (z - g)^2 - h^2.$$

Определяя на основании этих формул выражения различных членов уравнения (3) при замене в нем $\sin \alpha$ через $\frac{dz + 1}{z + d}$ и деля все уравнение на коэффициент, стоящий при

$$z \sqrt{(z - g)^2 - h^2},$$

мы замечаем, что это уравнение приедится к такому виду:

$$(z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2} - (P_0 + P_1 z) \sqrt{z^2 - 1} + \\ + P_2 + P_3 z + P_4 z^2 = \frac{L}{z^4} + \dots \quad (6)$$

На основании этого равенства, по которому выражение

$$(P_0 + P_1 z) \sqrt{z^2 - 1} - P_2 - P_3 z - P_4 z^2$$

должно давать величину функции

$$(z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2}$$

с точностью до $\frac{1}{z^4}$, легко найти величину коэффициентов P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 по величинам λ, μ, g и h и одно уравнение, которому должны удовлетворять последние*. Чтобы найти уравнения, определяющие коэффициенты

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4,$$

мы разлагаем первую часть уравнения (6) по нисходящим степеням переменной z и приравниваем нулю члены с $z^2, z^1, z^0, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}$. Это дает нам

* Все это непосредственно получается при помощи разложения в непрерывную дробь, как мы показали в записке под заглавием: „О приближенных выражениях, линейных относительно двух полиномов“ (Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, изд. АН СССР, М.—Л., 1948, т. III, стр. 89—107.— *Ред.*).

5 уравнений, линейных относительно величин P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 и вполне их определяющих. Решая эти уравнения, находим

$$P_0 = gh^2 + h^2\lambda + (h^2 - 1)g\mu,$$

$$P_1 = 4h^2g^2 + h^4 + 4h^2g\lambda + [4h^2g^2 + (h^2 - 1)^2]\mu,$$

$$P_2 = -\frac{1}{2}(4g^2 + h^2 - 1)h^2 - (2h^2 - 1)g\lambda - \frac{1}{2}(4g^2 + h^2 - 3)h^2\mu,$$

$$P_3 = (h^2 + 1)g + (h^2 - 1)\lambda + h^2g\mu,$$

$$P_4 = 4h^2g^2 + h^4 - 1 + 4gh^2\lambda + (4g^2 + h^2 - 2)h^2\mu.$$

Внося же эти величины

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$$

в формулу

$$(z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2} - \\ - (P_0 + P_1 z) \sqrt{z^2 - 1} + P_2 + P_3 z + P_4 z^2$$

и разлагая ее по нисходящим степеням z , находим ряд

$$-\frac{h^2}{8}[(4g^2 + 3h^2 - 1)g + (4g^2 + h^2 - 1)\lambda + (4g^2 + 3h^2 - 3)g\mu] \frac{1}{z^3} - \\ - \frac{h^2}{16}[8g^4 + 4(3h^2 - 1)g^2 + h^4 - h^2 + (8g^2 + 6h^2 - 4)g\lambda] \frac{1}{z^4} - \\ - \frac{h^2}{16}[(8g^4 + 4(3h^2 - 2)g^2 + (h^2 - 1)^2)\mu] \frac{1}{z^4} - \\ - \dots,$$

что по сличении с уравнением (6) нам дает такие равенства:

$$(4g^2 + 3h^2 - 1)g + (4g^2 + h^2 - 1)\lambda + (4g^2 + 3h^2 - 3)g\mu = 0, \\ - \frac{h^2}{16}[8g^4 + 4(3h^2 - 1)g^2 + h^4 - h^2 + (8g^2 + 6h^2 - 4)g\lambda] - \\ - \frac{h^2}{16}[(8g^4 + 4(3h^2 - 2)g^2 + (h^2 - 1)^2)\mu] = L. \quad (7)$$

Первое равенство представляет уравнение, которому количества λ, μ, g, h, d должны удовлетворять; второе нам послужит, как увидим ниже, для определения величины уклонений от прямого пути вершины M треугольника AA_1M , когда вершины A, A_1 движутся по кругам.

§ 6. Для перехода от величин

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4,$$

сейчас нами найденных, к величинам, входящим в наш вопрос, мы замечаем, что по вышепоказанному формула (6) должна приводиться к формуле (3) при внесении в нее величины z из уравнения

$$\sin \alpha = \frac{dz + 1}{z + d}.$$

Находя по этому уравнению, что

$$z = \frac{1 - d \sin \alpha}{\sin \alpha - d},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d^2} + \frac{d(\sin \alpha - d)^2}{(1 - d^2)^2} + \dots,$$

$$\sqrt{z^2 - 1} = \frac{\sqrt{(1 - d \sin \alpha)^2 - (\sin \alpha - d)^2}}{\sin \alpha - d} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{\sin \alpha - d} \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(z - g)^2 - h^2} = \\ &= -\frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)} \sin \alpha + \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)} \right)^2}}{\sin \alpha - d}, \end{aligned}$$

мы замечаем из сравнения последнего равенства с равенством (5), что

$$\begin{aligned} \frac{m}{r} &= \frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)}, \\ \frac{b}{r} &= \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sqrt{(z - g)^2 - h^2} = \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2}}{\sin \alpha - d}.$$

Вследствие этих равенств формула (6) по внесении в нее

$$\frac{1 - d \sin \alpha}{\sin \alpha - d},$$

вместо z приводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}} \frac{(\lambda-d)\sin\alpha + 1-d\lambda + \sqrt{1-d^2} \mu \cos\alpha}{(\sin\alpha-d)^2} \sqrt{1-\left(\frac{m\sin\alpha+b}{r}\right)^2} - \\ & - \frac{P_1-P_0d + (P_0-P_1d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2} \sqrt{1-d^2} \cos\alpha + \\ & + \frac{(P_2-P_3d + P_4d^2)\sin^2\alpha - (2P_2d - P_3(1+d^2) + 2P_4d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2} + \\ & + \frac{P_2d^2 - P_3d + P_4}{(\sin\alpha-d)^2} = \frac{L(\sin\alpha-d)^4}{(1-d^2)^4} + \dots \end{aligned}$$

Разделяя это уравнение на

$$\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}} \frac{1-d\lambda}{(\sin\alpha-d)^2}$$

и сличая его затем почленно с формулой (3), находим такие равенства:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{x_1} \sin A &= \frac{\lambda-d}{1-d\lambda}, \\ -\frac{a}{x_1} \cos A &= \frac{\mu \sqrt{1-d^2}}{1-d\lambda}, \\ \frac{am \sin A}{rx_1} &= \frac{P_0-P_1d}{1-d\lambda} \frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h \sqrt{1-d^2}}, \\ \frac{a(b-y_1) \sin A - ax_1 \cos A}{rx_1} &= \frac{P_1-P_0d}{1-d\lambda} \frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h \sqrt{1-d^2}}, \\ \frac{am \cos A}{rx_1} &= \frac{P_2-P_3d + P_4d^2}{1-d\lambda} \frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h \sqrt{1-d^2}}, \\ \frac{a(y_1-b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1}{rx_1} &= \\ &= \frac{2P_2d - P_3(1+d^2) + 2P_4d^2}{1-d\lambda} \frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)}, \\ \frac{r_1^2 - r^2 - x_1^2 - y_1(y_1-2b) - a^2}{2rx_1} &= \frac{P_2d^2 - P_3d + P_4}{1-d\lambda} \frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)}, \\ \frac{r_1K}{rx_1} &= - \frac{L \sqrt{h^2-(g+d)^2}}{(1-d^2)^5 (1-d\lambda) h}. \end{aligned} \tag{9}$$

(10)

Разделяя 1-е из этих уравнений на 2-е, а 3-е на 5-е и на 1-е, находим такие равенства:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} A &= \frac{\lambda - d}{\mu \sqrt{1 - d^2}}, \\ \operatorname{tang} A &= \frac{P_0 - P_1 d}{P_2 - P_3 d + P_4 d^2}, \\ \frac{m}{r} &= - \frac{P_0 - P_1 d}{\lambda - d} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}.\end{aligned}\quad (11)$$

Исключая из первых двух равенств $\operatorname{tang} A$ и внося величину $\frac{m}{r}$ по (8) в третье, получаем два уравнения

$$\frac{\lambda - d}{\mu \sqrt{1 - d^2}} = \frac{P_0 - P_1 d}{P_2 - P_3 d + P_4 d^2}, \quad (12)$$

$$(\lambda - d) \sqrt{\frac{h^2 - (g + d)^2}{1 - d^2}} = P_1 d - P_0, \quad (13)$$

связывающие между собою пять величин λ, μ, g, h, d . Эти два уравнения вместе с уравнением (7) дают возможность определить три из них по остальным двум.

Так как выражения

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$$

представляют линейные функции количеств λ, μ , то уравнение (13), так же как и уравнение (7), будет первой степени относительно этих величин. Определяя из этих уравнений величины λ, μ и внося их в равенство (12), мы получим уравнение, заключающее только три количества g, h, d .

§ 7. Равенство (13), по внесении в него выражений P_0, P_1 , нам дает такое уравнение:

$$\begin{aligned}& gh^2 - h^2(4g^2 + h^2)d - d \sqrt{\frac{h^2 - (g + d)^2}{1 - d^2}} + \\ & + \left[h^2 - 4gdh^2 + \sqrt{\frac{h^2 - (g + d)^2}{1 - d^2}} \right] \lambda + \\ & + [(h^2 - 1)g - ((h^2 - 1)^2 + 4g^2h^2)d] \mu = 0.\end{aligned}$$

Решая относительно $\lambda - d$ и μ это уравнение вместе с уравнением (7), находим, что

$$\lambda - d = \frac{N}{D}, \quad \mu = \frac{N_1}{D}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} N &= (8g^2 - 2(h^2 - 1)^2)gd + (4g^2 + h^2 - 1)g^2 - \\ &\quad - [4(h^2 + 1)g^2 - (h^2 - 1)^2](h^2 - 1)d^2, \\ N_1 &= \left[-h^4(4g^2 - h^2 + 1) + (4g^2 + h^2 - 1) \sqrt{\frac{h^2 - (g + d)^2}{1 - d^2}} \right] d + \\ &\quad + \left[2h^4 + (4g^2 + 3h^2 - 1) \sqrt{\frac{h^2 - (g + d)^2}{1 - d^2}} \right] g, \\ D &= [4(h^2 + 1)g^2 - (h^2 - 1)^2](h^2 - 1)d - \\ &\quad - \left[4g^2 + (2h^2 + 1)(h^2 - 1) + (4g^2 + 3h^2 - 3) \sqrt{\frac{h^2 - (g + d)^2}{1 - d^2}} \right] g. \end{aligned}$$

Внося эти величины $\lambda - d$, μ в уравнение (12) и полагая

$$\frac{g + d}{h} = c, \quad g = ch - d, \quad (15)$$

находим, что оно приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} &[(3c - 4c^3) \sqrt{1 - d^2} + (1 - 4c^2) d \sqrt{1 - c^2}] h^4 + \\ &+ 8ch^3 \sqrt{1 - c^2} - 6(d \sqrt{1 - c^2} - c \sqrt{1 - d^2}) h^2 - 8dh \sqrt{1 - d^2} - \\ &- (1 - 4d^2) c \sqrt{1 - d^2} - (3d - 4d^3) \sqrt{1 - c^2} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение значительно упрощается внесением в него значений $d = \sin \alpha_0$ и c , которое, как нетрудно показать, равняется $\sin \beta$, где β_0 есть величина переменного угла β , соответствующая $\alpha = \alpha_0$.

В самом деле, по формуле (1), полагая в ней

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \sin \alpha_0 = d,$$

находим

$$\sin \beta_0 = \frac{md + b}{r},$$

что по внесении величин $\frac{m}{r}$, $\frac{b}{r}$, определяемых формулами (8), дает

$$\sin \beta_0 = \frac{g + d}{h} = c.$$

Вычисляя же на основании равенств

$$d = \sin \alpha_0, \quad c = \sin \beta_0$$

величину коэффициентов при различных степенях h в рассматриваемом нами уравнении, находим

$$\begin{aligned} & (3c - 4c^3) \sqrt{1 - d^2} + (1 - 4c^2) \sqrt{1 - c^2} d = \\ & = \sin 3\beta_0 \cos \alpha_0 + \cos 3\beta_0 \sin \alpha_0 = \sin (\alpha_0 + 3\beta_0), \\ & 8c \sqrt{1 - c^2} = 4 \sin 2\beta_0, \quad 8d \sqrt{1 - d^2} = 4 \sin 2\alpha_0, \\ & 6(d \sqrt{1 - c^2} - c \sqrt{1 - d^2}) = 6(\sin \alpha_0 \cos \beta_0 - \cos \alpha_0 \sin \beta_0) = 6 \sin (\alpha_0 - \beta_0), \\ & (1 - 4d^2) c \sqrt{1 - d^2} + (3d - 4d^3) \sqrt{1 - c^2} = \sin (3\alpha_0 + \beta_0), \end{aligned}$$

вследствие чего оно приводится к следующему:

$$\begin{aligned} & h^4 \sin (\alpha_0 + 3\beta_0) + 4h^3 \sin 2\beta_0 - 6h^2 \sin (\alpha_0 - \beta_0) - \\ & - 4h \sin 2\alpha_0 - \sin (3\alpha_0 + \beta_0) = 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение относительно h , мы находим, что оно разлагается на такие два уравнения второй степени:

$$\begin{aligned} & h^2 \sin (\alpha_0 + 3\beta_0) + 2h [\sin 2\beta_0 - \sin (\alpha_0 + \beta_0)] = \\ & = \sin (\alpha_0 - \beta_0) + \sin 2(\alpha_0 + \beta_0), \\ & h^2 \sin (\alpha_0 + 3\beta_0) + 2h [\sin 2\beta_0 + \sin (\alpha_0 + \beta_0)] = \\ & = \sin (\alpha_0 - \beta_0) - \sin 2(\alpha_0 + \beta_0), \end{aligned}$$

которые по разделении на

$$2 \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2}, \quad 2 \sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2}$$

приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} & h^2 \sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} + 2h \sin \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} = \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{2}, \\ & h^2 \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} + 2h \cos \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} = -\cos \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{2}. \end{aligned}$$

Решая же эти квадратные уравнения, мы находим такие четыре величины для h :

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}, & h &= -\frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - \pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3\pi}{4}}, \\ h &= \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - 2\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 6\pi}{4}}, & h &= -\frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - 3\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 9\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Сравнивая между собою эти четыре величины h , мы замечаем, что они получаются одна из другой уменьшением угла β_0 на π и переменою знака с $+$ на $-$, с $-$ на $+$. Но это, как видно из чертежа (фиг. 3), где

$$ACx = \beta_0, \quad AC = r, \quad AM = m$$

и где по (8)

$$\frac{m}{r} = h \frac{1 - \left(\frac{g+d}{h}\right)^2}{1 - d^2},$$

соответствует перемене направления линии AC на π вместе с переменою той стороны, которая принимается за положительную при определении длины линии AC . Вследствие этого формулы, получаемые при вышепоказанных четырех величинах h , будут отличаться между собою только тем, что в них вместо β_0 будет входить или $\beta_0 - \pi$, или $\beta_0 - 2\pi$, или $\beta_0 - 3\pi$, откуда видно, что мы обнимем все возможные случаи, если в формулах, полученных в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}, \quad (16)$$

поставим $\beta_0 - k\pi$ вместо β_0 , где k означает целое число, причем величина h будет определяться уравнением

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}.$$

§ 8. Ограничиваясь сначала по вышесказанному предположением

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}$$

и внося эту величину h в формулы предыдущего параграфа, определяющие $\lambda - d$ и μ , по которым

$$\lambda - d = \frac{N}{D}, \quad \mu = \frac{N_1}{D},$$

находим, полагая для сокращения

$$\frac{\sin^3(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3}{2}(\alpha_0 - \beta_0) \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} \cos \alpha_0} = F,$$

что

$$N = \sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cos \alpha_0 \cdot F,$$

$$N_1 = \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot F,$$

$$D = \left[\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \right] F,$$

откуда получаются такие величины для $\lambda - d$ и μ :

$$\begin{aligned} \lambda - d &= \frac{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cos \alpha_0}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}, \\ \mu &= \frac{\cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Внося же эти величины $\lambda - d$, μ в формулу (11), где по нашему знакоположению $\sqrt{1 - d^2} = \cos \alpha_0$, находим, что она дает

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).$$

Это равенство получено нами в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}.$$

Чтобы перейти к общему случаю, когда

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}, \quad (18)$$

мы, по замеченному в предыдущем параграфе, заменяем в этом равенстве β_0 через $\beta_0 - k\pi$, отчего получается такая величина для $\tan A$:

$$\tan A = \tan \frac{3}{4} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi).$$

Эта формула показывает, что разность углов A и $\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)$ должна равняться величине π , взятой целое число раз, что предполагает такое равенство:

$$A = \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) + (n - 1)\pi,$$

где n , подобно k , целое число.

Но из чертежа (фиг. 3), где по нашему знакоположению

$$A_1AM = A, \quad AMF = \alpha_0, \quad ACx = \beta_0,$$

видно, что

$$\begin{aligned} CAM &= \pi - AMF - ACx = \pi - \alpha_0 - \beta_0, \\ CAA_1 &= CAM + A_1AM = \pi - \alpha_0 - \beta_0 + A. \end{aligned}$$

Определяя по последнему равенству величину суммы $\alpha_0 + \beta_0$ и внося ее в вышенайденное выражение угла A , получаем такое соотношение между углами CAA_1 и A :

$$A = 3CAA_1 - (2n - 3k + 1)\pi. \quad (19)$$

Это равенство показывает, что угол A треугольника AA_1M и утроенный угол CAA_1 , определяющий наклонение вращающейся линии AC .

к линии AA_1 при $\alpha = \alpha_0$, могут разниться между собою только величиною π , взятою несколько раз. Чтобы сделать наши формулы однозначнее, мы ограничимся предположением, что разность углов $\angle CAA_1 - A$ включает в себе π четное число раз.

Этого можно всегда достигнуть, увеличивая угол $\angle CAA_1$ на 180° , или, что одно и то же, меняя направление линии AC в прямо противоположное. В этом предположении, как видно из предыдущего равенства, число k должно быть нечетное.

Полагая

$$k = 2p + 1, \quad \angle CAA_1 = \varphi,$$

мы по этому равенству будем иметь

$$A = 3\varphi - 2(n - 3p - 1)\pi,$$

причем по (18) величина h будет определяться равенством

$$h = - \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p + 1)\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p + 1)\pi}{4}},$$

которое может быть представлено так:

$$h = \frac{\cos \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p - 1)\pi}{4}}{\cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p - 1)\pi}{4}}.$$

Замечая же, что по (8)

$$\frac{m}{r} = h \frac{1 - \left(\frac{g + d}{h}\right)^2}{1 - d^2},$$

где, как видели,

$$\frac{g + d}{h} = \sin \beta_0, \quad d = \sin \alpha_0,$$

мы находим, что r и m связаны между собою уравнением

$$\frac{m}{r} = \frac{\cos \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p - 1)\pi}{4}}{\cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p - 1)\pi}{4}} \cdot \frac{\cos^2 \beta_0}{\cos^2 \alpha_0}.$$

Выведенные нами формулы относительно углов $A = A_1AM$, $\varphi = A_1AC$ и линий $r = AC$, $m = AM$ получены в предположении, что при бесконечно малом движении треугольника AA_1M вершиною M по прямой FG , а вершиною A по кругу C , расстояние вершины A_1 от C_1 с точностью до величин 6-го порядка остается равным $r_1 = A_1C_1$.

По замеченному в § 3 это вообще должно иметь место, когда при движении вершин A , A_1 по кругам, описанным около центров C , C_1 , вершина M с точностью до 6-го порядка движется по прямой FG , или, что одно и то же, описывает дугу, имеющую соприкосновение 5-го порядка с этою линиею. В этом случае вершина A_1 находится в таких же условиях, как и A , а потому углы и линии при этой вершине должны также удовлетворять уравнениям, выведенным нами относительно углов и линий при вершине A .

На основании этого, полагая (фиг. 4)

$$A_1E_2E_1 = \beta_1, \quad AA_1M = A_1, \quad AA_1C_1 = \varphi_1, \quad A_1M = m_1,$$

и заменяя в формулах, вышенайденных,

$$\alpha_0, \beta_0, A, \varphi, r, m, n, p$$

через

$$\alpha_1, \beta_1, A_1, \varphi_1, r_1, m_1, n_1, p_1,$$

получаем такие равенства:

$$A_1 = 3\varphi_1 - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi,$$

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{\cos \frac{3\alpha_1 + \beta_1 - (2p_1 - 1)\pi}{4}}{\cos \frac{\alpha_1 + 3\beta_1 - 3(2p_1 - 1)\pi}{4}} \cdot \frac{\cos^2 \beta_1}{\cos^2 \alpha_1}.$$

§ 9. Выведенные нами равенства относительно углов треугольника AA_1M вполне определяют их по углам $\varphi = A_1AC$, $\varphi_1 = AA_1C_1$, несмотря на неизвестные числа n , p , n_1 , p_1 , в них заключающиеся, так как эти числа входят с множителем 2π . Вследствие этого, если даны углы φ , φ_1 и сторона $AA_1 = a$ треугольника AA_1M , мы при помощи этих формул, найдя углы A , A_1 , вполне определим его. Зная же этот треугольник и положение его относительно линий AC , A_1C_1 , опреде-

такие равенства:

$$\begin{aligned} AMF &= MAG + AGM = A + \gamma, \\ AFM &= \pi - FAG - AGM = \pi - \varphi - \gamma, \\ A_1MG &= AA_1M - AGM = A_1 - \gamma, \\ A_1G_1M &= \pi - C_1A_1A + AGM = \pi - \varphi_1 + \gamma, \end{aligned}$$

откуда по равенству углов

$$\begin{aligned} AMF &= AEC = \alpha_0, & AFM &= ACE = \beta_0, \\ A_1MG &= A_1E_1C = \alpha_1, & A_1E_2C &= A_1G_1M = \beta_1 \end{aligned}$$

выходит

$$\alpha_0 = A + \gamma, \quad \beta_0 = \pi - \varphi - \gamma, \quad \alpha_1 = A_1 - \gamma, \quad \beta_1 = \pi - \varphi_1 + \gamma,$$

что по внесении вышенайденных величин углов A , A_1 нам дает

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 3\varphi + \gamma - 2(n - 3p - 1)\pi, & \beta_0 &= \pi - \varphi - \gamma, \\ \alpha_1 &= 3\varphi_1 - \gamma - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi, & \beta_1 &= \pi - \varphi_1 + \gamma. \end{aligned}$$

Внося же эти величины α_0 , β_0 , α_1 , β_1 в формулы (§ 8), определяющие отношения $\frac{m}{r}$, $\frac{m_1}{r_1}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{r}{m} &= \frac{\cos \frac{\gamma + n\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma - (3n - 8p)\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2(3\varphi + \gamma)}{\cos^2(\varphi + \gamma)}, \\ \frac{r_1}{m_1} &= \frac{\cos \frac{\gamma - n_1\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + (3n_1 - 8p_1)\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2(\varphi_1 - \gamma)}. \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned} \cos \frac{\gamma - n_1\pi}{2} &= \cos \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \cos n_1\pi, \\ \cos \left(2\varphi + \frac{\gamma - (3n - 8p)\pi}{2} \right) &= \cos \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right), \\ \cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + (3n_1 - 8p_1)\pi}{2} \right) &= \cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \right) \cos n_1\pi, \end{aligned}$$

эти формулы приводятся к следующему:

$$\begin{aligned}\frac{r}{m} &= \frac{\cos \frac{\gamma + n\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)}, \\ \frac{r_1}{m_1} &= \frac{\cos \frac{\gamma + n_1\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)}.\end{aligned}\tag{20}$$

§ 10. Для определения величины угла γ , входящего в эти формулы, мы замечаем, что по известному свойству линий, проведенных из одной точки к углам треугольника, как это имеет место относительно линий SA , SM , SA_1 (фиг. 4), должно существовать такое равенство:

$$\frac{\sin AMS}{\sin A_1MS} = \frac{\sin MAS}{\sin A_1AS} \cdot \frac{\sin AA_1S}{\sin MA_1S},$$

где, как видно из чертежа,

$$\begin{aligned}AMS &= FMS - FMA = \frac{\pi}{2} - \alpha_0, \\ A_1MS &= GMS - A_1MG = \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \\ MAS &= \pi - CAA_1 + A_1AM = \pi - \varphi + A, \\ A_1AS &= \pi - CAA_1 = \pi - \varphi, \\ AA_1S &= \pi - C_1A_1A = \pi - \varphi_1, \\ MA_1S &= \pi - C_1A_1A + AA_1M = \pi - \varphi_1 + A_1,\end{aligned}$$

вследствие чего это равенство нам дает

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} = \frac{\sin (A - \varphi)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin (A_1 - \varphi_1)}.$$

Внося же сюда вышенайденные величины углов A , A_1 , получаем

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin 2\varphi_1},$$

что по замене $\sin 2\varphi$, $\sin 2\varphi_1$ через $2 \sin \varphi \cos \varphi$, $2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1$ приводится к такой простой формуле:

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}. \quad (21)$$

Замечая, что по вышепоказанному (§ 9)

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 3\varphi + \gamma - 2(n - 3p - 1)\pi, \\ \alpha_1 &= 3\varphi_1 - \gamma - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi, \end{aligned}$$

мы отсюда выводим уравнение

$$\frac{\cos(3\varphi + \gamma)}{\cos(3\varphi_1 - \gamma)} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1},$$

определяющее угол γ по углам φ , φ_1 . Этому уравнению мы дадим вид, более удобный для вычисления угла γ , представляя его так:

$$\frac{\cos(3\varphi + \gamma) - \cos(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos(3\varphi + \gamma) + \cos(3\varphi_1 - \gamma)} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_1}{\cos \varphi + \cos \varphi_1},$$

что приводится к равенству

$$\frac{\operatorname{tang} \left[\frac{3}{2} (\varphi - \varphi_1) + \gamma \right]}{\operatorname{cotang} \frac{3}{2} (\varphi + \varphi_1)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\operatorname{cotang} \frac{\varphi + \varphi_1}{2}}. \quad (22)$$

§ 11. Определяя по уравнению (22) угол γ , мы найдем для него в пределах 0 и 2π две величины, разнящиеся между собою на π . Нетрудно показать, что, давая в наших формулах углу γ эти две величины и принимая числа n , n_1 за нули, мы обнимем все решения нашей задачи. Для этого мы сначала покажем, что эти два числа не могут разниться между собою числом нечетным. Это можно заметить из выражения величины

$$\frac{x_1}{a},$$

получаемого из вышенайденных формул. Так как в нашей системе координат начало находится в точке C и ось x параллельна линии FG , то величина x_1 , представляющая абсциссу точки C_1 , будет равняться

проекция расстояния точек C, C_1 на линию FG . В нашем вопросе эта проекция, так же как и линии $a = AA_1$, имеет одинаковое значение по отношению вершин A, A_1 треугольника AA_1M ; а потому формула, определяющая $\frac{x_1}{a}$, не должна менять величины при перемене

$$\varphi, \alpha_0, n, \gamma$$

на

$$\varphi_1, \alpha_1, n_1, -\gamma,$$

имеющие одинаковые значения по отношению вершин A, A_1 треугольника AA_1M ; а это, как мы увидим, предполагает, что $n - n_1$ есть число четное.

В самом деле, по формуле (9) находим

$$\frac{x_1}{a \sin A} = -\frac{1-d\lambda}{\lambda-d} = d - \frac{1-d^2}{\lambda-d}.$$

Так как по нашему знакоположению

$$d = \sin \alpha_0, \quad 1-d^2 = \cos^2 \alpha_0,$$

а по (17), в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}},$$

$$\lambda - d = \frac{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cos \alpha_0}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}},$$

то величина

$$\frac{x_1}{a \sin A}$$

представляется формулою

$$\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0 \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)}{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)} - \frac{\cos \alpha_0 \sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}},$$

где первые два члена по соединении дают

$$\frac{\cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2}}{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)},$$

а последний, по замене в нем выражений

$$\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}, \quad \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\beta_0 + 3\alpha_0}{4}$$

равными им

$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \cos \alpha_0 \right),$$

приводится к

$$\frac{\left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} \right) \cos \alpha_0}{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \left[\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \cos \alpha_0 \right]},$$

вследствие чего эта формула нам дает

$$\frac{x_1 \sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)}{a \sin A} = \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} - \frac{\left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} \right) \cos \alpha_0}{\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \cos \alpha_0}.$$

Это мы вывели в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}.$$

Чтобы перейти к общему случаю, когда

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}},$$

мы, по сказанному в § 7, должны поставить здесь $\beta_0 - k\pi$ на место β_0 .

Таким образом получаем формулу

$$\frac{x_1 \sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)}{a \sin A} = \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{2} - \frac{\left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{2}\right) \cos \alpha_0}{\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2} - \cos \alpha_0}.$$

Находя по величинам k , A , α_0 , β_0 , показанным в § 8 и 9, что

$$\sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) = \sin (3\varphi - 3n\pi + 3\pi) = -(-1)^n \sin 3\varphi,$$

$$\cos \frac{(\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi)}{2} = \cos (\gamma + n\pi - \pi) = -(-1)^n \cos \gamma,$$

$$\sin A = \sin (3\varphi - 2(n - 3p - 1)\pi) = \sin 3\varphi,$$

$$\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2} = \cos (\varphi - n\pi + \pi) = -(-1)^n \cos \varphi,$$

мы из этой формулы выводим

$$\frac{x_1}{a} = \cos \gamma - \frac{(-1)^n + \cos \gamma}{1 + (-1)^n \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha_0}}.$$

Меняя здесь α_0 , φ , γ , n на α_1 , φ_1 , $-\gamma$, n_1 , мы по вышесказанному для той же величины $\frac{x_1}{a}$ находим еще такую формулу:

$$\frac{x_1}{a} = \cos \gamma - \frac{(-1)^{n_1} + \cos \gamma}{1 + (-1)^{n_1} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha_1}}.$$

Сличая между собою эти две величины $\frac{x_1}{a}$, где по (21)

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha_0} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha_1},$$

мы замечаем, что они становятся тождественными только при равенстве

$$(-1)^n = (-1)^{n_1},$$

а это предполагает разность $n - n_1$ числом четным.

Убедясь таким образом, что в наших формулах числа n, n_1 могут разниться только числом четным, и заметив по составу формул

$$\frac{r}{m} = \frac{\cos \frac{\gamma + n\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)},$$

$$\frac{r_1}{m_1} = \frac{\cos \frac{\gamma + n_1\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)},$$

что в них числа n, n_1 могут быть сделаны > -1 и < 2 , мы заключаем, что относительно этих чисел возможны только два предположения: или оба они равны 0, или оба они равны 1. Но оба эти случая мы обнимаем одною системою формул

$$\frac{r}{m} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)},$$

$$\frac{r_1}{m_1} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)},$$
(23)

допуская в них замену угла γ углом $\gamma + \pi$, или, что одно и то же, давая углу γ две величины его, получаемые из уравнения (22) в пределах 0 и 2π .

Так, по углам φ, φ_1 и углу γ , определенному уравнением (22), найдется величина отношений

$$\frac{r}{m}, \frac{r_1}{m_1},$$

откуда по длине $m = AM, m_1 = A_1M$ сторон треугольника AA_1M получится длина линий $r = AC, r_1 = A_1C_1$.

В том случае, когда дан треугольник AA_1M , мы найдем углы φ, φ_1 , входящие в наши формулы, заметив, что по сказанному в § 8 об определении углов A, A_1 треугольника AA_1M , те же углы A, A_1 будут

получаться при таких различных величинах φ , φ_1 :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{A}{3}, & \varphi &= \frac{A+2\pi}{3}, & \varphi &= \frac{A+4\pi}{3}, \\ \varphi_1 &= \frac{A_1}{3}, & \varphi_1 &= \frac{A_1+2\pi}{3}, & \varphi_1 &= \frac{A_1+4\pi}{3}.\end{aligned}$$

Комбинируя между собою эти величины углов φ , φ_1 , мы найдем 9 различных систем величин φ , φ_1 . Определяя для каждой из этих систем углов φ , φ_1 угол γ по (22), мы найдем для него две величины, вследствие чего число решений нашей задачи в том случае, когда предполагается данным треугольник AA_1M , будет вообще 18.

§ 12. Мы теперь займемся определением величины уклонений вершины M треугольника AA_1M от прямой линии, когда вершины A , A_1 движутся по кругам, определенным по вышесказанному. При этом мы будем рассматривать только положения треугольника, бесконечно близкие к тому, когда вершина M находится на касательной, имеющей соприкосновение 5-го порядка с ее траекториею, и везде в разложениях будем ограничиваться первыми членами.

Мы начнем опять с предположения, что вершина M движется точно по прямой FG , а вершина A_1 описывает кривую, близкую к дуге круга C_1 (фиг. 5).

Пусть будет $A'A_1M_1$ какое-нибудь положение треугольника AA_1M при этом движении, бесконечно близкое к тому, в котором вершина A_1 лежит на круге C_1 и в котором по нашему знакоположению

$$\begin{aligned}CAA_1 &= \varphi, & C_1A_1A &= \varphi_1, \\ \alpha &= AMF = \alpha_0, & \beta &= ACx = \beta_0.\end{aligned}$$

При этом точка A'_1 не будет находиться на круге C_1 и расстояние ее от центра C_1 будет разниться с радиусом его $r_1 = A_1C_1$ величиною A'_1S , для определения которой по (2) получается такая формула:

$$A'_1S = K(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots$$

Чтобы перейти к тому случаю, когда вершина A_1 движется точно по кругу C_1 , а вершина M по прямой FG приближенно, мы пред-

и угол $A'A_1C_1$ бесконечно мало разнится от угла $AA_1C_1 = \varphi_1$, то эти равенства нам дают

$$A'_1S = A'_1q \sin \varphi_1, \quad \frac{M_1t}{A'_1q} = \frac{m}{a},$$

откуда, исключая A'_1q , выводим

$$M_1t = \frac{m}{a} \cdot \frac{A'_1S}{\sin \varphi_1},$$

что по внесении вышепоказанной величины A'_1S приводится к следующему:

$$M_1t = K \frac{m}{a} \frac{(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6}{\sin \varphi_1} + \dots$$

С другой стороны, определяя удаление точки t от прямой линии FG , мы находим, что оно равняется

$$M_1t \sin FM_1t,$$

а так как угол FM_1t равняется $\frac{\pi}{2} - FM_1A'$, а угол FM_1A' бесконечно мало разнится от угла $FMA = \alpha_0$, это выражение приводится к такому:

$$M_1t \cos \alpha_0,$$

что по внесении вышенайденной величины M_1t нам дает следующую формулу для определения величины удаления точки t от линии FG :

$$K \frac{m}{a} \frac{\cos \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots,$$

откуда видно, что при движении треугольника AA_1M , нами рассматриваемом, ордината y точки M при α , бесконечно близком к α_0 , будет иметь такую величину:

$$y = CF - K \frac{m}{a} \frac{\cos \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots$$

Заменяя же здесь разность

$$\sin \alpha - \sin \alpha_0$$

через

$$(\alpha - \alpha_0) \cos \alpha_0 + \dots,$$

находим

$$y = CF - K \frac{m}{a} \frac{\cos^7 \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\alpha - \alpha_0)^6 + \dots$$

Эта формула показывает, как изменяется ордината y точки M при изменении угла α . Чтобы найти соотношение между изменениями x , y точки M , мы теперь выведем формулу, определяющую величину x точки M при величинах α , близких к α_0 . Для этого мы замечаем, что величина x равняется проекции ломаной линии $СAM$ на ось x , а потому

$$x = AC \cos ACx + AM \cos AMF.$$

Внося же сюда величины

$$AC = r, \quad ACx = \beta, \quad AM = m, \quad AMF = \alpha,$$

находим

$$x = r \cos \beta + m \cos \alpha.$$

Дифференцируя эту величину x относительно α и замечая, что по (1)

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{m \cos \alpha}{r \cos \beta},$$

находим

$$\frac{dx}{d\alpha} = -r \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} - m \sin \alpha = -m \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

На основании этого заключаем, что в смежности с точкою

$$x = FM, \quad y = FC,$$

где $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, абсцисса x будет иметь такую величину:

$$x = FM - m \frac{\sin (\alpha_0 + \beta_0)}{\cos \beta_0} (\alpha - \alpha_0) + \dots$$

Выводя из этого уравнения величину разности $\alpha - \alpha_0$ и внося ее в вышешнайденное выражение ординаты y , получаем следующее соотношение между x , y :

$$y = CF - \frac{\cos^7 \alpha_0 \cos^6 \beta_0 K}{am^5 \sin \varphi_1 \sin^6 (\alpha_0 + \beta_0)} (x - FM)^6 + \dots,$$

которое мы представим так:

$$y = y_0 + K_0(x - x_0)^6 + \dots,$$

полагая

$$x_0 = FM, \quad y_0 = CF,$$

$$K_0 = - \frac{\cos^7 \alpha_0 \cos^6 \beta_0 K}{am^5 \sin \varphi_1 \sin^6 (\alpha_0 + \beta_0)}.$$

Это нам дает уравнение кривой, описываемой вершиною M треугольника AA_1M в смежности с точкою $x = x_0$, $y = y_0$, где она имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою.

§ 13. Для определения величины коэффициента K_0 , входящего в это уравнение, мы замечаем, что по (10), где

$$1 - d^2 = \cos^2 \alpha_0, \quad \frac{\sqrt{h^2 - (d + g)^2}}{h} = \cos \beta_0,$$

коэффициенты K и L связаны равенством

$$K = - \frac{rx_1 \cos \beta_0 L}{r_1 \cos^{10} \alpha_0 (1 - d)},$$

вследствие чего вышепоказанное выражение K_0 приводится к такому:

$$K_0 = \frac{rx_1 \cos^7 \beta_0 L}{am^5 r_1 \cos^3 \alpha_0 \sin \varphi_1 \sin^6 (\alpha_0 + \beta_0) (1 - d)}.$$

Внося сюда величину x_1 по (9) и величины углов A , α_0 , β_0 , по формулам § 9, получаем

$$K_0 = \frac{r \cos^7 (\varphi + \gamma) \sin 3\varphi}{m^5 r_1 \cos^3 (3\varphi + \gamma) \sin^6 2\varphi \sin \varphi_1} \cdot \frac{L}{\lambda - d}.$$

Переходя к определению отношения

$$\frac{L}{\lambda - d},$$

входящего в это выражение коэффициента K_0 , мы вычисляем величину L по формуле § 5, внося в нее величины λ , μ , найденные в § 7, и принимая

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3x_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{x_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}.$$

Разделяя величину L , таким образом получаемую, на величину $\lambda - d$ при том же значении h , мы находим по приведении в простейший вид такую формулу для определения отношения L к $\lambda - d$:

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{1}{32} \frac{\sin^2 \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4} \sin^3 (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)}{\cos \alpha_0 \sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) \sin^4 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4} \sin \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2}}.$$

Внося сюда величину $k = 2p + 1$ и величину углов A , α_0 , β_0 , показанную в § 9, получаем

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{1}{32} \frac{\cos^2 \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right) \sin^3 2\varphi}{\cos (3\varphi + \gamma) \sin 3\varphi \cos^4 \frac{\gamma + n\pi}{2} \sin \varphi}.$$

Замечая же по уравнению (20), что

$$\frac{\cos^2 \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\gamma + n\pi}{2}} = \frac{m^2}{r^2} \cdot \frac{\cos^4 (3\varphi + \gamma)}{\cos^4 (\varphi + \gamma)},$$

мы из этой формулы выводим

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{m^2 \cos^3 (3\varphi + \gamma) \sin^3 2\varphi}{32r^2 \cos^4 (\varphi + \gamma) \sin 3\varphi \sin \varphi \cos^2 \frac{\gamma}{2}},$$

где по § 11 мы поставили γ вместо $\gamma + n\pi$, вследствие чего выше-найденное выражение коэффициента K_0 нам дает

$$K_0 = \frac{1}{32rr_1 \sin \varphi \sin \varphi_1 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos (\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3.$$

§ 14. На основании этой формулы нетрудно показать, что при r , r_1 , m , m_1 конечных коэффициент K_0 в уравнении

$$y = y_0 + K_0 (x - x_0)^6 + \dots$$

не может обращаться в нуль и, следовательно, кривая, описываемая вер-

шиною M треугольника AA_1M в рассматриваемом нами вопросе, не может иметь соприкосновение с прямой линией порядка выше 5-го.

Чтобы показать это, мы замечаем, что коэффициент K_0 имеет то же значение по отношению к вершине A_1 треугольника AA_1M , как и по отношению к вершине A , а потому в выражении его, найденном нами, величины

$$\varphi, m, r, r_1, \gamma$$

могут быть заменены величинами

$$\varphi_1, m_1, r_1, r, -\gamma.$$

Таким образом, получается новое выражение для K_0 :

$$K_0 = \frac{1}{32r_1r \sin \varphi_1 \sin \varphi \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi_1 - \gamma)}{m_1 \sin 2\varphi_1} \right)^3.$$

По этим двум выражениям коэффициента K_0 видно, что при r, r_1, m, m_1 конечных он может обратиться в нуль только при удовлетворении двух уравнений

$$\cos(\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(\varphi_1 - \gamma) = 0, \quad (24)$$

из которых выходит

$$\varphi + \gamma = \frac{2q + 1}{2} \pi, \quad \varphi_1 - \gamma = \frac{2q' + 1}{2} \pi,$$

где q, q' — какие-нибудь целые числа. Складывая и вычитая эти два равенства, находим

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi_1 &= (q + q' + 1) \pi, \\ \varphi - \varphi_1 + 2\gamma &= (q - q') \pi. \end{aligned} \quad (25)$$

Но по (23) видно, что равенства (24) при r, m, r_1, m_1 конечных предполагают или равенство

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 0,$$

или такие два равенства:

$$\cos(3\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(3\varphi_1 - \gamma) = 0.$$

В первом случае мы находим, что

$$\gamma = (2q'' + 1)\pi,$$

где q'' — целое число. Внося эту величину γ в уравнения (25), получаем из них такие величины для углов φ , φ_1 :

$$\varphi = \left(q - 2q'' - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \varphi_1 = \left(q' + 2q'' + \frac{3}{2}\right)\pi.$$

Определяя же углы треугольника AA_1M , соответствующие этим величинам φ , φ_1 , мы по § 8 находим, что каждый из углов его A , A_1 должен содержать нечетное число $\frac{\pi}{2}$, что невозможно.

Переходя к предположению

$$\cos(3\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(3\varphi_1 - \gamma) = 0,$$

мы замечаем, что эти равенства вместе с равенствами (24) предполагают

$$\varphi = \frac{q}{2}\pi, \quad \varphi_1 = \frac{q'}{2}\pi,$$

где q , q' — числа целые. Если оба числа q , q' нечетные, углы A , A_1 треугольника AA_1M опять оказываются невозможными. Если одно из них нечетное, а другое четное, первое из уравнений (25) не удовлетворяется. Наконец, если оба числа q , q' четные, то по (24) угол γ должен иметь такую величину:

$$\gamma = \frac{2q_0 + 1}{2}\pi,$$

где q_0 — число целое.

Но при таких величинах φ , φ_1 , γ в уравнении (22), написанном под видом

$$\frac{\cotang \frac{3}{2}(\varphi + \varphi_1)}{\cotang \frac{\varphi + \varphi_1}{2}} = \frac{\tang \left[\frac{3}{2}(\varphi - \varphi_1) + \gamma \right]}{\tang \frac{\varphi - \varphi_1}{2}},$$

первая часть будет обращаться в $\frac{\infty}{\infty}$ или в $\frac{0}{0}$, смотря по тому, будет ли сумма $\varphi + \varphi_1$ приводиться к величине π , повторенной четное или нечетное число раз, а вторая к $\frac{0}{\infty}$ или к $\frac{\infty}{0}$, смотря по тому, будет ли

разность $\varphi - \varphi_1$ приводиться к π , взятому нечетное или четное число раз. Определяя же величину первой части при величинах φ, φ_1 , близких к $\frac{q}{2}\pi, \frac{q'}{2}\pi$ в предположении q, q' числами четными, мы находим, что предел ее при этих величинах есть или $\frac{3}{1}$, или $\frac{1}{3}$, откуда видно, что при этих величинах $\varphi, \varphi_1, \gamma$ уравнение (22) не удовлетворяется и, следовательно, последнее предположение также невозможно.

§ 15. По уравнению

$$y = y_0 + K_0 (x - x_0)^6 + \dots$$

мы находим, что в пределах от $x = x_0 - \frac{l}{2}$ до $x = x_0 + \frac{l}{2}$ удаление от прямой линии вершины M треугольника AA_1M не будет превосходить

$$\frac{K_0}{2^6} l^6.$$

При этом мы пренебрегаем высшими степенями l , предполагая вообще l малою величиною. Внося сюда найденную нами величину K_0 , мы получаем такое выражение:

$$\frac{1}{2048rr_1 \sin \varphi \sin \varphi_1 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos (\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 l^6$$

для предела отклонений от прямолинейного пути вершины M треугольника AA_1M при длине хода, равной l .

Эти отклонения могут быть сделаны значительно меньше на основании того, что мы показали в мемуаре под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“ *. Для этого нужно, определив по вышепоказанному величины линий AC, A_1C_1 и места точек вращения C, C_1 , искать, какие изменения следует сделать в тех и других, чтобы кривая, описываемая вершиною M треугольника AA_1M ,

* Стр. 611—648 настоящего издания.— *Ред.*

пересекала прямую в точках, которых абсциссы имеют такие величины:

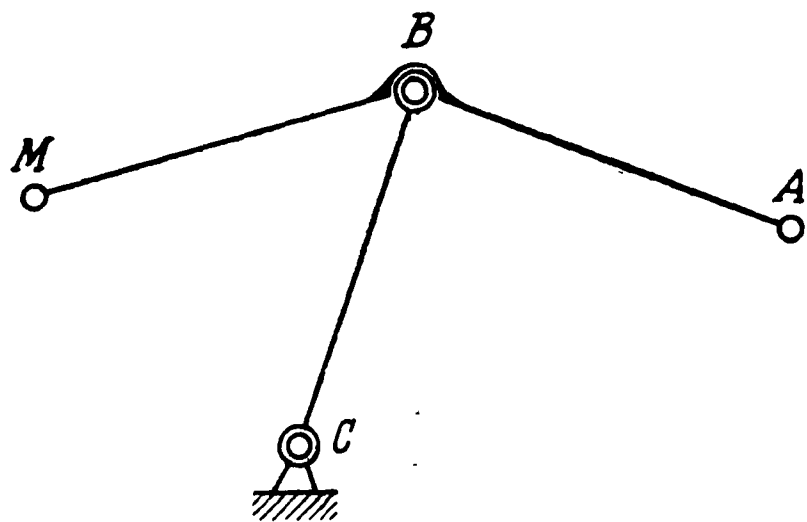
$$\begin{aligned} x_0 - \frac{l}{2} \cos 15^\circ, & \quad x_0 - \frac{l}{2} \cos 45^\circ, & \quad x_0 - \frac{l}{2} \cos 75^\circ, \\ x_0 + \frac{l}{2} \cos 15^\circ, & \quad x_0 + \frac{l}{2} \cos 45^\circ, & \quad x_0 + \frac{l}{2} \cos 75^\circ. \end{aligned}$$

Когда это условие будет выполнено, отклонения от прямого пути вершины M треугольника AA_1M на всей длине хода l , как показывает анализ, будут заключаться в таких пределах:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{65536 r r_1 \sin \varphi \sin \varphi_1 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos (\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 l^6, \\ & + \frac{1}{65536 r r_1 \sin \varphi \sin \varphi_1 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos (\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 l^6. \end{aligned}$$

О ПРОСТЕЙШЕЙ СУСТАВЧАТОЙ СИСТЕМЕ, ДОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЯ, СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОКОЛО ОСИ

§ 1. Для преобразования движения на плоскости простейшим средством представляется суставчатая система, составленная из линии, вращающейся около неподвижного центра, и линии, сочлененной с нею. Все точки первой линии могут двигаться только по концентрическим кругам; точки же второй линии могут двигаться по различным кривым, причем кривые, описываемые одновременно ее точками, значительно разнятся между собою по виду. Вследствие этого при движении одной из ее точек по какой-либо кривой в других точках ее получают движения по кривым иного вида.



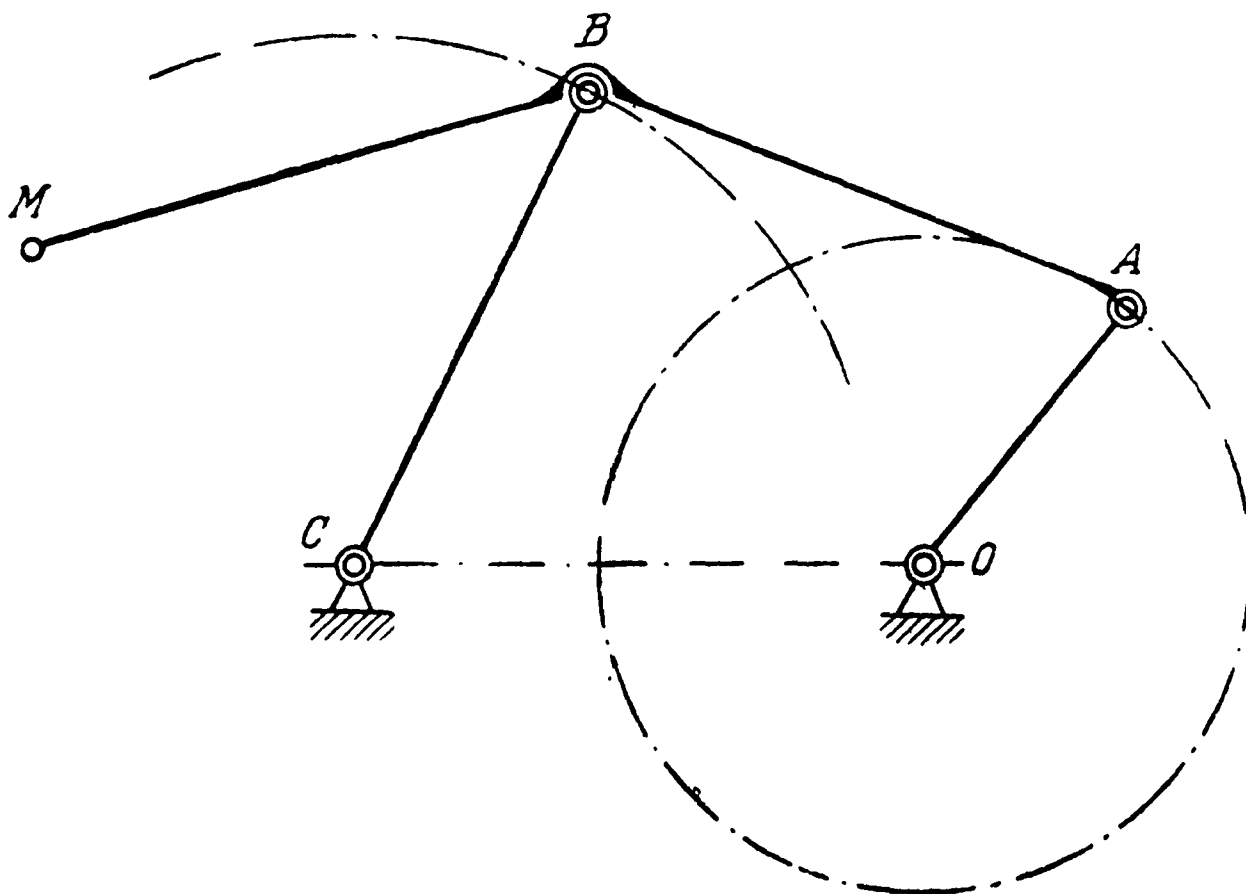
Фиг. 1.

При таком преобразовании движения особенного внимания заслуживают точки второй линии, которых расстояния от оси сочленения ее с первой линией равны расстоянию этой оси от неподвижного центра вращения последней линии. Нетрудно показать, что при движении одной из таких точек по кривой, симметрической около оси, проходящей через неподвижный центр вращения, другая описывает кривую, имеющую то же свойство. Из этого видно, что всякая ломаная линия ABM (фиг. 1), сочлененная с прямою BC , вращающейся около неподвижного центра C , при равенстве

$$AB = BM = BC,$$

доставляет средство преобразовывать движение по кривой, симметрической около оси, проходящей через центр C , в движение по кривой другого вида, имеющей то же свойство. Вид и положение последней кривой будет меняться при перемене угла ABM и места центра вращения C , который, согласно вышесказанному, должен находиться на оси симметрии первой кривой.

Преобразовывая таким образом движение точки A , когда она представляет конец радиуса OA (фиг. 2), вращающегося около центра O ,



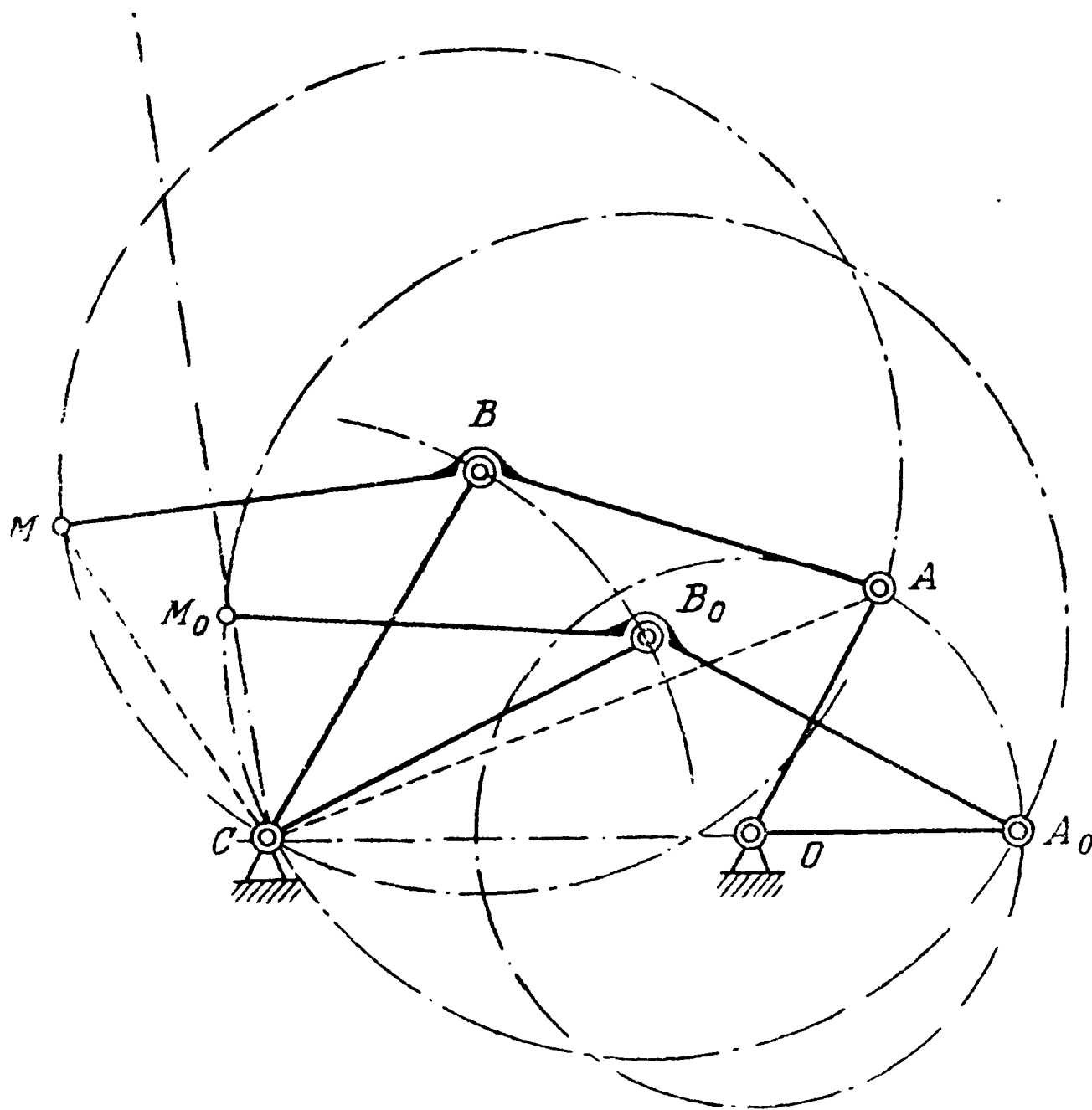
Фиг. 2.

мы получаем суставчатую систему, в которой точка M описывает кривую, симметрическую около оси, проходящей через центр C . Если при этом расстояние центров C , O превосходит длину радиуса OA , для него возможно сделать полный оборот около центра O , по окончании которого точка M возвращается на свое первоначальное место, описав некоторую сомкнутую линию, симметрическую около оси, проходящей через центр C .

Такое преобразование вращательного движения может иметь полезное применение там, где представляется надобность дать точке движение, к которому достаточно близко подходит движение точки M в рассматриваемой нами системе при каких-либо размерах ее частей и положениях неподвижных центров вращения. Вся трудность в опре-

делении тех и других согласно с видом движения, которое желают получить.

Здесь мы займемся рассмотрением случаев, наиболее простых и наиболее представляющихся на практике, а именно, когда имеется в виду получить движение по кривой, которой некоторая часть, более или менее значительная, мало разнится от дуги круга или от прямой линии.



Фиг. 3

§ 2. В рассматриваемой нами системе (фиг. 3) точки A , B движутся по кругам, которых центры суть O , C , причем длина линий AB , BM и величина угла ABM не меняются; вследствие этого имеют место такие равенства:

$$ABM = A_0B_0M_0,$$

$$OA = OA_0, \quad CB = CB_0.$$

Из последнего равенства следует равенство между собою шести линий

$$A_0B_0, B_0M_0, B_0C, AB, BM, BC,$$

так как по сказанному в § 1

$$A_0B_0 = B_0M_0 = B_0C, \quad AB = BM = BC,$$

откуда ясно, что точки A_0, C, M_0 лежат на круге, описанном из центра B_0 , а точки A, C, M — на круге, описанном из центра B , а потому углы $АСМ, АВМ, A_0CM_0, A_0B_0M_0$ связаны между собою равенствами

$$2АСМ + АВМ = 2\pi, \quad 2A_0CM_0 + A_0B_0M_0 = 2\pi,$$

которые дают

$$2АСМ + АВМ = 2A_0CM_0 + A_0B_0M_0.$$

Замечая, что

$$ABM = A_0B_0M_0,$$

$$АСМ = АСМ_0 + M_0СМ, \quad A_0CM_0 = АСМ_0 + A_0CA,$$

мы из последнего равенства выводим

$$M_0СМ = A_0CA. \quad (1)$$

На основании этой формулы и полагая

$$OA_0 = OA = r, \quad OC = d,$$

$$AB = BM = BC = A_0B_0 = B_0M_0 = B_0C = 1,$$

$$ABM = A_0B_0M_0 = \omega,$$

мы теперь найдем длину радиуса-вектора $СМ$ и угол наклонения его к линии $СМ_0$, определяющие место точки $М$ при каком-нибудь наклоне радиуса $ОА$ к линии центров $СОА_0$. Эти величины особенно просто выражаются через угол $АВС$, которого переменную величину мы будем изображать через φ и по которому легко находится соответствующее положение радиуса $ОА$.

Из равнобедренного треугольника $СВМ$, где

$$CB = 1, \quad BM = 1,$$

ВЫВОДИМ

$$CM = 2 \sin \frac{CBM}{2}, \quad (2)$$

что по равенству

$$CBM = ABM - ABC = \omega - \varphi$$

дает такую формулу для определения радиуса-вектора CM :

$$CM = 2 \sin \frac{\omega - \varphi}{2}.$$

Переходя к определению угла наклонения его к линии CM_0 , мы по (1) находим

$$MCM_0 = ACA_0,$$

из треугольника ACO выводим

$$\cos ACA_0 = \frac{AC^2 + CO^2 - AO^2}{2AC \cdot OC},$$

вследствие чего для определения угла MCM_0 получается такая формула:

$$\cos MCM_0 = \frac{AC^2 + CO^2 - AO^2}{2AC \cdot OC}.$$

Замечая же, что равнобедренный треугольник ABC , где

$$AB = 1, \quad BC = 1, \quad ABC = \varphi,$$

дает

$$AC = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$$

и что по нашему знакоположению

$$AO = r, \quad CO = d,$$

мы по этой формуле находим

$$\cos MCM_0 = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 + d^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

При определении угла MCM_0 по этому уравнению остается неизвестным его знак. Этот знак мы легко узнаем, замечая по (1), что

угол $МСМ_0$ равняется углу $АСА_0$; угол же $АСА_0$ имеет величину положительную или отрицательную, смотря по тому, выше или ниже линии центров $СОА_0$ лежит точка A . Вследствие этого одной и той же величине угла φ будут соответствовать два положения и точки A и точки M ; в одном точка A будет выше линии центров $СОА_0$, а точка M будет по левую сторону линии $СМ_0$, в другом точка A ниже линии $СОА_0$, а точка M направо от линии $СМ_0$. Что касается определения угла $АОА_0$ по углу $АСВ = \varphi$, то из треугольника $АОС$ выходит

$$\cos \angle ОАА_0 = \frac{AC^2 - AO^2 - OC^2}{2AO \cdot OC}.$$

Замечая, что

$$AC = 2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad AO = r, \quad OC = d,$$

мы из этого равенства выводим

$$\cos \angle ОАА_0 = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 - d^2}{2dr}.$$

Так как по вышепоказанному одной и той же величине угла φ будут соответствовать два положения и радиуса $ОА$ и радиуса-вектора $СМ$, различающиеся между собою только знаками углов $АОА_0$, $МСМ_0$, то при вращении радиуса $ОА$ вверх и вниз от линии центров $СОА_0$ на один и тот же угол точка M опишет кривую, симметрическую около оси $СМ_0$. Изображая через α предельную величину угла $АОА_0$ при рассматриваемом нами движении системы и через

$$\varphi_0, \varphi_1$$

величины угла $АВС = \varphi$, соответствующие

$$\angle ОАА_0 = 0, \quad \angle ОАА_0 = \pm \alpha,$$

мы замечаем, что при переходе угла $АОА_0$ от 0 до $+\alpha$ или $-\alpha$ угол φ будет переходить от φ_0 до φ_1 .

Прилагая формулу, сейчас нами выведенную, к частному случаю

$$\angle ОАА_0 = \alpha, \quad \varphi = \varphi_1,$$

$$\cos \alpha = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - d^2 - r^2}{2dr},$$
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(d+r)^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}}{4dr}. \quad (3)$$
[illegible]

отличается от дуги какого-либо круга, мы замечаем, что эта дуга, подобно траектории точки M , должна быть симметрична около оси $СМ_0$, а для этого центр ее должен лежать на этой оси. Полагая, что этот центр находится в точке O_1 (фиг. 4), мы теперь выведем формулу для определения расстояния точки M от центра O_1 , расстояния, которое

имело бы постоянную величину, если бы точка M описывала точно дугу круга около центра O_1 .

Из треугольника O_1CM выводим

$$MO_1^2 = O_1C^2 + CM^2 - 2 \cdot O_1C \cdot CM \cos MCM_0,$$

что по внесении вышенайденных величин радиуса-вектора CM и $\cos MCM_0$ дает

$$MO_1^2 = O_1C^2 + 4 \sin^2 \frac{\omega - \varphi}{2} - 4 \cdot O_1C \sin \frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Изображая через R радиус круга, от дуги которого наименее удаляется точка M при движении рассматриваемой нами системы, мы из этого уравнения получаем такую формулу для определения разности $MO_1^2 - R^2$:

$$MO_1^2 - R^2 = O_1C^2 - R^2 + 4 \sin^2 \frac{\omega - \varphi}{2} - 4 \cdot O_1C \sin \frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Мы теперь займемся определением условий, при которых эта разность наименее удаляется от 0, когда угол φ , согласно вышесказанному, не выходит за пределы

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_1.$$

§ 4. Полагая в выведенной нами формуле

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = x,$$

мы замечаем, что она приводится к следующему:

$$MO_1^2 - R^2 = K \left[(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 \right], \quad (4)$$

где

$$K, p_1, p_2, p_3$$

— постоянные, которых величина по

$$r, d, \omega, O_1C, R$$

определяется так:

$$K = - \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}{d}, \quad (5)$$

$$p_1 = 4 \frac{\sin \omega \cdot d + \sin \frac{\omega}{2} \cdot O_1 C}{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}, \quad (6)$$

$$p_2 = -4 \frac{\cos \omega \cdot d + \cos \frac{\omega}{2} \cdot O_1 C}{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C},$$

$$p_3 = \frac{(R^2 - 2 + 2 \cos \omega - O_1 C^2) d - \cos \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}. \quad (7)$$

Из формулы (4) видно, что при той же величине коэффициента K разность

$$MO_1^2 - R^2$$

будет оставаться тем ближе к нулю, чем менее удаляется от нуля функция

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3,$$

а потому для уменьшения по возможности предельной величины разности

$$MO_1^2 - R^2$$

при значениях φ , заключающихся между $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, мы должны сделать функцию

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3,$$

наименее удаляющуюся от нуля между $x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$.

Для достижения этого мы прикладываем к функции

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

теорему, доказанную нами вообще о функциях, наименее удаляющихся

от нуля, в мемуаре под заглавием „Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций“ *.

На основании этой теоремы и изображая через

$$+L, \quad -L$$

предельные значения функции

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

между

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

мы заключаем, что она должна не менее четырех раз достигать предельных величин $-L$, $+L$ при значениях x , не выходящих за пределы $x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$.

Мы теперь покажем, каким образом по этому свойству функции

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

она может быть найдена.

§ 5. Для этого мы замечаем, что все величины x , при которых функция

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

в пределах

$$x \leq \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x \geq \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

достигает величин $+L$, $-L$, не переходя за них, должны равняться кратным корням уравнения

$$\begin{aligned} & \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L \right] \left[x - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right] \times \\ & \times \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L \right] \left[x - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

* Стр. 462—578 настоящего издания. — *Ред.*

В самом деле, по составу этого уравнения видно, что оно удовлетворяется при всякой величине x , делающей

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 = -L$$

или

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 = +L.$$

Если это случается при x , равном $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ или $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, то эти величины, как видно также по составу уравнения, будут его кратными корнями.

Что же касается корней этого уравнения, лежащих между $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, они не могут быть не кратными, потому что при простых корнях уравнений

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0,$$

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L = 0$$

функция

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3,$$

достигнувши величины $-L$ или $+L$, переходит за эти величины.

Откуда видно, что в рассматриваемом нами случае уравнение (8) должно иметь по крайней мере четыре кратных корня, не выходящих за пределы

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

а это может иметь место только в том случае, когда оно имеет четыре двойных корня в пределах

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

так как оно по уничтожении радикалов приводится к уравнению 8-й

степени. Два из этих корней видны по составу уравнения, они суть.

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

Что касается остальных двух, то они, заключаясь между $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, могут быть представлены так:

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}.$$

где φ_2, φ_3 — некоторые углы, заключающиеся между φ_0, φ_1 .

§ 6. Мы теперь покажем, как найдутся функции

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L,$$

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L$$

по углам

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

и как определяются неизвестные углы φ_2, φ_3 .

По вышешоказанному относительно уравнения (8) видно, что уравнение

$$\left[(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L \right] \times$$

$$\times \left[(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L \right] = 0$$

будет иметь два простых корня

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

и два двойных

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}.$$

Так как это уравнение разлагается на два

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L = 0,$$

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L = 0,$$

не имеющие общих корней и приводящиеся к кубическим, каждое из них будет иметь один простой корень и один двойной.

Останавливаясь на уравнении

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0$$

и полагая, что ему принадлежит простой корень

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

и двойной

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2},$$

мы замечаем, что произведение трех разностей

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2}, \\ & \cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x}, \\ & \cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x}, \end{aligned}$$

будучи приравнено нулю, дает уравнение

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 = 0,$$

имеющее также простой корень, равный $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$, и двойной корень, равный $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$. Но это уравнение, которого первая часть представляет функцию вида

$$(P_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + P_2x + P_3,$$

не может иметь три общих корня с уравнением

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0,$$

не будучи ему тождественным, а потому должно иметь место такое равенство:

$$\begin{aligned} & (p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = \\ & = \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Подобным образом находим

$$\begin{aligned} & (p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L = \\ & = \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_1}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_3}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2. \end{aligned}$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 - \\ & - \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_1}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_3}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 = 2L. \end{aligned} \quad (10)$$

Это равенство, имеющее место при всяком x , дает, как мы увидим, уравнения для определения неизвестных углов φ_2 , φ_3 .

§ 7. Раскрывая скобки в последнем равенстве и заменяя котангенсы отношениями косинусов к синусам, мы находим, что оно по сокращении приводится к следующему:

$$\begin{aligned} 2L = & \left[\frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\sin \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}} \right] \sqrt{x(1-x)} + \frac{\cos \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} + \\ & + 2 \frac{\cos \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_3}{2}} - \left[\frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\cos \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}} \right] x - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 2 \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}}, \end{aligned}$$

откуда видно, что для возможности его при всякой величине x должно быть

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} &= \frac{\sin\left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}, \\ \frac{\cos\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} &= \frac{\cos\left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти равенства послужат нам для определения углов φ_2, φ_3 . Деля эти равенства друг на друга, получаем

$$\operatorname{tang}\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}\right).$$

Так как углы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ заключаются между 0 и π , то это уравнение предполагает одно из двух:

или равенство

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2},$$

или равенство

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \pm \pi.$$

Замечая же, что в последнем случае по (11) получается уравнение

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = -\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2},$$

которое невозможно при $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ положительных, не превосходящих π , мы заключаем, что должно быть

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}, \quad (12)$$

вследствие чего уравнения (11) дают

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}. \quad (13)$$

Из последних двух уравнений нетрудно вывести формулы для определения неизвестных углов φ_2 , φ_3 .

В самом деле, по (12) имеем

$$\cos \varphi_3 = \cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right)$$

и вследствие того

$$\sin^2 \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_3}{2} = \frac{1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right)}{2},$$

что по внесении в уравнение (13) дает

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right)}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2},$$

откуда по раскрытии скобок и по разделении на $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$ получается такое уравнение:

$$\sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cotang^2 \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cotang \frac{\varphi_2}{2} - \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\cotang \frac{\varphi_2}{2}$ и ограничиваясь одним положительным корнем, находим

$$\cotang \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}} \left[\sqrt{\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} - \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}} \right]. \quad (14)$$

Так определяется угол φ_2 по данным углам φ_0 , φ_1 .

Этот угол будет служить нам как вспомогательная величина для упрощения формул. Что касается угла φ_3 , то по (12) величина его легко получается, когда найден угол φ_2 .

§ 8. По углам

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

нетрудно определить величины

$$L, p_1, p_2, p_3,$$

входящие в наши формулы.

Полагая в уравнении (10)

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

находим

$$2L = \left(\cotang \frac{\varphi_1}{2} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \right)^2,$$

что дает такую простую формулу для определения L :

$$L = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}.$$

Замечая же, что произведение

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2$$

после замены в нем котангенсов отношениями косинусов к синусам приводится к выражению

$$\left[\frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} x + 1 \right] \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} x - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 2 \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}},$$

мы по (9) заключаем, что $p_1, p_2, p_3 + L$ имеют такие величины:

$$p_1 = \frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}},$$

$$p_2 = - \frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}},$$

$$p_3 + L = - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 2 \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}}.$$

Последнее равенство по внесению в него вышенайденной велич L дает

$$p_3 = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} - 2 \cotang \frac{\varphi_2}{2}.$$

Так определяется величина коэффициентов

$$p_1, p_2, p_3,$$

с которыми функция

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

наименее удаляется от нуля между

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

При этом, как видели, уклонения функции

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

от нуля не выходят за пределы

$$-L = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}, \quad L = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}};$$

этих же пределов она достигает четыре раза: при

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$$

она достигает первого предела; при

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}$$

второго.

§ 9. Переходя к определению величин

$$r, d, O_1C, R,$$

при которых по § 4 разность

$$MO_1^2 - R^2$$

приводится к функции

$$K \left[(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 \right],$$

мы вносим найденные нами величины коэффициентов

$$p_1, p_2$$

в уравнения (6), что дает нам

$$\frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} = 4 \frac{d \sin \omega + O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}},$$

$$\frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} = 4 \frac{d \cos \omega + O_1 C \cos \frac{\omega}{2}}{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Кроме того, из треугольника $A_0 B_0 C$ (фиг. 4), где

$$A_0 B_0 = 1; \quad CB_0 = 1, \quad A_0 B_0 C = \varphi_0, \quad CA_0 = CO + OA_0 = d + r,$$

выходит

$$d + r = 2 \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Решая это уравнение вместе с двумя предыдущими относительно

$$r, d, O_1 C,$$

находим

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \quad (15)$$

$$O_1 C = \frac{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)} \right].$$

Внеся же эти величины в уравнение (3), получаем такую формулу для определения угла α :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}. \quad (16)$$

Что касается радиуса R , то он найдется из уравнения (7) по внесении в него вышепоказанных величин

$$p_3, d, r, O_1C.$$

§ 10. При величинах

$$r, d, O_1C, R,$$

таким образом получаемых, разность

$$MO_1^2 - R^2$$

приводится к функции

$$K \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 \right],$$

где по (5)

$$K = - \frac{(d^2 - r^2) O_1C \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

вследствие чего, по сказанному выше об этой функции, разность

$$MO_1^2 - R^2$$

между $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ не будет выходить за пределы

$$\begin{aligned} & + \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1C \sin \frac{\omega}{2}}{d}, \\ & - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1C \sin \frac{\omega}{2}}{d} \end{aligned}$$

и будет достигать первого предела при

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_2,$$

а второго при

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_3.$$

Откуда видно, что при движении рассматриваемой нами системы в пределах

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_1$$

точка M (фиг. 5) не будет удаляться от центра O_1 на расстояние больше M_0O_1 , которого она достигает при $\varphi = \varphi_0$, и не будет приближаться к O_1 на расстояние меньше M_1O_1 , на котором она находится при $\varphi = \varphi_1$. Вследствие этого точка M будет оставаться между двумя концентрическими кругами, описанными из центра O_1 радиусами

$$R_0 = M_0O_1, \quad R_1 = M_1O_1. \quad (17)$$

Эти радиусы будут представлять предельные величины расстояния точки M от центра O_1 . Так как по вышесказанному расстояние MO_1 будет достигать предельной величины $R_0 = M_0O_1$, не переходя за нее при

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_2,$$

то первый круг будет касаться траектории точки M на оси симметрии CM_0 , где

$$\varphi = \varphi_0,$$

и в двух местах по обе стороны этой оси, где

$$\varphi = \varphi_2.$$

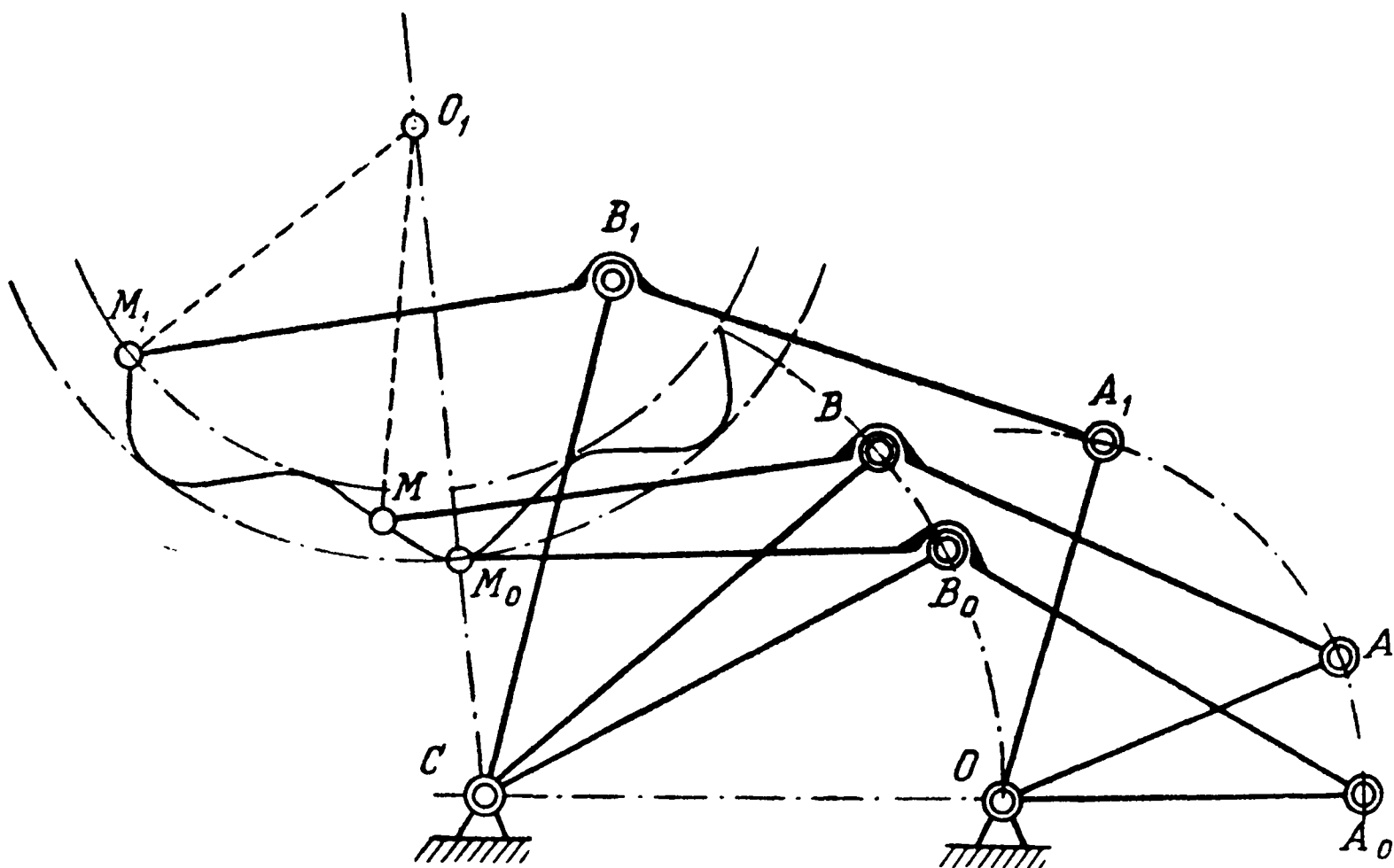
Относительно второго круга мы замечаем, что он также будет касаться траектории точки M в двух местах по обе стороны оси симметрии там, где

$$\varphi = \varphi_3,$$

так как при этой величине угла φ расстояние O_1M достигает предела $R_1 = M_1O_1$, не переходя за него. Кроме того, на этом круге будут

лежать концы траектории точки M , которых она достигает при предельной величине $\varphi = \varphi_1$, так как при этой величине φ расстояние MO_1 равняется $R_1 = M_1O_1$. Что касается радиусов R_0, R_1 , они связаны между собою очень простым уравнением, которое легко выводится из показанного нами относительно предельных величин разности

$$MO_1^2 - R^2.$$



Фиг. 5

В самом деле, по формулам (§ 10), определяющим эти величины, видно, что между $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$ наибольшая величина разности

$$MO_1^2 - R^2$$

есть

$$+ \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

а наименьшая

$$- \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}{d}.$$

Замечая по вышесказанному, что первая величина получается при

$$MO_1 = R_0,$$

а вторая при

$$MO_1 = R_1,$$

мы заключаем на основании этого, что

$$R_0^2 - R^2 = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

$$R_1^2 - R^2 = - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

откуда через исключение R^2 выводим

$$R^2 = R \cdot \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) O_1 C \sin \frac{\omega}{2}}{d}. \quad (18)$$

§ 11. Мы теперь займемся приложением выведенных нами формул к некоторым частным случаям и начнем с тех, в которых ломаная линия ABM приводится к прямой, что по нашему знакоположению случается при равенстве

$$\omega = \pi.$$

Так как угол ω не входит в уравнение (14), определяющее угол φ_2 , то она остается без изменения; прочие же формулы по внесении π вместо ω упрощаются и приводятся к следующему:

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)},$$
(19)

$$CO_1 = - \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)} \right] \operatorname{tang} \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (20)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}. \quad (21)$$

Из этих формул получаются очень простые результаты в двух частных предположениях, а именно:

1) когда предполагается

$$CO_1 = \infty$$

и 2) когда предполагается

$$\alpha = \pi.$$

В первом случае рассматриваемая нами система дает движение, близкое к прямолинейному, во втором — близкое к круговому.

Остановливаясь на первом случае, мы по (20) замечаем, что CO_1 обращается в ∞ только при равенстве

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

которое дает

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}.$$

Внеся эту величину φ_2 в уравнения (19), находим

$$r = \frac{3}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}, \quad (23)$$

откуда по исключении $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ получается такое простое уравнение:

$$2 + r = 3d,$$

которому должны удовлетворять величины r , d в рассматриваемой нами системе для того, чтобы она, состоя из трех прямых, могла давать движение, близкое к прямолинейному в пределах более или менее широких.

Так как при равенстве

$$O_1C = \infty$$

центр O_1 удаляется в ∞ , то дуги концентрических кругов, между которыми по § 10 будет оставаться точка M при своем движении, обращаются в параллели, перпендикулярные к оси симметрии CM_0 и удаленные друг от друга на расстояние, равное предельной величине

$$R_0 - R_1$$

при

$$CO_1 = \infty.$$

Определяя же этот предел по уравнению (18) и замечая (фиг. 5), что отношение

$$\frac{O_1C}{R_0} = \frac{O_1C}{M_0O_1} = \frac{O_1C}{O_1C - CM_0}$$

при

$$O_1C = \infty$$

приводится к 1, находим, что этот предел равняется

$$\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) \sin \frac{\omega}{2}}{d}.$$

Вследствие этого, изображая через D взаимное расстояние параллелей, между которыми в рассматриваемом нами случае будет заключаться траектория точки M , мы находим для определения D формулу

$$D = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

которая по внесении вышепоказанных величин ω , φ_2 , r , d дает

$$D = 2 \frac{\left(1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}\right) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 - 2\varphi_1}{4}}{\left(1 + \sin \frac{\varphi_0}{2}\right) \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4}\right)}. \quad (24)$$

Что касается угла α , то по уравнению (21), внося в него $\frac{\pi}{2}$ вместо $\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}$, находим

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4} \right)}. \quad (25)$$

§ 12. В полученные нами формулы, кроме угла φ_0 , предполагаемого данным, входит еще угол φ_1 , который должен быть найден.

Для определения этого угла мы из равенств (22), (12) выводим

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2},$$

что дает

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_2}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_3}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\varphi_1}{2}}{2}.$$

Внося же эти величины

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}$$

в формулу (13), мы получаем уравнение

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin \frac{\varphi_1}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

из которого выходит

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = 1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

На основании этого равенства и уравнения (23), которое дает

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1 + 2r}{3},$$

выводим

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \frac{1 - r}{3};$$

по равенствам же

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1 + 2r}{3}, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \frac{1 - r}{3} \quad (26)$$

находим

$$\begin{aligned}\cos \frac{\varphi_0}{2} &= \frac{2}{3} \sqrt{(1-r)(2+r)}, & \cos \frac{\varphi_1}{2} &= \frac{1}{3} \sqrt{(5-2r)(1+2r)}, \\ \cos \varphi_0 &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{7-8r-8r^2}{9}, & \cos \varphi_1 &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1+16r-8r^2}{9}, \\ \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4} \right) &= \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}}{2} = \frac{1-r}{3}, \\ \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} &= \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}{2} = \frac{1}{3} (4r-1), \\ \sin \frac{\pi - \varphi_0 - 2\varphi_1}{4} \sin \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4} &= \frac{1}{2} \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \\ &= \frac{\cos \varphi_1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}}{2} = \frac{(4r-1)(1-r)}{9}.\end{aligned}$$

На основании последних равенств и уравнений (26), которые дают

$$1 - \sin \frac{\varphi_0}{2} = 2 \frac{1-r}{3}, \quad 1 + \sin \frac{\varphi_0}{2} = 2 \frac{2+r}{3}, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \frac{1-r}{3},$$

мы можем формулу (24) представить так:

$$D = \frac{1}{27} \frac{(1-r)(4r-1)^3}{(2+r) \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4}},$$

где числитель не содержит углов φ_0 , φ_1 .

Для исключения их из знаменателя мы замечаем, что

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right] \cos \frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 + \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2},\end{aligned}$$

откуда по внесении вышепоказанных величин

$$\sin \frac{\varphi_0}{2}, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad \cos \frac{\varphi_0}{2}, \quad \cos \frac{\varphi_1}{2}$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4} = \\ & = \frac{1-r}{27} [V(5-2r)^3(1+2r) + 4V(2+r)^3(1-r)], \end{aligned}$$

вследствие чего предыдущее выражение расстояния D приводится к формуле

$$D = \frac{(4r-1)^3}{(2+r)[V(5-2r)^3(1+2r) + 4V(2+r)^3(1-r)]}.$$

Так определяется взаимное расстояние двух параллелей, между которыми остается точка M при движении рассматриваемой нами системы, когда угол φ не выходит за пределы $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$.

В этом случае, как видели, предельная величина угла A_0OA получается из уравнения (25). Внося сюда вышепоказанные величины

$$\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}, \quad \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4} \right)$$

и замечая по (26), что

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1+2r}{3},$$

получаем такое уравнение для определения α , предельной величины угла A_0OA :

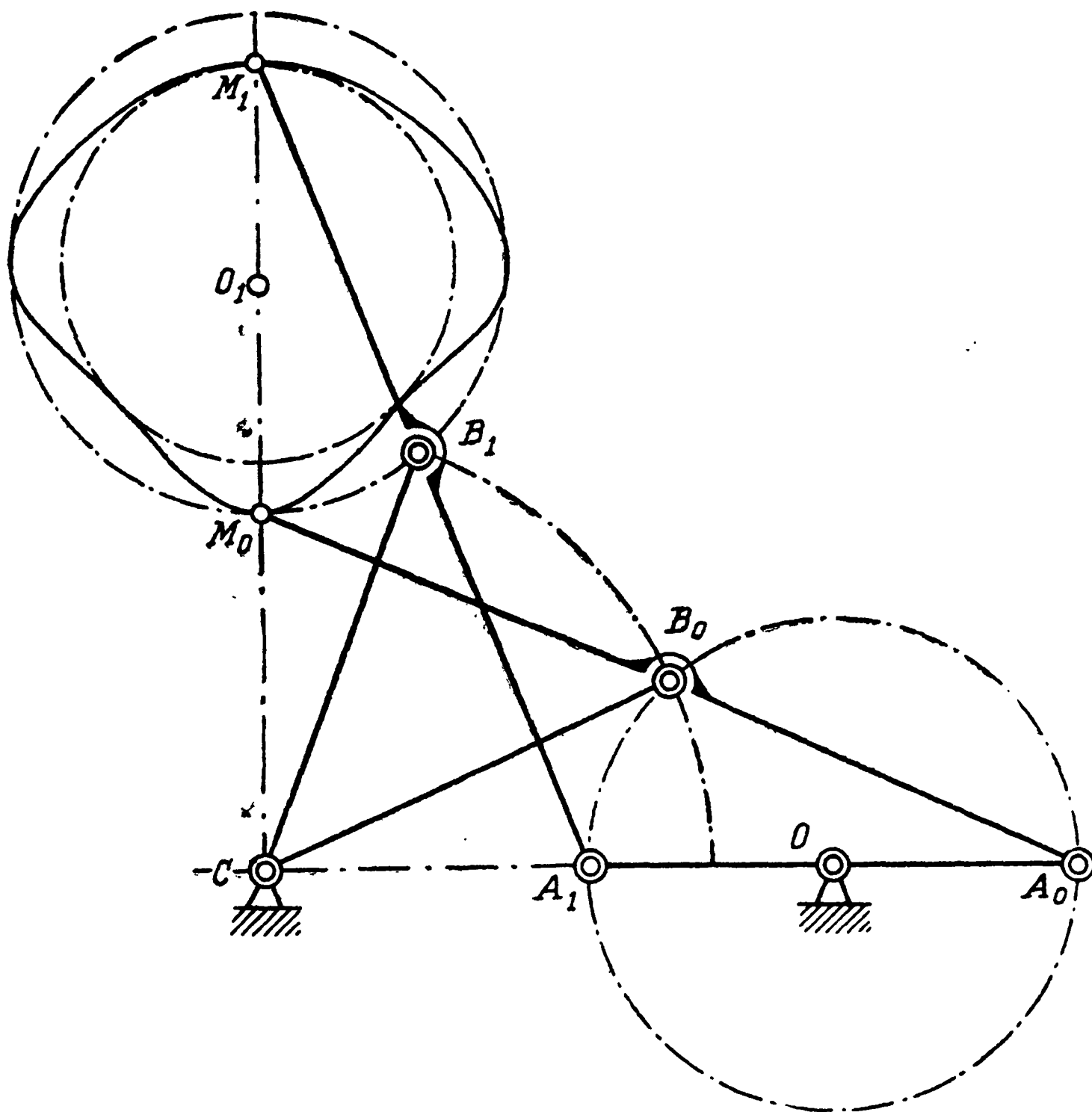
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4r-1}{r(2+r)},$$

откуда ясно, что в рассматриваемой нами системе радиус r должен превосходить $1/4$ и что по мере приближения r к $1/4$ уменьшается угол вращения радиуса AO , при котором точка M остается между двумя вышепоказанными параллелями; вместе с тем, как видно из формулы, определяющей величину расстояния D , эти параллели быстро сближаются между собою, вследствие чего быстро уменьшаются предельные отклонения точки M от прямой линии.

§ 13. Переходя к предположению

$$\alpha = \pi,$$

мы замечаем, что при такой величине α предельные положения радиуса AO по обе стороны линии центров COA_0 совпадают на ней (фиг. 6) и вследствие того предельные положения точки M по обе стороны оси симметрии CM_0 должны совпадать на этой оси. Так как по § 10 концы



Фиг. 6

траектории точки M лежат на круге, описанном из центра O_1 радиусом $R_1 = M_1O_1$, то совпадение их должно произойти на этом круге, и там, где оно произойдет, этот круг будет касаться траектории. На основании этого и принимая в соображение то, что было показано в § 10 вообще о траектории точки M , мы заключаем, что в частном случае, когда

$$\alpha = \pi,$$

точка M будет двигаться по сомкнутой кривой, оставаясь между двумя концентрическими кругами, описанными из центра O_1 радиусами $R_1 = M_1 O_1$, $R_0 = M_1 O_1$, причем будет касаться каждого из них в трех местах: один раз на оси симметрии MO_0 и два раза по обеим сторонам этой оси. Кривая эта, как нетрудно заметить, будет удаляться от круга, описанного из центра O_1 радиусом $\frac{R_0 + R_1}{2}$ на расстояние не более $\frac{R_0 - R_1}{2}$, а потому она будет мало отличаться от него, если $\frac{R_0 - R_1}{2}$ близко к нулю.

Чтобы приложить к этому случаю формулы, выведенные нами в § 11, полагаем

$$\alpha = \pi.$$

При этой величине α уравнение (21) дает

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}} = 1,$$

откуда выходит

$$\left[\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right] \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^4 \frac{\varphi_2}{2},$$

что по замене произведения

$$\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}$$

разностью

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

приводится к уравнению

$$\sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^4 \frac{\varphi_2}{2},$$

которое предполагает одно из двух: или

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2},$$

или

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = -\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}.$$

Так как по (19) при последнем равенстве получается

$$r > d$$

и вследствие того радиус r не может совершить полного оборота около центра O , остается возможным одно первое:

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad (27)$$

из которого, замечая по (12), (13), что

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2},$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}},$$

получается уравнение

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}. \quad (28)$$

На основании двух последних равенств нетрудно найти формулу для определения угла

$$\theta = \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \quad (29)$$

по углу

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad (30)$$

при помощи которого, как мы увидим, получаются очень простые выражения всех величин, представляющихся при рассмотрении настоящего случая.

В самом деле, уравнения (27), (28) по внесении в них θ вместо

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}$$

и

$$\theta = \frac{\varphi_0}{2}, \quad \theta = \frac{\varphi_1}{2}$$

Вместо φ_2 , φ_3 дают

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \theta &= \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4} \right), \\ \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \theta &= \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Вычитая эти равенства одно из другого, находим

$$\left(\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \sin \theta = \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4} \right),$$

что приводится к следующему:

$$\left(\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \theta = \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \theta.$$

Откуда выходит

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2}} = -\operatorname{tang} \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

что предполагает

$$\theta + \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = n\pi,$$

где n — целое число. Для определения этого числа мы замечаем, что при φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 положительных, не превосходящих π , угол

$$\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}$$

заклучается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а угол

$$\theta = \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}$$

между 0 и $\frac{3\pi}{2}$, вследствие чего сумма

$$\theta + \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}$$

должна быть больше 0 и меньше 2π , а потому в выведенном равенстве для числа n возможна только одна величина

$$n = 1,$$

при которой оно дает

$$\theta = \pi - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

что по (30) приводится к равенству

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \psi. \quad (32)$$

Обращаясь снова к уравнениям (31), мы заменяем в них

$$\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4} \right), \quad \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4} \right)$$

через

$$\frac{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{2}, \quad \frac{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{2}$$

и потом делим одно на другое. Это дает нам

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0}{2} \right)},$$

откуда выходит

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} &= \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0}{2} \right) \sin \frac{\varphi_0}{2} - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_1}{2} \right) \sin \frac{\varphi_1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [\sin (\theta - \varphi_1) - \sin (\theta - \varphi_0)] \end{aligned}$$

и вследствие того

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \right) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2},$$

что дает

$$\cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \right) \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}.$$

Так как по (30) и (32)

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

это равенство приводится к следующему:

$$\sin \psi = \sin 3\psi \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

из которого получаем

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} &= \frac{\sin \psi}{\sin 3\psi}, \\ \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} &= \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 3\psi}} = \frac{\sin 2\psi \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}. \end{aligned} \quad (33)$$

§ 14. Для определения величин

$$r, d, O_1C$$

мы замечаем, что в рассматриваемом нами случае вследствие равенства (27) уравнения (19), (20) дают

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

$$CO_1 = - \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \tan \theta = - 2 \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \tan \theta,$$

откуда по внесении вышепоказанных величин

$$\theta, \quad \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}$$

выходит

$$r = \frac{2 \sin \psi \sin 2\psi \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \quad CO_1 = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi}.$$

Последней формулой определяется место центра O_1 двух концентрических кругов, между которыми заключается траектория точки M . Радиусы R_0 , R_1 этих кругов по § 10 имеют такие величины:

$$R_0 = O_1M_0, \quad R_1 = O_1M_1.$$

Замечая, что в рассматриваемом нами случае (фиг. 6)

$$O_1M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1M_1 = CM_1 - CO_1,$$

мы из этих равенств выводим

$$R_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = CM_1 - CO_1,$$

что дает нам

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}.$$

Внеся же сюда вышешоказанную величину CO_1 и находя из равнобедренных треугольников CB_0M_0 , CB_1M_1 , где

$$CB_0 = B_0M_0 = CB_1 = B_1M_1 = 1,$$

$$CB_0M_0 = \pi - A_0B_0C = \pi - \varphi_0, \quad CB_1M_1 = \pi - A_1B_1C = \pi - \varphi_1,$$

что

$$CM_0 = 2 \cos \frac{\varphi_0}{2}, \quad CM_1 = 2 \cos \frac{\varphi_1}{2},$$

получаем

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos^2 \phi}{\sin 3\phi} - \cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2 \cos^2 \phi}{\sin 3\phi} - 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

что по внесении величин

$$\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}$$

приводится к таким формулам:

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \cos \phi \sin 2\phi \sqrt{2 \cos 2\phi}}{\sin 3\phi}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos 2\phi}{\sin 3\phi},$$

откуда видно, что угол ϕ не должен превосходить $\frac{\pi}{4}$ и что с приближением угла ϕ к $\frac{\pi}{4}$ уменьшается и величина $\frac{R_0 - R_1}{2}$ и величина $\frac{R_0 + R_1}{2}$.

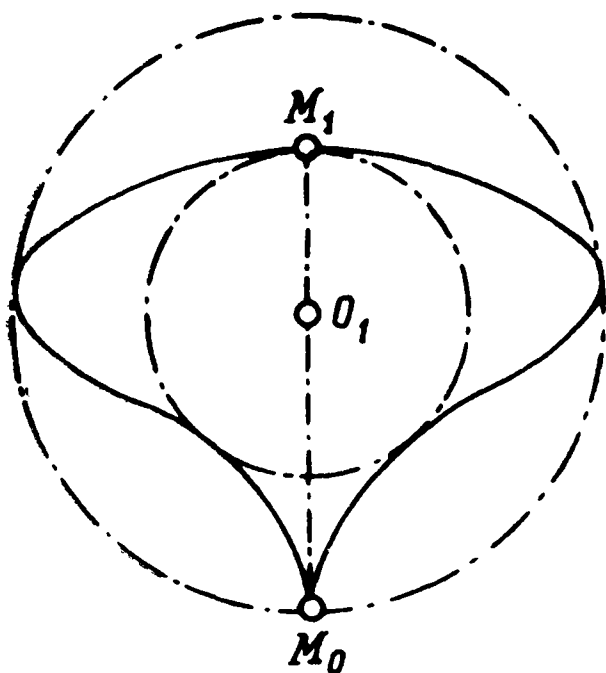
При этом первая величина приближается к нулю гораздо быстрее, чем вторая, так как отношение первой ко второй с увеличением угла ψ до $\frac{\pi}{4}$ приближается к нулю, вследствие чего при ψ , близком к $\frac{\pi}{4}$,

траектория точки M представляет кривую, мало отличающуюся от круга.

С уменьшением же угла ψ отношение

$$\frac{R_0 - R_1}{2} : \frac{R_0 + R_1}{2}$$

увеличивается и траектория точки M меняет постепенно свой вид, переходя из кривой, мало отличающейся от круга, в кривую сердцевидную (фиг. 7).



Фиг. 7

§ 15. В предыдущих параграфах мы показали приложения общих формул к частным случаям, когда ломаная линия ABM обращается в прямую. Мы теперь займемся применением их к различным случаям, в которых линия ABM остается ломаной, и начнем с случая, когда

$$O_1C = \infty,$$

что по (15) имеет место при равенстве

$$\omega = 2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (34)$$

Внеся эту величину ω в формулы (15), (16), находим

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \quad (35)$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)},$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}, \quad (36)$$

где φ_2 есть вспомогательный угол, который по углам φ_0, φ_1 определяется уравнениями, показанными в § 7.

Переходя к частному предположению

$$\alpha = \pi,$$

вносим эту величину α в формулу (36), что дает нам

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}} = 1.$$

Замечая, что это уравнение одинаково с тем, которое мы нашли в § 13 для случая $\omega = \pi$ и при помощи которого из общих формул вывели

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad \theta = \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi,$$

$$\cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \frac{\sin \psi}{\sin 3\psi}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \frac{\sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}$$

где

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

мы заключаем, что все эти равенства будут иметь место и в настоящем случае. Вследствие же этих равенств из уравнений (34), (35) выходит

$$\omega = \pi + 2\psi,$$

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \frac{2 \sin \psi \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}.$$

В рассматриваемом нами случае, когда

$$\alpha = \pi,$$

предельные положения радиуса AO при вращении его в ту и другую сторону совпадают на линии центров OC (фиг. 8), вследствие чего здесь, как и в предшествующем случае, концы траектории точки M будут совпадать на оси симметрии CM_0 и она представит

траектории. Находя из равнобедренных треугольников CB_0M_0 , CB_1M_1 , где

$$CB_0 = B_0M_0 = CB_1 = B_1M_1 = 1, \\ CB_0M_0 = \omega - A_0B_0C = \omega - \varphi_0, \quad CB_1M_1 = \omega - A_1B_1C = \omega - \varphi_1,$$

что

$$CM_0 = 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}, \quad CM_1 = 2 \sin \frac{\omega - \varphi_1}{2}, \quad (37)$$

получаем для определения взаимного расстояния точек M_0 , M_1 такую формулу:

$$M_0M_1 = CM_1 - CM_0 = 2 \sin \frac{\omega - \varphi_1}{2} - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2},$$

что дает

$$M_0M_1 = 4 \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

откуда по внесении вышепоказанных величин

$$\omega, \quad \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}$$

выходит

$$M_0M_1 = \frac{4 \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos^3 2\psi}}{\sin 3\psi}.$$

Из этой формулы видно, что угол ψ не должен превосходить $\frac{\pi}{4}$ и что с приближением его к $\frac{\pi}{4}$ уменьшается взаимное расстояние параллелей, между которыми движется точка M при вращении радиуса AO около центра O , вследствие чего при ψ , близком к $\frac{\pi}{4}$, точка M мало отклоняется от прямой, лежащей между этими параллелями в одинаковом расстоянии от каждой.

§ 16. Говоря о случае, когда радиус AO совершает полный оборот около центра O , мы делали частные предположения или относительно угла, образуемого двумя частями ломаной линии ABC , или относительно расстояния центров C , O_1 . Теперь мы покажем приложение к этому случаю общих формул, не делая никакого частного предположения. Уравнения, которые при этом получаются, сложнее прежних; но они представляются под видом, удобным для вычисления.

Чтобы приложить формулы, выведенные в § 9, к случаю, когда радиус AO совершает полный оборот около центра O , делаем

$$\alpha = \pi.$$

При такой величине α уравнение (16) дает

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}} = 1.$$

Определяя по этому уравнению величину

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

находим

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \pm \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}.$$

Так как по (15) при отрицательной величине

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

выходит

$$r > d,$$

вследствие чего радиус r не может совершить полного оборота, мы оставляем в полученном равенстве один знак $+$, что дает нам

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}. \quad (38)$$

Внеся эту величину $\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$ в уравнения (15), находим

$$\begin{aligned} r &= \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \\ d &= \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \\ O_1 C &= 2 \frac{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \end{aligned} \quad (39)$$

где φ_2 есть вспомогательный угол, которого величина по углам φ_0 , φ_1 определяется уравнениями, данными в § 7; угол же ω получается из уравнения (38). Так как для угла ω возможны все значения от 0 до 2π , то по этому уравнению найдутся две величины ω , из которых одна дает

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

а другая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0.$$

При той и другой величине ω получаются системы, в которых траектория точки M остается между двумя концентрическими кругами, описанными из центра O_1 и касающимися к ней в трех местах.

Но эти траектории представляют кривые двух различных видов, смотря по тому, будет ли

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0$$

или

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0.$$

Разница в виде этих кривых ясно обнаруживается при определении положения центра O_1 относительно точек пересечения их с осью симметрии CM_0 .

§ 17. Для определения разности

$$CO_1 = CM_0,$$

показывающей положение центра O_1 относительно точки M_0 (фиг. 9), мы выводим из равнобедренного треугольника CB_0M_0 , где

$$CB_0 = B_0M_0 = 1,$$

$$CB_0M_0 = A_0B_0M_0 - A_0B_0C = \omega - \varphi_0,$$

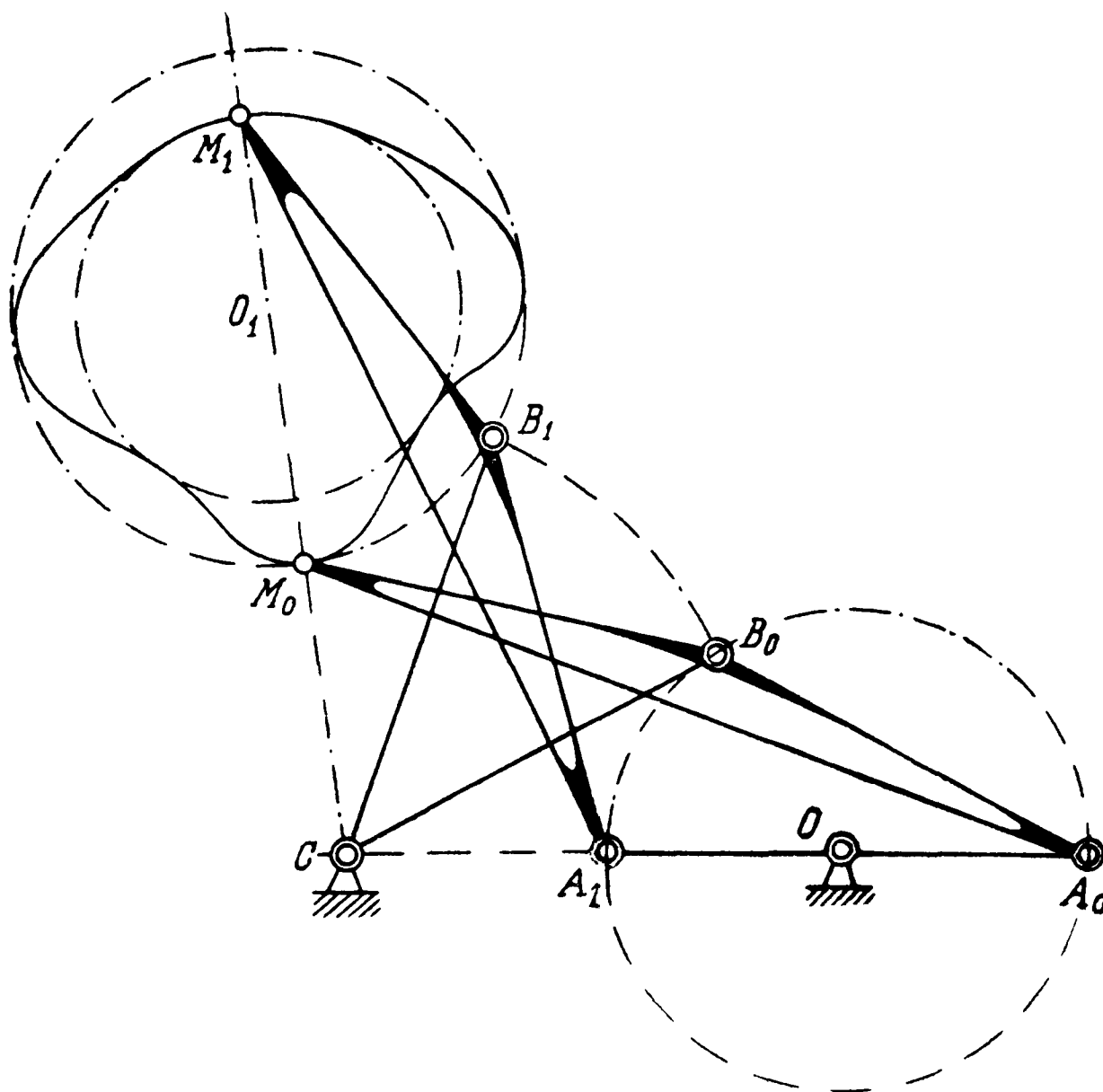
что

$$CM_0 = 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}.$$

Это равенство вместе с величиною CO_1 по (39) дает

$$CO_1 - CM_0 = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$



Фиг. 9

Для упрощения этой формулы мы замечаем, что

$$2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right) = \cos (\omega - \varphi_2 - \varphi_0) - \cos \varphi_2 =$$

$$= \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) \cos \frac{\varphi_0}{2} + \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) \sin \frac{\varphi_0}{2} - \cos \varphi_2,$$

$$2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2},$$

вследствие чего она приводится к такому виду:

$$CO_1 - CM_0 = \frac{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) + \cos \varphi_2 - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

откуда, заменяя по (38)

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

через

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}},$$

выводим

$$O_1C - CM_0 = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2} + \cos \varphi_2 - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

что дает

$$O_1C - CM_0 = \frac{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}. \quad (40)$$

Подобным образом находим

$$O_1C - CM_1 = \frac{\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}. \quad (41)$$

Из этих формул прямо видно, что при

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0$$

разности

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

имеют знаки одинаковые. Замечая, что это не может иметь места, если центр O_1 лежит между точками M_0 , M_1 , мы заключаем, что эти

точки должны лежать по одну сторону его, если

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0.$$

Что касается случая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

то по составу формул (40), (41) видно, что при положительных величинах

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

знаки разностей

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

зависят от пределов, между которыми заключаются эти величины. Чтобы найти эти пределы, мы замечаем, что по сказанному в § 5 углы φ_2 , φ_3 должны заключаться между углами φ_0 , φ_1 , где $\varphi_0 > \varphi_1$, вследствие чего будем иметь

$$\varphi_0 > \varphi_3, \quad \varphi_1 < \varphi_2,$$

откуда выходит

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \sin \frac{\varphi_2}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} > \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \frac{\varphi_3}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} < \sin \frac{\varphi_3}{2},$$

и так как по (13)

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}},$$

последнее неравенство дает

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} < \sin \frac{\varphi_3}{2}.$$

Замечая же по (38), что

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}},$$

мы из этих неравенств выводим

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < \sin \frac{\varphi_3}{2},$$

что, в предположении

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

дает

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < \cos \frac{\varphi_2}{2}, \quad \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > \cos \frac{\varphi_3}{2}.$$

По этим неравенствам, доставляющим высший и низший пределы величины

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

находим

$$\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < \cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2},$$

откуда следует

$$\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

$$\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

так как $\varphi_2 < \varphi_0$, $\varphi_3 > \varphi_1$.

Выведенные нами неравенства показывают, что при определении разностей

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

по формулам (40), (41), в случае

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

получаются величины с знаками противоположными; по составу же этих разностей видно, что для этого центр O_1 должен лежать между точками M_0 , M_1 (фиг. 9).

На основании этого мы заключаем, что положение центра O_1 относительно точек M_0, M_1 меняется с переменою знака $\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)$.

Если

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > 0,$$

центр O_1 лежит между точками M_0, M_1 ; если же

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < 0,$$

точки M_0, M_1 лежат по одну сторону центра O_1 .

§ 18. Останавливаясь на случае

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < 0,$$

когда точки M_0, M_1 лежат по одну сторону от центра O_1 , и полагая, что они лежат ниже его (фиг. 10), находим

$$O_1M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1M_1 = CO_1 - CM_1,$$

вследствие чего по сказанному в § 10 относительно концентрических кругов, между которыми заключается рассматриваемая траектория, получаем для определения их радиусов R_0, R_1 такие равенства:

$$R_0 = O_1M_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = O_1M_1 = CO_1 - CM_1,$$

откуда выходит

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}.$$

Внеся же сюда величины

$$CO_1, \quad CM_0, \quad CM_1,$$

по (37), (39) получаем

$$\begin{aligned} \frac{R_0 + R_1}{2} &= \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} - \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} - \sin \frac{\omega - \varphi_1}{2}, \\ \frac{R_0 - R_1}{2} &= \sin \frac{\omega - \varphi_1}{2} - \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}, \end{aligned}$$

со знаком —. Вследствие этого, чтобы обнять оба случая, мы возьмем их с двойным знаком $\pm$. В формулах

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \pm \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \pm 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right),$$

таким образом получаемых, должен быть оставлен или верхний знак или нижний, причем выбор знака определяется тем, что полусумма $\frac{R_0 + R_1}{2}$ не может быть меньше нуля.

Переходя к случаю

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

когда по § 17 центр O_1 лежит между точками M_0, M_1 , и предполагая (фиг. 9), что точка M_0 ниже точки M_1 , находим

$$O_1 M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1 M_1 = CM_1 - CO_1,$$

вследствие чего по § 10 имеем

$$R_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = CM_1 - CO_1,$$

что дает

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}.$$

Сличая эти равенства с теми, которые были получены для случая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

замечаем, что здесь полусумма

$$\frac{R_0 + R_1}{2}$$

определяется так, как прежде определялась полуразность

$$\frac{R_0 - R_1}{2}$$

и обратно. Вследствие этого вышенайденные формулы в приложении к рассматриваемому нами случаю дают

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right),$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$

Это получается в предположении, что точка M_1 лежит выше точки M_0 . При обратном положении точек M_0, M_1 получается то же со знаком —; а потому мы будем иметь вообще

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \pm 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right),$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \pm 2 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

где должен быть оставлен верхний или нижний знак, смотря по тому, с каким знаком получается для полусуммы $\frac{R_0 + R_1}{2}$ положительная величина.

Выведенные нами формулы заключают в себе как частные случаи те, которые мы нашли в § 13 и 14, предполагая угол ABC равным двум прямым, и в § 15, предполагая бесконечно большим расстояние O_1C . Первые получаются из общих формул, имеющих место при

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

вторые из формул, найденных нами для случая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0.$$

При этом первые получаются в предположении

$$\omega = \pi,$$

вторые в предположении

$$\omega = 2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right).$$

В этих частных случаях, как видели, траектория точки M представляет кривые двух различных видов (фиг. 6, 8).

В общем случае получаются тоже траектории двух различных видов, смотря по знаку $\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$.

Если

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

траектория имеет вид кривой, о которой мы говорили в § 13 и 14.

Если же

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

траектория представляет кривую, подобную той, о которой было говорено в § 15, с тою только разницею, что здесь (фиг. 10) параллели заменяются дугами концентрических кругов, описанных из центра O_1 радиусами R_0, R_1 .

§ 19. В предыдущих параграфах мы рассмотрели частный случай, когда угол A_0OA меняется в самых широких пределах, переходя от $-\pi$ до $+\pi$. Теперь мы займемся случаем прямо противоположным, предполагая, что угол A_0OA остается в пределах, бесконечно близких к нулю. Для этого мы положим, что α , предельная величина угла A_0OA , имеет величину бесконечно малую.

При α бесконечно малом по уравнению (16) получается для разности

$$\varphi_0 - \varphi_1$$

величина бесконечно малая, а потому, пренебрегая бесконечно малыми величинами перед конечными, в рассматриваемом нами случае будем иметь

$$\varphi_1 = \varphi_0$$

и вследствие того

$$\varphi_2 = \varphi_0,$$

так как по § 5 угол φ_2 должен заключаться между углами φ_0, φ_1 .

Внеся эти величины φ_1, φ_2 в уравнения (15), получаем такие формулы для определения r, d, CO_1 :

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)},$$

$$CO_1 = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$

Замечая же, что при этих величинах φ_1, φ_2 выходит

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}} = \frac{\sin \varphi_0 \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}},$$

мы из уравнения (15) выводим такое соотношение между бесконечно малыми величинами α и $\varphi_0 - \varphi_1$:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\sin \varphi_0 \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2},$$

что дает

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}}{2 \sin \varphi_0 \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} \alpha^2 = \frac{\sin (\omega - \varphi_0) \sin (\omega - 2\varphi_0)}{4 \cotang \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} \alpha^2. \quad (42)$$

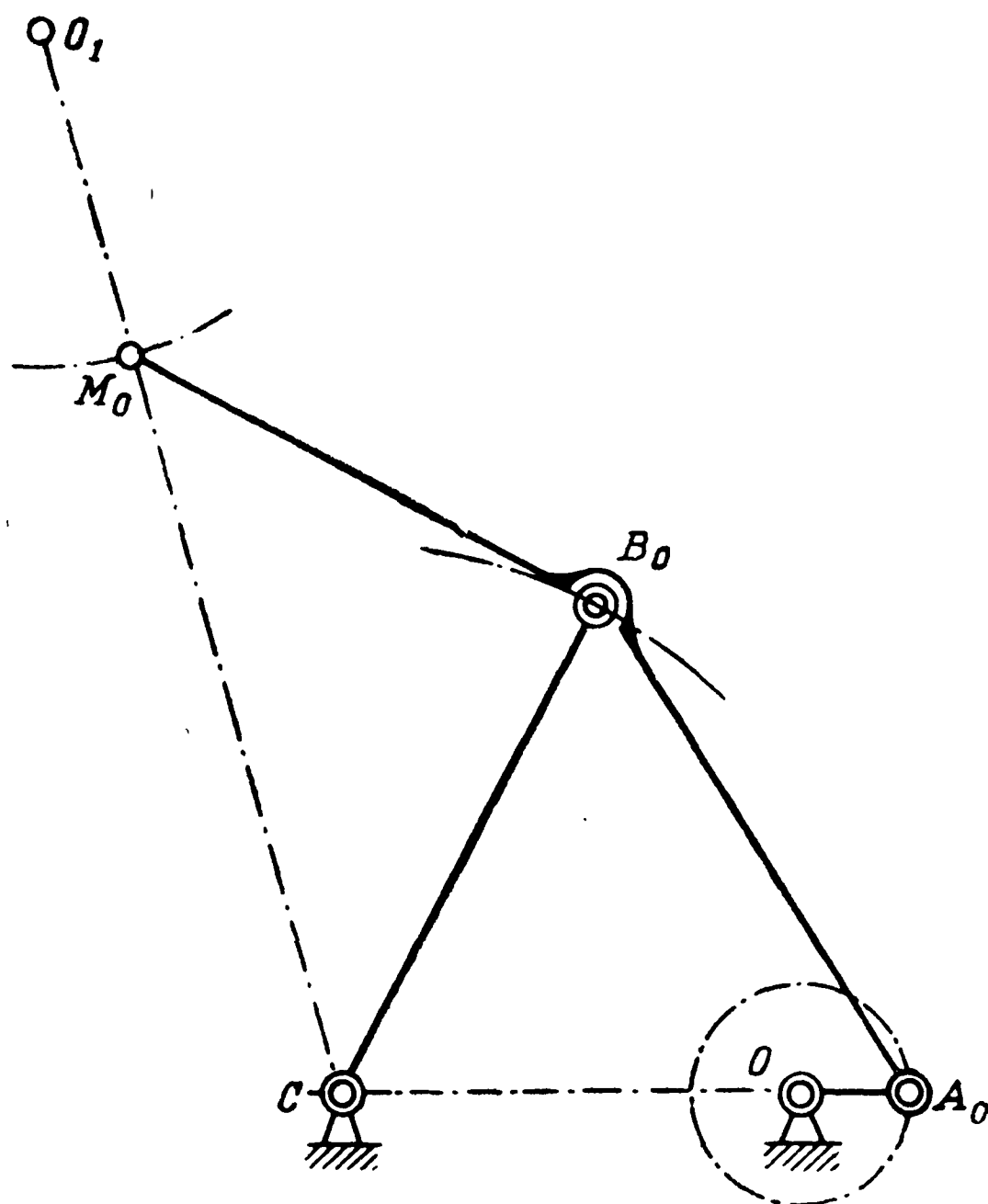
Переходя к определению радиуса R_0 по § 10 и предполагая (фиг. 11) центр O_1 выше точки M_0 , находим, что

$$R_0 = O_1 M_0 = CO_1 - CM_0.$$

Внеся сюда вышенайденную величину CO_1 и заменяя CM_0 по (37) через $2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}$, получаем

$$R_0 = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$



Фиг. 11.

Мы это вывели, предполагая центр O_1 выше точки M_0 . Делая противоположное предположение, мы находим ту же формулу с знаком $-$, а потому, чтобы обнять оба случая, мы возьмем ее с двойным знаком.

В формуле

$$R_0 = \pm 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}, \quad (43)$$

таким образом полученной, должен быть оставлен тот из двух знаков, с которым она дает положительную величину.

По радиусу R_0 , как видели (18), радиус R_1 определяется уравнением

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) \cdot CO_1 \sin \frac{\omega}{2}}{d}.$$

В рассматриваемом нами случае разности $\varphi_0 - \varphi_1$, $\varphi_2 - \varphi_1$ имеют величины бесконечно малые. Чтобы найти отношение их, полагаем

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \Delta, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta_1,$$

что дает

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \Delta, \quad \varphi_2 = \varphi_0 - \Delta + \Delta_1,$$

и вследствие того по (14) получается такое уравнение между бесконечно малыми величинами Δ , Δ_1 :

$$\cotang \frac{\varphi_0 - \Delta + \Delta_1}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\Delta}{4}} \left[\sqrt{\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0 - \Delta}{2}}} - \cos \frac{\Delta}{4} \right].$$

Разлагая по степеням Δ , Δ_1 и ограничиваясь бесконечно малыми первого порядка, мы из этого уравнения получаем

$$\Delta_1 = \frac{1}{4} \Delta,$$

что по нашему знакоположению дает

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{4} (\varphi_0 - \varphi_1).$$

Внося же эту величину разности $\varphi_2 - \varphi_1$ в выражение

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) CO_1}{d}$$

и замечая по вышепоказанным величинам φ_1 , φ_2 , r , d , CO_1 , что

$$\frac{(d^2 - r^2) CO_1}{d \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} = \frac{4}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

находим с точностью до третьей степени $\varphi_0 - \varphi_1$ включительно

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2) \cdot CO_1 \sin \frac{\omega}{2}}{d} = \frac{1}{32} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

вследствие чего с тою же степенью точности уравнение, определяющее R_1^2 , дает

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{1}{32} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}, \quad R_1 = R_0 - \frac{1}{64} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} \cdot R_0.$$

Из последнего равенства выходит

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{1}{128} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} \cdot R_0,$$

что представляет высший предел уклонения точки M от круга, описанного радиусом $\frac{R_0 + R_1}{2}$ из центра O_1 при движении рассматриваемой нами системы, когда угол α остается между $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$.

Внеся сюда величину $\varphi_0 - \varphi_1$ по (41) и величину радиуса R_0 по (43), находим такое выражение для этого предела:

$$\pm \frac{1}{16384} \frac{\sin \frac{\omega}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^3 (\omega - \varphi_0) \sin^3 (\omega - 2\varphi_0) \alpha^6}{\cos^4 \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \sin \frac{\omega - 2\varphi_0}{2} \sin^6 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)},$$

где α — предельная величина угла A_0OA , откуда видно, что с приближением угла α к нулю эти отклонения очень быстро уменьшаются и вследствие того при α малом траектория точки M незначительно разнится от дуги круга, описанного из центра O_1 радиусом $\frac{R_0 + R_1}{2}$.

Показанные здесь формулы представляют предел, к которому приближаются общие формулы при уменьшении угла α до нуля, и они могут служить для приближенного решения различных задач относительно рассматриваемой системы, когда угол α не велик.

ПРИЛОЖЕНИЯ



П. Л. ЧЕБЫШЕВ И ЕГО НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ

Н. И. Ахизер

1. Пафнутий Львович Чебышев принадлежит к числу величайших математиков XIX века. Трудami Чебышева, столь многочисленными и столь разнообразными по тематике, созданы новые направления в математическом анализе и проложены новые пути, позволившие решить труднейшие задачи большой давности, не поддававшиеся усилиям его предшественников. Щедро рассеянные в сочинениях Чебышева и зачастую гениальные идеи еще далеко не исчерпаны и до сих пор продолжают оказывать глубокое влияние на развитие математических наук.

Величайшей заслугой Чебышева является также создание знаменитой петербургской математической школы с ее своеобразным направлением и своими достаточно прогрессивными методологическими взглядами. Эти взгляды, неоднократно высказывавшиеся как самим Чебышевым, так и его знаменитыми учениками, касались разных сторон математического творчества и в первую очередь о связи теории с практикой. В своей речи „Черчение географических карт“, написанной для торжественного акта в С.-Петербургском университете 8 февраля 1856 г., Чебышев говорил: „Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных... Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике“.

В некрологическом очерке [1], вышедшем через год после смерти Чебышева, знаменитый ученик Чебышева Александр Михайлович Ляпунов писал: „П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководствуясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев. Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды“.

В высшей степени характерным для петербургской школы является также постоянное стремление к алгоритму для получения того или иного решения или установления, что решение отсутствует. Если такой алгоритм состоял в повторении некоторых операций, то считалось обязательным установить на основании данных задачи верхнюю грань для необходимого числа этих повторений.

Петербургская математическая школа насчитывает много блестящих имен. А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, К. А. Поссе, А. М. Ляпунов, Г. Ф. Вороной, В. А. Марков, Д. А. Граве, Н. Я. Сонин, П. Л. Пташицкий, В. А. Стеклов — вот далеко не полный список виднейших представителей петербургской школы, многие из которых были непосредственными учениками П. Л. Чебышева.

П. Л. Чебышев родился 14 (26) мая 1821 г. в имении отца Окатове Боровского уезда Калужской губернии. Первоначальное образование Пафнутий Львович получил дома. В 1837 г. он поступил в Московский университет, где в то время профессорами были Н. Д. Брашман, Н. Е. Зернов, Д. М. Перевошиков и А. С. Ершов. Особенное влияние на Чебышева оказал Н. Д. Брашман, к которому Чебышев навсегда сохранил глубокое уважение и с которым поддерживал также и научный контакт.

При переходе на второй курс Чебышев написал сочинение „Вычисление корней уравнений“, за которое позже был награжден серебряной медалью.

Московский университет П. Л. Чебышев окончил в 1841 г. „отличнейшим кандидатом“, а в 1845 г. в Москве вышло в свет его сочинение „Опыт элементарного анализа теории вероятностей“, которое в следующем году, 8 (20) июня 1846 г., Чебышев защитил в Московском университете в качестве магистерской диссертации.

В 1847 г. П. Л. Чебышев переехал в Петербург и начал чтение лекций в университете. Педагогическая деятельность Чебышева в Петербургском университете продолжалась до 1882 г., когда, прослужив 35 лет, он вышел в отставку. Вначале Чебышев читал высшую алгебру и теорию чисел, позже, в разное время, также аналитическую геометрию, теорию вероятностей, теорию эллиптических функций, интегральное исчисление и исчисление конечных разностей. Кроме того, несколько раз Чебышев читал в университете и в Александровском лицее курс практической механики, которая всегда привлекала его внимание и которая сыграла серьезную роль в математическом творчестве Чебышева.

„К чтению своих лекций, — писал К. 'А. Поссе [2], — Чебышев относился с педантической строгостью; ' лекций никогда почти не пропускал, никогда на них не опаздывал и ни одной лишней минуты после звонка не оставался в аудитории, хотя для этого приходилось прерывать лекции иногда на полуслове. Недоконченный на какой-либо лекции вывод всегда начинал на следующей лекции с самого начала, если только эта лекция не была немедленным продолжением предыдущей. Всякой сколько-нибудь сложной выкладке предпосылал разъяснение ее цели и хода в общих чертах, а затем производил вычисление на доске большей частью молча, предоставляя студентам следить за ним глазами, а не ухом. Выкладки делал довольно быстро и настолько подробно, что следить за ним было очень легко. Во время лекций Чебышев часто делал отступления от систематического изложения курса, сообщал свои взгляды и разговоры с другими математиками по затронутым на лекциях вопросам и выяснял сравнительное значение и взаимную связь между различными вопросами математики. Эти отступления очень оживляли изложение, давали отдых напряженному вниманию слушателей и возбуждали интерес к изучению предмета в более широких рамках“.

Деятельность Чебышева в Академии Наук началась почти одновременно с работой в университете, а именно в 1847 г. академик В. Я. Буняковский привлек Чебышева к составлению указателя к трудам Эйлера по теории чисел, издание которых было предпринято Академией. Можно думать, что эта работа направила Чебышева к исследованиям по теории чисел, где Чебышев в течение последовавших пяти лет получил результаты первостепенной важности.

Ниже мы будем подробно говорить об этих результатах, а здесь отметим, что теории чисел посвящена также докторская диссертация Чебышева „Теория сравнений“, которая вышла в 1849 г. и в том же году была защищена в Петербургском университете, а затем неоднократно переиздавалась и долгие годы была основным руководством по теории чисел. В 1853 г. Чебышев был избран адъюнктом Академии Наук, в 1856 г. экстраординарным и, наконец, в 1858 г. ординарным академиком.

С преподаванием и работой в Академии Наук П. Л. Чебышев сочетал большую деятельность в Ученом комитете народного просвещения и Техническом комитете Главного артиллерийского управления. В пятом томе вышедшего недавно полного собрания сочинений П. Л. Чебышева* опубликованы записки, характеризующие эту деятельность Чебышева. Там же можно найти ряд его писем и (правда, весьма скудные) биографические материалы о знаменитом ученом.

П. Л. Чебышев умер на 74-м году жизни. Еще накануне смерти он принимал посетителей. Утром 8 декабря (26 ноября) 1894 г., сидя за письменным столом со стаканом чая, Пафнутий Львович внезапно почувствовал себя дурно и скончался от паралича сердца.

2. Первую славу П. Л. Чебышеву доставили его два мемуара о простых числах. Первый из них, „Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины“, появился первоначально в качестве третьего приложения к уже упомянутой выше знаменитой „Теории сравнений“. Второй мемуар, „О простых числах“, был напечатан в 1852 г. в Журнале Лиувилля. Обе работы посвящены восходящему

* В дальнейшем цитируется: Полн. собр.

к глубокой древности и в высшей степени трудному вопросу о распределении простых чисел в натуральном ряде.

Хорошо известно принадлежащее Эвклиду весьма остроумное доказательство бесконечности числа простых чисел в натуральном ряде. Эйлер указал другое доказательство теоремы Эвклида, и этим исчерпывается все, что к XIX веку было строго доказано относительно простых чисел в натуральном ряде. Даже самый вопрос о распределении простых чисел не имел в то время точной формулировки. Такая формулировка появилась лишь в 1808 г., во втором издании „Теории чисел“ Лежандра, где знаменитый геометр предложил замечательную эмпирическую формулу для приближенного вычисления при больших x функции $\pi(x)$, равной числу простых чисел, не превосходящих x . Эта формула Лежандра имеет вид

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - B},$$

где B — константа, по Лежандру равная 1,08366. С указания на эту формулу, которая находится в видимом согласии с таблицей простых чисел от 10 000 до 1 000 000, и начинается свой первый мемуар П. Л. Чебышев. „Мы не можем не изъявить сомнения насчет строгости ее, — пишет П. Л. Чебышев, — и вследствие того не можем признать верными выводы, на ней основанные. К такому заключению приводит нас одна теорема относительно свойств функции*, определяющей число простых чисел, меньших данного числа“. Затем П. Л. Чебышев формулирует и доказывает эту теорему (теорема 1), которая состоит в том, что сумма

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left\{ \pi(x+1) - \pi(x) - \frac{1}{\ln x} \right\} \frac{\ln^n x}{x^{1+p}}$$

при любом целом n стремится к конечному пределу, когда положи-

* П. Л. Чебышев, вместо функции

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

рассматривает функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n < x} 1.$$

тельное число ρ стремится к нулю. В своем доказательстве Чебышев оперирует при вещественных $s > 1$ с введенной еще Эйлером дзета-функцией

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

которая через несколько лет после мемуара П. Л. Чебышева подвергнется глубокому изучению Б. Римана.

Из теоремы I Чебышев выводит теорему II: при сколь угодно малом $\alpha > 0$ и сколь угодно большом n функция $\pi(x)$ в пределах от $x=2$ до $x=\infty$ бесчисленное множество раз удовлетворяет как неравенству

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\ln x} - \frac{\alpha x}{\ln^n x},$$

так и неравенству

$$\pi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + \frac{\alpha x}{\ln^n x}.$$

Отсюда уже вытекает теорема III: выражение

$$B(x) = \ln x - \frac{x}{\pi(x)}$$

при $x \rightarrow \infty$ не может иметь предела, отличного от 1.

Так как из эмпирической формулы Лежандра следует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \ln x - \frac{x}{\pi(x)} \right\} = B,$$

то Чебышев и заключает, что формула Лежандра при $x \rightarrow \infty$ не может быть точной, и более подходящей константой является $B=1$.

Теоремы II и III представляют величайшее достижение. Однако из теоремы III еще не вытекает асимптотический закон распределения простых чисел, который гласит:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \pi(x) : \frac{x}{\ln x} \right\} = 1$$

и был доказан уже после смерти П. Л. Чебышева, в 1896 г., независимо друг от друга Адамаром и Валле-Пуссенем на базе теории аналитических функций.

Валле-Пуссен исследовал также вопрос о точности приближения. Эти исследования продолжены рядом авторов (Ландау, Литтльвуд и др.)* и связаны с глубокими фактами теории функций.

Вот одна из оценок Валле-Пуссена:

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x - B} = (1 - B) \frac{x}{\ln^2 x} + (2 - B^2) \frac{x}{\ln^3 x} + O\left(\frac{x}{\ln^4 x}\right),$$

где B — любая константа. Отсюда следует, что предел, о котором идет речь в теореме III Чебышева, существует и виден порядок погрешности формулы Лежандра до и после уточнения Чебышева.

Что касается теоремы II, то выражаемый ею факт колебания функции $\pi(x)$ около функции $\text{Li } x = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$ получил окончательную формулировку лишь в 1914 г. у Литтльвуда, который доказал, что разность

$$\pi(x) - \text{Li } x$$

бесчисленное множество раз меняет свой знак в промежутке от $x=2$ до $x=\infty$.

Поводом для второго мемуара Чебышева явился так называемый постулат Ж. Бертрана, который гласит: если $a > 3$, то между a и $2a - 2$ лежит по крайней мере одно простое число. Это предположение понадобилось Бертрану для доказательства одной теоремы теории групп. Не будучи в состоянии доказать это предположение, он принял его в качестве постулата. П. Л. Чебышев в своем втором мемуаре доказал этот постулат. Однако этим далеко не исчерпывается значение блестящего по остроумию мемуара „О простых числах“. Главное значение этого мемуара состоит в тех простых и вместе с тем сильных методах, которые в нем даны и использованы для оценок функции $\pi(x)$ и некоторых других функций.

* В конце настоящего очерка указано несколько сочинений [3—7], где читатель найдет подробное изложение результатов, найденных после Чебышева.

Из оценок Чебышева вытекает, что

$$M = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \leq 1,10555,$$

$$m = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \geq 0,92129.$$

Этим впервые было строго доказано, что $\pi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ растет в точности, как $\frac{x}{\ln x}$, — факт, который из первого мемуара П. Л. Чебышева не вытекал. После Чебышева были найдены более точные грани для величин M и m . Так, Сильвестр нашел, что

$$M \leq 1,04423, \quad m \geq 0,95695.$$

Однако попытки доказать этим путем асимптотический закон оказались бесплодными. До недавнего времени все доказательства асимптотического закона базировались на более или менее глубоком изучении поведения функции $\zeta(s)$.

Недавно одна попытка элементарного доказательства увенчалась успехом. Мы имеем здесь в виду работы А. Selberg [9] и Р. Erdős [10]. Обе они прореферированы в Math. Reviews (10, № 9, 1949, 595—596) А. Е. Ingham. В этом реферате указан наиболее простой способ доказательства, вытекающий из обеих упомянутых работ.

Основа всех этих доказательств является следующая элементарным путем выводимая асимптотическая формула Селберга

$$\theta(x) \ln x + \sum_{p \leq x} \ln p \cdot \theta\left(\frac{x}{p}\right) = 2x \ln x + O(x).$$

3. Переходим к исследованиям П. Л. Чебышева об интегрировании в конечном виде иррациональных дифференциалов. Хронологически первой работой этого цикла является диссертация *pro venia legendi* „Об интегрировании помощью логарифмов“, защищенная в Петербургском университете 30 (18) мая 1847 г. и самим П. Л. Чебышевым не опубликованная. Поглощенный своими исследованиями по теории чисел*, Чебы-

* Напомним, что „Теория сравнений“ вместе со всеми тремя приложениями была полностью закончена к осени 1848 г.

шев в то время не мог заняться обобщением своих результатов, необходимость которых он себе ясно представлял. Весьма вероятно также, что его смущали некоторые встретившиеся у него противоречия*.

Во всяком случае диссертация *pro venia legendi* не была напечатана при жизни автора, а также не вошла в первое издание сочинений и впервые увидела свет лишь в 1930 г.**

К вопросам интегрирования в конечном виде П. Л. Чебышев вернулся лишь через пять лет. Летом 1852 г. Чебышев совершил путешествие за границу с научной целью. В своем отчете*** об этом путешествии он писал, что вечера он частью посвящал беседам с математиками, „частью же на теоретические занятия, которые имели или непосредственное отношение с данными, полученными мною из рассматривания различных систем машин, или с вопросами анализа, на которые был наведен разговором с кем-либо из ученых. Таким образом, по желанию г. г. Лиувилля и Гермита (Эрмит.—*Ред.*), я занялся развитием тех начал, на которых написана была моя диссертация, представленная в С.-Петербургский университет в 1847 г. *pro venia legendi*. В этой диссертации я рассматривал тот случай, когда интегрируемый дифференциал содержит квадратный корень рациональной функции — случай самый простой

* Об этом свидетельствует следующее место из вступительного слова П. Л. Чебышева к защите диссертации: „Особенно важен для меня суд Ваш о последнем (девятом.—*Ред.*) моем положении. Зная трудность предмета, мною избранного, и сознавая свое бессилие, я везде поверял себя открытиями великих геометров и с особенным удовольствием видел согласие своих выводов с истинами, давно известными. Но, прилагая свои начала к абелевым функциям, я был остановлен несогласием своего вывода с известным предложением Якоби.

Этот вывод, предлагающий одно из двух: или несправедливость предложения Якоби, весьма невероятную, или ошибочность моих суждений, весьма возможную, я не хотел скрыть от Вас, м. [илостивые] г. [осудари], я желал представить на суд Ваш“.

** Изв. АН СССР, VII серия, Отд. физ.-мат. наук, стр. 785—849, 1930.

Вместе с Положениями и вступительным словом, которое было недавно обнаружено в Гос. историческом архиве Ленинградской области, диссертация *pro venia legendi* вошла в V том Полн. собр. (стр. 88—145).

Следует отметить, что Положения были включены и в первое издание сочинений Чебышева (т. II, стр. XX).

*** Полн. собр., т. V, стр. 246—255.

и наиболее встречающийся в приложениях. Но во многих отношениях интересно было показать распространение этих начал на случай корня какой ни есть степени. Так, например, в интегральном исчислении особенное внимание обращает на себя интегрирование дифференциалов, известных под названием двучленных, для чего предлагают различные частные приемы с объяснением, в каких случаях они достаточны для получения желаемого результата; за исключением этих немногих случаев, ничего нельзя было сказать утвердительно относительно интеграла двучленных дифференциалов; приемы ли наши недостаточны или эти интегралы невозможны в конечном виде? Решения этого вопроса, очевидно, нельзя было ожидать от частных приемов, как бы многочисленны ни были случаи, ими обнимаемые; для этого необходим общий прием, обнимающий разом все частные случаи, а подобный прием заключается в началах вышеупомянутых. Развитием этих-то начал я и занялся с целью показать, в каких случаях интегралы двучленных дифференциалов возможны в конечном виде и в каких случаях они представляют особенные трансцендентные. Изыскания мои по этому предмету привели к заключению, что обыкновенно предполагаемые частные приемы интегрирования двучленных дифференциалов (алгебраических) обнимают все случаи, когда это интегрирование возможно в конечном виде, и таким образом вопрос об интегрировании их в конечном виде может считаться вполне решенным. При этом я также дошел до одной теоремы, которая, как частный случай, содержит известную теорему Абеля, оставленную им без доказательства“.

Возвратившись 19(7) ноября в Петербург, П. Л. Чебышев вскоре подготовил мемуар „Об интегрировании иррациональных дифференциалов“, который в 1853 г. и был опубликован в Журнале Лиувилля (XVIII).

В дальнейшем появились еще три больших мемуара П. Л. Чебышева: „Об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени“ (Зап. Имп. Акад. Наук, VI, 1857), „Об интегрировании дифференциала

$\frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx$ “ (Изв. Физ.-мат. отд. Акад. Наук, 1861) и

„Об интегрировании дифференциалов, содержащих кубический корень“ (Приложение к VII тому Зап. Имп. Акад. Наук, 1865).

Мемуар 1853 г. отличается наибольшей общностью изучаемых в нем интегралов. В этом мемуаре Чебышев рассматривает интегралы вида

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}, \quad (1)$$

где $f(x)$, $F(x)$ и $\theta(x)$ — заданные многочлены, из которых последний не имеет корней кратности $\geq m$. К интегралам такого вида сводится любой интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\omega(x)}\right) dx,$$

где R означает рациональную функцию своих аргументов, а $\omega(x)$ — многочлен. Если интеграл (1) выражается в конечном виде через элементарные функции, то он состоит из алгебраического и логарифмических членов определенной структуры. Это известное из классических исследований Абеля и Лиувилля положение является отправным пунктом для всех исследований П. Л. Чебышева, конечной целью которых было построение алгоритма для нахождения интеграла (1), если этот интеграл может быть выражен в конечном виде. Мемуар 1853 г. лишь первый шаг на пути построения такого алгоритма. Однако уже в этом мемуаре получены первоклассные результаты.

Чебышев начинает с изложения простого приема, позволяющего перейти от интеграла (1) к аналогичному интегралу, но с другими многочленами $f(x)$, $F(x)$, который, в случае его представимости в конечном виде, состоит только из логарифмических членов. Иначе говоря, обобщая здесь исследования М. В. Остроградского, П. Л. Чебышев выделяет из заданного интеграла алгебраическую часть.

Затем он дает решение вопроса о виде и числе логарифмических членов. Если α есть первообразный корень степени m из 1, то каждый логарифмический член можно привести к виду

$$A \ln \{\varphi(\Delta) \varphi^\alpha(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\}, \quad (2)$$

где $\Delta = \sqrt[m]{\theta}$, а $\varphi(\Delta)$ есть целая рациональная функция от x и Δ , т. е. функция вида

$$X_0 + X_1\Delta + \dots + X_{m-1}\Delta^{m-1}.$$

В частности, Чебышев доказывает следующее замечательное предложение: если интеграл

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$$

выражается через логарифмы, то его всегда можно представить в виде (2).

Из этого предложения при $m=2$ и вытекает упоминавшаяся в отчете Чебышева теорема, высказанная Абелем* без доказательства.

Дальнейшим замечательным результатом мемуара 1853 г. является доказательство того, что интеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (a \neq 0, b \neq 0),$$

где m, n, p — рациональные числа, выражается в элементарных функциях только в одном из известных случаев:

- 1) p — целое число,
- 2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число,
- 3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число.

Из общих результатов мемуара важнейшим для дальнейших исследований является указание, как получить уравнения, определяющие отдельно каждый из логарифмических членов (алгебраическая часть предполагается уже выделенной). После этого на очередь встанет вопрос, как найти каждый логарифмический член с помощью упомянутых определяющих уравнений. Этого вопроса в мемуаре 1853 г. Чебышев не касается.

* Абель ([11], стр. 65) пишет: „Если интеграл

$$\int \frac{p dx}{\sqrt{R}}$$

где p и R — многочлены от x (R не имеет кратных корней.— *Ред.*), выражается через логарифмы, то его всегда можно представить в виде

$$\int \frac{p dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q \sqrt{R}}{p - q \sqrt{R}},$$

где A — постоянная, p и q — многочлены. Я дам доказательство этой теоремы в другом случае*.

Однако Абель в дальнейшем доказательства этой теоремы не дал.

В этих исследованиях о получении определяющих уравнений и о их решении П. Л. Чебышев является далеко идущим продолжателем Абеля, который впервые рассмотрел упомянутые вопросы применительно к интегралу

$$\int \frac{\rho(x)}{\sqrt{R(x)}} dx, \quad (3)$$

где $R(x)$ — многочлен степени $2n$ без кратных корней, а $\rho(x)$ — многочлен степени $n-1$.

Абель показал, что если этот интеграл выражается в виде

$$A \log \frac{p(x) + q(x) \sqrt{R(x)}}{p(x) - q(x) \sqrt{R(x)}}, \quad (4)$$

где A — константа, а $p(x)$, $q(x)$ — многочлены, то

$$p^2(x) - q^2(x) R(x) = \text{const}, \quad (5)$$

и обратно, если многочлены $p(x)$, $q(x)$ связаны соотношением (5), то найдется многочлен $\rho(x)$, при котором интеграл (3) равен (4).

Под определяющим уравнением в случае Абеля Чебышев и понимает уравнение (5).

В случае Абеля вопросом о нахождении логарифмического члена (единственного) и является вопрос о решении уравнения Абеля (5). Из этого уравнения следует

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \sqrt{R(x)} = \frac{\text{const}}{q(x) \{p(x) + q(x) \sqrt{R(x)}\}},$$

откуда видно, что разрешимость уравнения Абеля в многочленах $p(x)$, $q(x)$ должна быть связана с разложением $\sqrt{R(x)}$ в непрерывную дробь. И сам Абель доказал, что требуемое решение существует в том и только том случае, когда эта непрерывная дробь неперiodическая.

Но как перенести этот результат Абеля на другие типы иррациональностей?

Этим вопросом П. Л. Чебышев и занимается в мемуарах 1857 и 1865 гг.

Первый из этих мемуаров непосредственно примыкает к исследованиям Абеля. Здесь рассматривается интеграл (3) не с целой, а уже с дробной функцией $\rho(x)$, но степень многочлена $R(x)$ не более 4. Если этот интеграл выражается в одних логарифмических членах, то его можно с помощью алгебраических операций представить в виде суммы аналогичных интегралов, каждый из которых выражается одним логарифмическим членом вида (4). Чебышев составляет уравнение для определения многочленов $\rho(x)$, $q(x)$ и показывает, что и в этом случае применим метод непрерывных дробей.

В идейном отношении бóльший интерес представляет мемуар 1865 г., посвященный интегрированию дифференциала с кубической иррациональностью, т. е. случаю, который после рассмотренного Абелем является простейшим. Здесь приходится искать три многочлена, „между тем как,—пишет Чебышев,—непрерывными дробями решаются только вопросы с двумя неизвестными функциями“. Принимая, что интеграл

$$\int \frac{\rho(x)}{\sqrt[3]{R(x)}} dx,$$

где $\rho(x)$, $R(x)$ — многочлены, из которых второй не имеет корней кратности ≥ 3 , выражается в логарифмах, Чебышев на основании своих общих теорем устанавливает, что этот интеграл должен равняться

$$K \log \{ \varphi(\Delta) \varphi^\alpha(\alpha\Delta) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \},$$

где $\Delta = \sqrt[3]{R}$, K — константа, а

$$\varphi(\Delta) = X + Y\Delta + Z\Delta^2,$$

где X , Y , Z — многочлены от x . Определяющее уравнение, которое теперь заменяет уравнение Абеля (5), имеет вид

$$\varphi(\Delta) \varphi(\alpha\Delta) \varphi(\alpha^2\Delta) = \text{const.}$$

Чебышев исследует это уравнение и показывает, как построить последовательность функций (она заменяет здесь последовательность подходящих дробей в случае Абеля), содержащую искомое решение $\varphi(\Delta)$, если оно существует.

В небольшой заметке 1867 г. П. Л. Чебышев иллюстрирует общий метод на простейших примерах.

В теоретическом отношении результаты рассмотренных работ П. Л. Чебышева, как и предшествовавших им работ Абеля и Лиувилля, безупречны. Однако если речь идет о практическом применении, о проверке того, берется ли в конечном виде тот или иной интеграл рассматриваемого вида, то, за исключением наиболее простых случаев, эти исследования оказываются непригодными. Действительно, если остановиться для простоты на случае Абеля, то придется выяснить, имеет или не имеет период непрерывная дробь, в которую разлагается $\sqrt{R(x)}$. Однако, сколько бы звеньев этой непрерывной дроби мы ни вычислили, мы никогда не сможем сказать, что периодичность не обнаружится далее. Ясное дело, что это обстоятельство не могло не обратить на себя внимания Чебышева; ему как раз посвящен мемуар 1861 г. Применительно к простейшему случаю эллиптического дифференциала Чебышев прямо ставит вопрос о способе, „который позволял бы по коэффициентам $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и при помощи конечного числа алгебраических действий узнавать, возможно или нет выбрать A так, чтобы интеграл

$$\int \frac{(x + A) dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

выражался в конечном виде“. Здесь мы имеем совершенно новую задачу анализа, которая не имела аналогов в прошлом и решение которой не может не зависеть от арифметической природы коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Чебышев рассмотрел случай, когда эти коэффициенты — рациональные числа. Прежде всего он сводит с помощью надлежащей подстановки заданный интеграл к такому, в котором $\delta = 0$, а $\alpha = 1$, $\beta = m$, $\gamma = n$ — числа целые. Затем он излагает, и притом без доказательства, метод, с помощью которого получается значение интеграла, если он берется в конечном виде, а в противном случае обнаруживается, что интеграл в конечном виде не берется. Метод Чебышева состоит в применении двух преобразований, причем Чебышев дает верхние грани для числа повторений каждого из этих преобразований. Так, число повторений второго преобразования не превосходит числа целых решений

системы уравнений

$$\begin{aligned} Y^2 - 3XZ &= m^2 - 3ln, \\ Z^2(4X^3Z - X^2Y^2 - 18XYZ + 4Y^3 + 27Z^2) &= \\ &= n^2(4l^3n - l^2m^2 - 18lmn + 4m^3 + 27n^2), \end{aligned}$$

а конечность этого числа доказывается без труда. Почему Чебышев не опубликовал доказательства своего метода, остается непонятным.

В 1872 г. Е. И. Золотарев ([12], стр. 85—108) полностью доказал правильность метода Чебышева.

Если $R(x)$ есть многочлен четвертой степени (без кратных корней), то критерий разрешимости в многочленах уравнения Абеля

$$p^2(x) - q^2(x)R(x) = \text{const}$$

можно представить не только в алгебраической форме (периодичность непрерывной дроби), но и в некоторой весьма замечательной трансцендентной форме. Полагая для простоты, что

$$R(x) = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta),$$

где $\beta > \alpha > 1$, и вводя модуль

$$k^2 = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha-1}{\beta-1},$$

а также параметр a по формуле

$$\text{sn}^2(a, k) = \frac{\beta-1}{\beta},$$

можно очень просто показать (и это делает Е. И. Золотарев), что уравнение Абеля разрешимо в многочленах тогда и только тогда, если

$$a = \frac{\nu K}{\lambda},$$

где ν и λ — целые положительные числа, а K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k . При доказательстве метода Чебышева Золотарев пользуется обоими критериями — алгебраическим и трансцендентным. Каким путем шел Чебышев, нам не известно, так как он никак не отзывался на статью Золотарева, посвященную дока-

зательству его метода*. Но на связь между задачей интегрирования эллиптического дифференциала в логарифмах и задачей деления эллиптических функций указал еще в 1857 г. Вейерштрасс. Частным случаем этой связи и является указанный трансцендентный критерий. Можно думать, что эта связь была известна Чебышеву. Однако в своем мемуаре Чебышев говорит: „Нельзя также получить ничего полезного для этого вопроса и из рассмотрения известных определенных интегралов, позволяющих определить аналитически все случаи дифференциалов

$$\frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx,$$

интегрирующихся в конечном виде; ибо для того, чтобы способом этим узнать, что данный дифференциал не допускает такого интегрирования ни при каких значениях A , необходимо иметь точные величины названных интегралов, между тем как интегралы эти могут быть вычисляемы по коэффициентам $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ только с бóльшим или меньшим приближением“.

Эти слова Чебышева позволяют думать, что он не пользовался трансцендентным критерием, а как-то получил свой метод с помощью чисто алгебраических рассматриваний.

Золотарев не только строго обосновал метод Чебышева, но и дал дальнейшее развитие теории. В четвертой главе своей замечательной докторской диссертации „Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению“ [12] Золотарев обобщает метод Чебышева на случай, когда коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ многочлена $R(x)$ — любые вещественные числа. В письме № 27 Золотарев пишет Коркину: „Чтобы доказать конечность действий в этом случае, мне пришлось

* В переписке Е. И. Золотарева и А. Н. Коркина [13] имеются два места, относящиеся к методу Чебышева и статье Золотарева. В письме № 31 Золотарев пишет: „В том же n° Журнала Лиувилля перепечатана из *Mathem. Annalen* моя статья „*Sur la méthode d'intégration de M. Tchebycheff*“. Я не знаю, чем объяснить это?“ В письме № 32, отвечая Золотареву, Коркин пишет: „Я объясняю перепечатание Вашей статьи из *Mathem. Annalen* тем, что в Журнале Лиувилля была помещена и статья Чебышева о его методе. Им для читателей журнала необходимо поместить и ее доказательство, от публикации которого Чебышев, повидимому, отказался (мы знаем, со своей стороны, что он, наверное, его не публикует)“.

составить новую теорию комплексных чисел, зависящих от корней уравнения (3), которое можно считать неприводимым. Этой теории я приписываю гораздо большее значение, чем обобщению методы Чебышева" [13].

Теория целых комплексных чисел Золотарева — это теория идеалов, которая одновременно и независимо от Золотарева была создана Дедекиндом. Таким образом, к созданию теории большого математического значения привела конкретная математическая задача.

Распространение методы Чебышева на случай многочлена $R(x)$ с комплексными коэффициентами представляет новые трудности; они отмечены в комментарии Н. Г. Чеботарева к диссертации Золотарева. Имеется ряд книг и статей, посвященных изложению вопросов об интегрировании в конечном виде. Некоторые из них перечислены в конце настоящего очерка [14—18].

4. Магистерская диссертация П. Л. Чебышева, посвященная теории вероятностей, как упомянуто выше, была напечатана в Москве в 1845 г. Вскоре в Журнале Крелля появилась небольшая статья, в которой Чебышев дал элементарное доказательство теоремы Пуассона, а затем проходит более двадцати лет до появления статьи „О средних величинах“, в которой Чебышев дает элементарное доказательство следующей весьма общей формы закона больших чисел, получившей название теоремы Чебышева: если $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ попарно независимые случайные величины и М. о. $x_i = a_i$, М. о. $x_i^2 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots$) и если существует такое $L > 0$, что $c_i = b_i - a_i^2 \leq L$ ($i = 1, 2, \dots$), то при любом $\varepsilon > 0$

$$\text{Вер.} \left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{L}{n\varepsilon^2},$$

а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Вер.} \left\{ \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Частным случаем этой теоремы, как известно, является теорема Пуассона, которая в свою очередь содержит теорему Я. Бернулли и в то время была наиболее общей формой закона больших чисел.

Основой доказательства является знаменитое неравенство, установленное в этой статье Чебышевым и носящее название неравенства Че-

бышева*, которое гласит: если x — случайная величина и М. о. $x = a$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\text{Вер. } \{ |x - a| < \varepsilon \} \geq 1 - \frac{\text{М. о. } (x - a)^2}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева получается немедленно, если ввести функцию распределения $\sigma(x)$ величины x . Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Вер. } \{ |x - a| < \varepsilon \} &= 1 - \text{Вер. } \{ |x - a| \geq \varepsilon \} = 1 - \int_{|x - a| \geq \varepsilon} d\sigma(x) \geq \\ &\geq 1 - \int_{|x - a| \geq \varepsilon} \frac{(x - a)^2}{\varepsilon^2} d\sigma(x) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 d\sigma(x) = 1 - \frac{\text{М. о. } (x - a)^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

После работы „О средних величинах“ прошло еще двадцать лет до появления последней и наиболее замечательной работы Чебышева по теории вероятностей. Эта работа имеет название „О двух теоремах относительно вероятностей“ и посвящена доказательству важной предельной теоремы. Второй теоремой, которую Чебышев лишь формулирует в самом начале статьи, является уже рассмотренная нами общая форма закона больших чисел, данная в статье „О средних величинах“. Предельная теорема имеет целью приближенное вычисление при большом n величины

$$\text{Вер. } \left\{ \left| \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{\sqrt{2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)}} \right| < \varepsilon \right\},$$

для которой закон больших чисел в форме Чебышева давал лишь некоторую оценку снизу.

Во времена Чебышева единственным известным случаем предельной теоремы была теорема Моавра — Лапласа, в которой речь шла о числе m

* А. А. Марков ([19], стр. 92) называет это неравенство неравенством Бьенэме — Чебышева, так как основная идея его доказательства была указана Бьенэме. Сам Чебышев в статье „О предельных величинах интегралов“ (1874), говоря о заслуживающем особенного внимания методе Бьенэме, отмечает, что „строгое доказательство закона Бернулли, находящееся в моей заметке „О средних величинах“, представляет один из результатов, легко получаемых из метода Бьенэме, при помощи которого он сам пришел к доказательству одного предложения о вероятностях, из которого закон Бернулли вытекает непосредственно“.

появлений события при n независимых испытаниях, если при каждом испытании p есть вероятность появления события, иначе говоря, случайная величина x_i принимает всего два значения: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Теорема Моавра — Лапласа устанавливала, что при любых $\alpha < \beta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Вер.} \left\{ \alpha < \frac{m - np}{\sqrt{2npq}} < \beta \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt.$$

Эту теорему Чебышев и хотел обобщить так же, как он перед тем обобщил теорему Бернулли.

Нет никакого сомнения в том, что идею обобщения предельной теоремы Моавра — Лапласа Чебышев вынашивал долгие годы. Можно думать, что лет за 15 до мемуара „О двух теоремах относительно вероятностей“ Чебышев хотя и смутно, но представлял себе, что к этому обобщению может привести метод, который в статье „О предельных величинах интегралов“ он приписывает Бьенэме и который в дальнейшем получил название метода моментов.

„Этот метод,— пишет Чебышев,— состоит в определении предельной величины интеграла

$$\int_0^a f(x) dx$$

по величинам интегралов

$$\int_0^A f(x) dx, \int_0^A x f(x) dx, \int_0^A x^2 f(x) dx, \dots$$

где $A > a$, а $f(x)$ — неизвестная функция, подчиненная одному только условию сохранять знак $+$ между пределами интегрирования“.

Под моментами распределения $\sigma(x)$ понимают интегралы Стильтеса

$$s_k = \int_{\alpha}^{\beta} x^k d\sigma(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n; n \leq \infty),$$

которые в частных случаях могут иметь вид обычных интегралов или сумм. Определение по этим моментам неубывающей функции $\sigma(x)$ и в

первую очередь нахождение условий ее существования и есть проблема моментов в современном понимании, а под методом моментов в теории вероятностей понимают нахождение функции распределения случайной величины через моменты.

Небольшая заметка „О предельных величинах интегралов“ должна рассматриваться как первая хронологически работа по проблеме моментов. Здесь Чебышев лишь ставит задачу и дает без доказательства решение, если известны $n+1$ моментов $s_0, s_1, \dots, s_n$ функции $f(x) \geq 0$ и если a является корнем некоторого алгебраического уравнения степени $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. О значении этой задачи для теории вероятностей сказано лишь в первых строках статьи.

Первое доказательство неравенств Чебышева дал А. А. Марков [20] в 1883 г. Ему же принадлежат дальнейшие важные обобщения, которые составили третью главу его докторской диссертации [21]. Хорошее изложение исследований Чебышева и Маркова читатель найдет в диссертации К. Поссе [22].

Проблема моментов продолжает развиваться в различных направлениях и в наше время. Она связана с некоторыми важными разделами теории аналитических функций, а также функционального анализа и теории операторов. Совсем недавно М. Г. Крейн обнаружил, что неравенства Чебышева — Маркова имеют применение в построениях, связанных с обратной задачей Штурма — Лиувилля. Из обширной литературы по проблеме моментов в первую очередь следует отметить вышедший в 1894—1895 гг. мемуар Т. Стилтеса [23].

Вскоре после появления статьи А. А. Маркова П. Л. Чебышев возвратился к тематике проблемы моментов и, подготовив необходимый аналитический аппарат, дал в 1887 г. доказательство своей предельной теоремы. Мемуар 1887 г. „О двух теоремах относительно вероятностей“ имеет дефекты как в формулировке теоремы, так и в ее доказательстве. Несмотря на это, он является одним из самых замечательных творений знаменитого математика. Вскоре после выхода этого мемуара А. А. Марков ([27]; [20], стр. 231—243; [19]) устранил все дефекты и сделал доказательство безупречным. Затем А. М. Ляпунов [28, 29], заменив метод моментов близким по идее, но более сильным методом

характеристических функций, дал более общую предельную теорему, которую А. А. Маркову позже все-таки удалось доказать методом моментов. В дальнейшем обобщение условий справедливости предельной теоремы Чебышева было предметом глубоких исследований ряда выдающихся математиков нашего времени и в первую очередь С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина. Из большого числа книг, в которых читатель найдет эти исследования, важнейшие указаны в списке литературы [30—33].

Перейдем теперь к анализу* построений П. Л. Чебышева.

Упомянутой выше подготовке аппарата посвящена статья „Об интегральных вычетах, доставляющих приближенные величины интегралов“ (1886). В этой статье Чебышев опубликовал новые формулы для предельных величин интеграла, которые вытекают из формул А. М. Маркова и в силу которых справедливо следующее: пусть функция $f(x) \geq 0$ ($-\infty < x < \infty$) имеет конечные моменты

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (k=0, 1, 2, \dots, 2m-1);$$

пусть, далее, $\sigma(x)$ ($-\infty < x < \infty$) — произвольная неубывающая функция, для которой $\sigma(-\infty) = 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\sigma(x) = s_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, 2m-1);$$

в таком случае при любом v ($-\infty < v < \infty$) имеет место неравенство

$$\left| \sigma(v) - \int_{-\infty}^v f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\phi_0^2(v) + \phi_1^2(v) + \dots + \phi_{m-1}^2(v)}, \quad (1)$$

где $\phi_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) — первые m ортогональных и нормированных многочленов относительно веса $f(x)$. Затем Чебышев берет

* Мы в большой мере использовали здесь комментарий А. Н. Колмогорова к мемуару Чебышева в III томе Полного собрания сочинений.

единственно важный для его будущего мемуара „О двух теоремах относительно вероятностей“ случай

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} q^2 x^2} \quad (q > 0) \quad (2)$$

и с помощью остроумной выкладки доказывает, что

$$\psi_0^2(v) + \psi_1^2(v) + \dots + \psi_{m-1}^2(v) > \frac{2(m-3)^2 \sqrt{m-1}}{3 \sqrt{3} (m^2 - 2m + 3)^{3/2}} \frac{1}{(q^2 v^2 + 1)^3}. \quad (3)$$

Отсюда вытекает, что величина (1) при любом v стремится к нулю, когда $m \rightarrow \infty$. Иначе говоря, функция (2) вполне определяется всеми своими моментами. В справедливости этого факта убедиться легко и не прибегая к тому мощному аппарату, которым пользовался Чебышев, а доказав непосредственно расходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2(v)$. Однако Чебышев всегда предпочитал конечные неравенства. Впрочем, для дальнейшего применения одной расходимости указанного ряда было бы недостаточно.

В 1892 г. Н. Я. Сонин [34] показал с помощью весьма нетривиальных и кропотливых вычислений, что неравенство Чебышева (3) можно заменить следующим:

$$\psi_0^2(v) + \psi_1^2(v) + \dots + \psi_{m-1}^2(v) > \sqrt{\frac{2m-1}{\pi}},$$

правая часть которого от v не зависит. Впрочем, для целей Чебышева это улучшение не является необходимым. Однако другое, замеченное впервые А. А. Марковым и им же осуществленное обобщение результата Чебышева, для доказательства Чебышева было необходимо, но знаменитый математик его пропустил, допустив тем самым некоторый скачок мысли. Дело в том, что по сути Чебышев пользуется следующим фактом: дана последовательность функций $f_n(x) \geq 0$ ($-\infty < x < \infty$), имеющих конечные моменты всех порядков

$$s_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_n(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots).$$

Известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_k^{(n)} = \frac{q}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{1}{2} q^2 x^2} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

в таком случае при любом v ($-\infty < v < \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^v f_n(x) dx = \frac{q}{V 2\pi} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{1}{2} q^2 x^2} dx. \quad (4)$$

Скачок от этого предложения к доказанному предложению о том, что функция (2) вполне определяется всеми своими моментами, сильно смягчается наличием неравенств (3) для любого конечного m . Поэтому, устанавливая (4), А. А. Марков ([20], стр. 237) имел полное основание сказать, что предложение (4) „отличается от теоремы П. Л. Чебышева только второстепенными деталями“.

Чебышев рассматривает бесконечную последовательность попарно независимых случайных величин $u_1, u_2, u_3, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям*:

а) математическое ожидание $a_k^{(1)}$ величины u_k равно нулю при всех k ($k = 1, 2, 3, \dots$),

б) математическое ожидание $a_k^{(m)}$ величины u_k^m при каждом натуральном $m \geq 2$ не превосходит для всех k ($k = 1, 2, 3, \dots$) некоторой постоянной, которая может зависеть от m .

Кроме того, Чебышев фактически пользуется, хотя и не формулирует его (и в этом состоит дефект формулировки), условием:

в) величина

$$\frac{1}{q_n^2} = \frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(2)}}{n}$$

при $n \rightarrow \infty$ стремится к конечному положительному пределу $\frac{1}{q^2}$.

Затем нужно отметить, что Чебышев забывает напомнить о попарной независимости величин, а также, что он предполагает функции распределения дифференцируемыми, но это последнее обстоятельство, конечно, нельзя считать дефектом.

* Условие б) сформулировано у Чебышева не четко.

Полагая

$$x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$$

и

$$A_n^{(k)} = M. o. (x_n^k),$$

Чебышев с помощью рассуждений нестрогих, но легко заменяемых строгими, находит, что для выражения величин $A_n^{(k)}$ через $a_m^{(k)}$ служат следующие формальные разложения:

$$1 + \frac{A_n^{(2)}}{2!} s^2 + \frac{A_n^{(3)}}{3!} s^3 + \dots = \exp \left\{ M_n^{(2)} s^2 + \frac{M_n^{(3)}}{\sqrt{n}} s^3 + \frac{M_n^{(4)}}{n} s^4 + \dots \right\},$$

где

$$M_n^{(k)} = \frac{v_1^{(k)} + v_2^{(k)} + \dots + v_n^{(k)}}{n}$$

и

$$1 + \frac{a_m^{(2)}}{2! (\sqrt{n})^2} s^2 + \frac{a_m^{(3)}}{3! (\sqrt{n})^3} s^3 + \dots = \exp \left\{ \frac{v_m^{(2)}}{(\sqrt{n})^2} s^2 + \frac{v_m^{(3)}}{(\sqrt{n})^3} s^3 + \dots \right\}.$$

В силу этих формул

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(k)} = \frac{d^k}{ds^k} \left(e^{\frac{s^2}{2q^2}} \right) \Big|_{s=0} = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{1}{2} q^2 x^2} dx \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда и из предложения (4) уже следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Вер. } \{\alpha < x_n < \beta\} = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2} q^2 x^2} dx,$$

т. е. предельная теорема Чебышева.

5. В научном наследии П. Л. Чебышева центральное место, бесспорно, занимают работы, относящиеся к наилучшему приближению функций и интерполированию, способу наименьших квадратов и ортогональным многочленам, проблеме моментов и квадратурным формулам, т. е. всему тому, что в наши дни, по почину С. Н. Бернштейна [35],

принято называть конструктивной теорией функций. В этих работах Чебышев не имел предшественников и здесь ему принадлежит все — и оригинальные, поражающие новизной постановки задач и блестящие методы подхода и решения. Эти работы находятся также в особом согласии со взглядами Чебышева на взаимную связь научной теории с практикой, „которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного“. Хронологически первой работой этого цикла является незаконченный мемуар „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“, представленный Академии Наук в январе 1853 г. Этот мемуар оканчивается словами: „В следующих параграфах мы покажем приложение выведенных нами формул к нахождению элементов параллелограмов, удовлетворяющих условиям, при выполнении которых точность хода этих механизмов наибольшая“. Продолжение мемуара, однако, не было опубликовано, и рукописные материалы, по которым можно было бы судить о его содержании, также не были обнаружены. Вместо этого, в дальнейшем появился ряд работ*, посвященных различным механизмам, где Чебышев весьма искусно применяет общие методы и идеи своего первого мемуара.

Вступительные параграфы этого мемуара посвящены разбору недостатков механизма Уатта и постановке математической проблемы, решение которой должно дать средство улучшить эти механизмы. Эта математическая проблема связана с заменой старых принципов для определения приближенного выражения функции в виде многочлена некоторым новым принципом. У Чебышева речь идет об аналитической функции $f(x)$ в некотором интервале $[a - R, a + R]$. В непосредственной близости точки $x = a$ такая функция может быть представлена отрезком ряда Тейлора. Но если взять хоть и малый, но фиксированный интервал $[a - h, a + h]$, то отрезку ряда Тейлора следует предпочесть другой полином, а именно тот, который „определяется условием, чтобы предел его уклонения от $f(x)$ в данном промежутке был менее пре-

* Обстоятельные комментарии к этим работам, принадлежащие И. И. Артоблевскому и Н. И. Левитскому, можно найти в IV томе Полного собрания сочинений. Кроме того, можно рекомендовать сборник „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II (М.—Л., 1945), содержащий статьи И. И. Артоблевского и Н. И. Левитского, З. Ш. Блоха, В. В. Добровольского.

дела уклонения всех других полиномов той же степени“. При этом под пределом уклонения функции $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ в интервале I Чебышев понимает величину

$$\sup_I |f(x) - \varphi(x)|.$$

Предложенный здесь новый принцип для построения приближенных выражений, важный как средство для улучшения конструкций некоторых механизмов и, конечно, полезный для различных других прикладных вопросов, в дальнейшем оказался не менее важным и для теории функций, но об этом мы будем говорить ниже.

Чебышев формулирует свою задачу следующим образом: „Определить изменения, которые надо произвести в приближенном выражении функции $f(x)$, данном ее разложением по степеням $x - a$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x = a - h$ и $x = a + h$, где h — величина не очень значительная“.

Пусть указанное разложение $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = k_0 + k_1(x - a) + \dots + k_n(x - a)^n + k_{n+1}(x - a)^{n+1} + \dots$$

Полагая $x - a = hz$, Чебышев приходит к функции

$$F(z) = k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n + k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

которую требуется заменить многочленом степени n в интервале $[-1, 1]$. Этот многочлен Чебышев ищет в виде

$$(k_0 + p_0) + (k_1 h + p_1) z + \dots + (k_n h^n + p_n) z^n,$$

где $p_0, p_1, \dots, p_n$ и являются подлежащими определению поправками. Если положить

$$P(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n,$$

то теперь задача сводится к определению этого многочлена из условия, чтобы была минимальной величина

$$\max_{-1 \leq z \leq 1} |k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} + k_{n+2} h^{n+2} z^{n+2} + \dots - P(z)|.$$

В таком виде задача представляет непреодолимые трудности. Чебышев ее и не разрешает, а ставит задачу о нахождении многочлена $P(z)$ с точностью до заданной степени величины h . Теперь задача сводится к следующему: ряд

$$k_{n+1}h^{n+1}z^{n+1} + k_{n+2}h^{n+2}z^{n+2} + \dots$$

обрывается на члене $k_N h^N z^N$ и значит ищется многочлен $P(z)$ степени n из условия, что

$$\max_{-1 \leq z \leq 1} |k_N h^N z^N + \dots + k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} - P(z)| \quad (1)$$

имеет наименьшее значение. Чебышев решает эту задачу при $N = n + 1$ и получает в этом случае

$$P(z) = k_{n+1} h^{n+1} \{z^{n+1} - T_{n+1}(z)\},$$

где многочлен

$$T_m(z) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos m \arccos z \quad (m = 1, 2, \dots)$$

или

$$T_m(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^m + (z - \sqrt{z^2 - 1})^m}{2^m}$$

носит название чебышевского многочлена, наименее уклоняющегося от нуля.

Равным образом легко решается задача, если $N = n + 2$, $k_{n+1} = 0$. Чебышев указывает также принципиальный путь для решения задачи при любом N , если $k_{n+1} = 0$, $k_{n+2} = 0$, ..., $k_{N-1} = 0$, $k_N \neq 0$, но главное содержание статьи посвящено приближенному определению коэффициентов многочлена $P(z)$, минимизирующего величину (1). Для этой цели Чебышев предложил некоторый итерационный процесс. Разбор и несколько модернизированное изложение этого процесса читатель найдет в статье В. Л. Гончарова [36].

Дальнейшему значительному развитию идей рассматриваемого мемуара посвящен большой мемуар „Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций“, напечатанный в 1859 г. в Записках Академии Наук. Здесь дано в терминах так называемых точек уклонения общее необходимое условие для того, чтобы рассматриваемая функция наименее уклонялась от нуля, и рассмо-

трены важные частные случаи, когда этой функцией является многочлен, рациональная дробь с фиксированным знаменателем и произвольная рациональная дробь.

Отметим здесь, что задача о многочлене вида

$$F(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n,$$

наименее уклоняющемся от нуля в интервале $[-h, h]$, привела к уравнению Абеля

$$F^2(x) - (x^2 - h^2) \Phi^2(x) = L^2,$$

где $\Phi(x)$ — многочлен степени $n - 1$. Решая это уравнение с помощью непрерывных дробей, Чебышев получает снова указанную выше формулу

$$F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}.$$

Используя это решение, Чебышев получает ряд замечательных результатов, которые позже были умножены его последователями, и в первую очередь Золотаревым и братьями Марковыми, а в наше время С. Н. Бернштейном и его продолжателями, и привели к созданию специфической алгебры многочленов. Типичный образец относящегося сюда предложения представляет теорема Чебышева, которой посвящена работа „О функциях, наименее уклоняющихся от нуля“, относящаяся к 1873 г. Эта теорема устанавливает, что для многочлена

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n,$$

возрастающего в интервале $[-1, 1]$, наименьшее уклонение равно

$$2 \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{n}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} \right]^2$$

если n — число четное, и

$$\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{n-1}{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2)} \right]^2,$$

если n — число нечетное.

Из других работ П. Л. Чебышева, посвященных функциям, наименее уклоняющимся от нуля, особого внимания заслуживает мемуар

1889 г. „О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби“. В этом мемуаре ищется дробь вида

$$R(x) = \frac{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n}{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n},$$

для которой величина

$$\max_{1 \leq x \leq h} \left| 1 - \frac{R(x)}{\sqrt{x}} \right|$$

имеет наименьшее значение. Эта задача легко сводится к задаче IV мемуара Е. И. Золотарева ([13], стр. 1—59)*, которая может быть сформулирована следующим образом: из всех несократимых дробей со степенями m и $m+1$ числителя и знаменателя найти ту, которая наименее уклоняется от функции $\operatorname{sign} x$ на множестве, состоящем из двух интервалов

$$[-1, -k], [k, 1],$$

где число k ($0 < k < 1$) задано. Результаты работ Чебышева и Золотарева получили [недавно прекрасное применение в теории электрических фильтров в работах В. Кауэра [37]. По поводу этого круга вопросов см. [38, 39].

Теория функций, наименее уклоняющихся от нуля, носившая явно алгебраический характер у Чебышева и его ближайших продолжателей, в дальнейшем, в десятых годах XX века, получила главным образом в трудах С. Н. Бернштейна [новое уже теоретико-функциональное направление. Чебышев имел дело только с аналитическими функциями, теперь же выступают любые непрерывные функции $f(x)$ в заданном конечном интервале, скажем $[-1, 1]$. Если $f(x)$ — такая функция, то при любом целом $n \geq 0$ вводится величина

$$E_n[f(x)] = \min_{P_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)|,$$

где $P_n(x)$ пробегает совокупность всех многочленов степени $\leq n$. Как известно на основании теоремы Вейерштрасса, величина $E_n[f(x)]$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. С. Н. Бернштейн занялся систематическим

* Мемуар относится к 1877 г.

изучением зависимости между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и быстротой убывания величины $E_n[f(x)]$ при $n \rightarrow \infty$. Один из весьма интересных ранних результатов С. Н. Бернштейна ([40], стр. 11, 113, 136) состоит в том, что если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n[f(x)]} = \frac{1}{\rho}, \quad (\rho > 1),$$

то $f(x)$ есть аналитическая функция, регулярная внутри эллипса с фокусами ± 1 и полусуммой осей ρ . Если же имеется лишь бесконечная последовательность натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

[последовательность (P)], для которой

$$E_{n_i}[f(x)] \leq M \frac{1}{\rho^{n_i}} \quad (\rho > 1, i = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

то функция $f(x)$ однозначно определяется во всем интервале $[-1, 1]$ своими значениями на сколь угодно малой части этого интервала. С. Н. Бернштейн поэтому называет совокупность всех функций $f(x)$, удовлетворяющих (2), квазианалитическим классом, точнее (P) -квазианалитическим классом ([40], стр. 285).

В настоящее время теория наилучшего приближения является сильно разросшейся частью конструктивной теории функций. Имеется ряд монографий и работ [39, 41—45], где подробно изложены как исследования П. Л. Чебышева, так и современная теория приближенного представления функций.

Обратимся теперь к исследованиям Чебышева по теории ортогональных полиномов (или полиномов Чебышева) и интерполированию по способу наименьших квадратов. Хронологически первой работой этого цикла является мемуар „О непрерывных рядах“, опубликованный в 1855 г. К этому мемуару примыкает ряд позднейших статей, в которых, наряду с некоторыми добавлениями к общей теории, содержится изучение важных частных систем ортогональных полиномов.

В этих работах существенную роль играют алгебраические непрерывные дроби вида

$$\frac{b_0}{z - a_1 - \frac{b_1}{z - a_2 - \frac{b_2}{z - a_3 - \frac{b_3}{z - a_4 - \dots}}}}, \quad (3)$$

где z — переменная величина, a_i, b_i — вещественные постоянные числа, причем $b_i \neq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Чебышев связывает такие непрерывные дроби со степенными рядами

$$\frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \dots, \quad (4)$$

а именно: если имеют место неравенства

$$D_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

то степенному ряду (4), сходящемуся или расходящемуся, принадлежит вполне определенная непрерывная дробь вида (3), причем эту принадлежность нужно понимать в том смысле, что при любом натуральном n подходящая дробь n -го порядка

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \quad (5)$$

к этой непрерывной дроби разлагается в степенной ряд по убывающим степеням z , совпадающий с рядом (4) до члена

$$\frac{s_{2n-1}}{z^{2n}}$$

включительно, и это свойство вполне характеризует подходящую дробь (5) среди всех правильных дробей со знаменателем степени $\leq n$; обратно, каждой непрерывной дроби вида (3) принадлежит в указанном смысле вполне определенный ряд вида (4).

Чебышев берет интеграл

$$\int_a^b \frac{w(t)}{z-t} dt,$$

где $w(t) \geq 0$ ($a < t < b$) есть заданная функция, имеющая моменты любого порядка

$$s_k = \int_a^b t^k w(t) dt \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

к которому он приходит путем предельного перехода от суммы

$$\sum_v \frac{\mu_v}{z - \xi_v},$$

где $\mu_v > 0$. Оба случая (суммы и интеграла) объединяются в один, если применить интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{z-t}, \tag{6}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция (функция распределения), для которой существуют все моменты

$$s_k = \int_a^b t^k d\sigma(t) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Интеграл (6) формально разлагается в степенной ряд, а затем этому ряду сопоставляется непрерывная дробь (3). В силу упомянутого свойства подходящих дробей *

$$\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{z-t} - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

* Если функция распределения имеет только $N < \infty$ точек роста, то соответствующая непрерывная дробь будет конечной и $n \leq N$.

откуда

$$Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z - t} d\sigma(t) + \int_a^b \frac{P_n(t)}{z - t} d\sigma(t) + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

и значит

$$\int_a^b \frac{P_n(t)}{z - t} d\sigma(t) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$\int_a^b P_n(t) t^k d\sigma(t) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

т. е. знаменатели $P_n(t)$ подходящих дробей ортогональны относительно функции распределения $\sigma(t)$

$$\int_a^b P_m(t) P_n(t) d\sigma(t) = 0 \quad (m \neq n).$$

Вводя в полиномы $P_n(t)$ надлежащие числовые множители, получим полиномы $\hat{P}_n(t)$, ортогональные и нормированные (коротко — ортонормированные), для которых

$$\int_a^b \hat{P}_m(t) \hat{P}_n(t) d\sigma(t) = \begin{cases} 1 & (m = n), \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

Изложенный и вытекающий из рассмотрения непрерывных дробей способ введения ортогональных полиномов в настоящее время вытеснен более прямыми и естественными способами, которые непосредственно основаны на идее ортогональности и, повидимому, впервые в общем виде предложены и развиты Н. Я. Сониным [46]*.

Отметим некоторые частные системы ортогональных многочленов, изученные Чебышевым**.

* Ему же [47] принадлежит и метод ортогонализации заданной последовательности функций, который обычно приписывают Э. Шмидту.

** Полному обзору работ Чебышева по теории ортогональных многочленов посвящена статья автора этого очерка [48]. Подробный обзор всех достижений отечественной математики в этой области представляет книга Я. Л. Геронимуса [49]. Наконец, наиболее полное изложение всей современной теории ортогональных многочленов содержит монография G. Szegő [50].

А. Тригонометрические полиномы Чебышева 1-го рода

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x = x^n + \dots \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Соотношение ортогональности

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (m \neq n).$$

Непрерывная дробь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{z - \frac{1}{2z - \frac{1}{2z - \dots}}}.$$

В. Тригонометрические полиномы Чебышева 2-го рода

$$U_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sin n \arccos x} = x^n + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Соотношение ортогональности

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Непрерывная дробь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{z-t} dt = z - \sqrt{z^2-1} = \frac{1}{2z - \frac{1}{2z - \frac{1}{2z - \dots}}}.$$

С. Полиномы Чебышева — Эрмита

$$H_n(x) = \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Соотношение ортогональности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Непрерывная дробь

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{z-t} dt = \frac{1}{z - \frac{1}{z - \frac{2}{z - \frac{3}{z - \dots}}}}.$$

Д. Полиномы Чебышева — Лагерра

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \dots \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Соотношение ортогональности

$$\int_0^{\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Непрерывная дробь

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{z-t} = \frac{1}{z - 1 - \frac{1^2}{z - 3 - \frac{2^2}{z - 5 - \frac{3^2}{z - 7 - \dots}}}}.$$

Е. Конечно-разностный аналог полиномов Лежандра. Функция распределения $\sigma(x)$ имеет конечное число N точек роста

$$x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_N = N-1;$$

скачки одинаковы

$$\sigma(x_i + 0) - \sigma(x_i - 0) = 1,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\sigma(x) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i).$$

Полиномы имеют вид

$$t_k(x) = k! \Delta^k \binom{x}{k} \binom{x-N}{k} \quad (k=0, 1, \dots, N-1),$$

где

$$\Delta^k \varphi(x) = \varphi(x+k) - \frac{k}{1} \varphi(x+k-1) + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \varphi(x+k-2) - \dots$$

Соотношения ортогональности имеют вид

$$\sum_{i=0}^{N-1} t_m(i) t_n(i) = 0 \quad (m \neq n),$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \{t_n(i)\}^2 = \frac{N(N^2-1)(N^2-2^2)\dots(N^2-n^2)}{2n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots, N-1).$$

Если $P_k(t)$ есть полином Лежандра степени k , то при фиксированном k

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-k} t_k(Nx) = P_k(2x-1).$$

Отправным пунктом исследований Чебышева является задача о параболическом интерполировании по способу наименьших квадратов, которую Чебышев формулирует следующим образом:

Дана система точек

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

и система положительных чисел (весов или масс)

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n;$$

требуется построить многочлены степени $m < n$

$$\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$$

так, чтобы:

а) для любого многочлена $F(x)$ степени m имело место точное равенство

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \mu_i \lambda_i(x) F(x_i) \quad (7)$$

и

б) величина

$$W(x) = \sum_{i=0}^n \mu_i |\lambda_i(x)|^2$$

была минимальна.

Обозначим через $\hat{P}_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) ортогональные и нормированные многочлены, отвечающие системе масс μ_i , так что

$$\sum_{i=0}^n \mu_i \hat{P}_r(x_i) \hat{P}_s(x_i) = \begin{cases} 1 & (r=s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases} \quad (r, s=0, 1, 2, \dots, n).$$

Тогда, чтобы имело место а), должно быть

$$\lambda_i(x) = \sum_{k=0}^m \hat{P}_k(x) \{ \hat{P}_k(x_i) + \sum_{r=m+1}^n c_{kr} \hat{P}_r(x_i) \} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$$

где c_{kr} — произвольные числа. Величина $W(x)$ равна

$$W(x) = \sum_{k=0}^m \hat{P}_k^2(x) + \sum_{r=m+1}^n \left\{ \sum_{k=0}^m c_{kr} \hat{P}_k(x) \right\}^2$$

и будет минимум при любом x в том и только том случае, когда все c_{kr} равны нулю.

Таким образом,

$$\lambda_i(x) = \sum_{k=0}^m \hat{P}_k(x) \hat{P}_k(x_i)$$

и интерполяционная формула (7), верная для любого полинома степени m , принимает вид

$$F(x) = \sum_{k=0}^m A_k \hat{P}_k(x), \quad (8)$$

где

$$A_k = \sum_{i=0}^n \mu_i F(x_i) \hat{P}_k(x_i) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Правая часть формулы (8) является отрезком суммы

$$\sum_{k=0}^n A_k \hat{P}_k(x),$$

и это обстоятельство весьма важно при практическом интерполировании в тех случаях, когда степень интерполирующего многочлена не задана заранее, а определяется в зависимости от точности получаемого приближения. Чебышев устанавливает далее, что многочлен

$$\sum_{k=0}^m A_k \hat{P}_k(x), \quad (9)$$

где

$$A_k = \sum_{i=0}^n \mu_i f(x_i) \hat{P}_k(x_i) \quad (k=0, 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

минимизирует среди всех многочленов $S(x)$ степени m величину

$$\sum_{i=0}^n \mu_i |f(x_i) - S(x_i)|^2. \quad (11)$$

Так как величину (11) можно рассматривать как уклонение (лучше — как квадрат уклонения) многочлена $S(x)$ от функции $f(x)$ только в особой метрике, то это последнее экстремальное свойство суммы (9) и коэффициентов (10) является наиболее важным и естественным для построения всей теории, которая, кстати сказать, ничуть не усложняется при переходе к континуальному случаю или общему случаю, когда, вместо суммы (11), рассматривается интеграл Стильеса

$$\int_a^b |f(x) - S(x)|^2 d\sigma(x).$$

Свой метод интерполирования Чебышев представил в такой форме, которая особенно удобна при вычислениях и которая на каждом этапе позволяет судить о соответствующей погрешности, измеряемой величиной (11). Этому изложению метода Чебышев посвятил работы „Об интерполировании по способу наименьших квадратов“, „Об интерполировании величин равноотстоящих“, „Об одном новом ряде“ и „Об интерполировании“. Особое практическое значение случая равноотстоящих узлов при равных весах очевидно. Именно этому случаю посвящены три последние работы. Соответствующие ортогональные полиномы, представляющие конечно-разностный аналог полиномов Лежандра, мы привели выше.

Среди работ Чебышева по интерполированию особняком стоит мемуар „Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями“, относящийся к 1859 г., в котором ни способ наименьших квадратов, ни ортогональные полиномы не имеют применения.

Рассмотрим ход идей этого мемуара с точки зрения практических приложений.

Пусть для весьма длинного ряда значений

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_s = b$$

имеются приближенные значения некоторой функции $F(x)$

$$y_i = F(x_i) + \varepsilon_i,$$

где ε_i — не зависящие друг от друга ошибки.

Пусть имеются основания считать, что функцию $F(x)$ можно достаточно точно аппроксимировать многочленом степени n

$$F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n.$$

Так как число имеющихся значений очень велико, то вычисления по методу наименьших квадратов становятся очень громоздкими. Если же из последовательности x_i выбрать подпоследовательность

$$x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_r},$$

где r много меньше s , то точность определения коэффициентов A_m по значениям y_{σ_j} сильно понизится.

Чебышев замечает, что интегралы

$$\int_{x_{\sigma_j}}^{x_{\sigma_{j+1}}} F(x) dx$$

могут быть определены по значениям

$$y_{\sigma_j}, y_{\sigma_{j+1}}, \dots, y_{\sigma_{j+1}}$$

со значительно большей точностью, чем отдельные значения $F(x_{\sigma_j})$ по соответствующим y_{σ_j} . Поэтому он ставит задачу определения коэффициентов A_m по интегралам

$$\int_a^{\eta_1} F(x) dx, \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx, \dots, \int_{\eta_{r-1}}^{\eta_r} F(x) dx, \int_{\eta_r}^b F(x) dx \quad (a < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_r < b)$$

с помощью формул

$$A_m = C_m^{(0)} \int_a^{\eta_1} F(x) dx + C_m^{(1)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \dots + C_m^{(r)} \int_{\eta_r}^b F(x) dx.$$

Желая упростить вычисления, Чебышев требует, чтобы

$$C_m^{(j)} = (-1)^j C_m.$$

Это приводит к необходимости выбирать точки η_j особым способом для каждого m .

С теоретической стороны задача, поставленная Чебышевым, также весьма интересна, так как она содержит в зародыше идею биортогональных рядов. Эта сторона работы Чебышева нашла отклик лишь через сорок лет в мемуаре А. А. Маркова [51]. Отсылая по поводу этого вопроса к книге автора настоящего очерка ([39], стр. 283—286) и к статье [48], отметим здесь еще, что в мемуаре Чебышева решена одна экстремум-проблема, которую в 1873 г. заново решили А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев ([12], стр. 138—153), с чьими именами ее обычно и связывают. Эта задача о минимуме величины

$$\int_{-1}^1 |x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n| dx,$$

который, как оказывается, равен $\frac{1}{2^{n-1}}$ и достигается для многочлена

$$U_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sin \arccos x}.$$

Заканчивая настоящий очерк, остановимся еще на работе Чебышева „О квадратурах“, относящейся к 1873 г. Подходя ко всякой приближенной формуле прежде всего с точки зрения ее практичности, Чебышев обратил внимание на квадратурные формулы, в которых все коэффициенты имеют одинаковые значения или, по крайней мере, значения одинаковые по модулю.

„Важность приближенных формул этого рода,— говорит Чебышев,— побуждает меня предложить некоторые соображения, касающиеся таких формул“.

Формула 1-го рода имеет вид

$$\int_{-1}^1 F(x) p(x) dx = k [F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n)], \quad (I)$$

где $p(x)$ — заданная функция, для которой

$$\int_{-1}^1 p(x) dx \neq 0.$$

Квадратурная формула 2-го рода отвечает случаю, когда последнее условие не выполнено и имеет вид

$$\int_{-1}^1 F(x) q(x) dx = k [F(x_1) + \dots + F(x_m) - F(x_{m+1}) - \dots - F(x_{2m})], \quad (\text{II})$$

где

$$\int_{-1}^1 q(x) dx = 0.$$

Соответственно числу входящих параметров $(k, x_1, x_2, \dots)$ Чебышев ставит для их нахождения требование, чтобы формула (I) была точной для любого многочлена $F(x)$ степени $\leq n$, а формула (II) — для любого многочлена степени $\leq 2m + 1$. Эти требования и приводят к уравнениям для определения указанных параметров, решая которые Чебышев строит ряд важных квадратурных формул. В первую очередь строится формула (I) для веса $p(x) = 1$ при $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Чебышев не ставил вопроса о том, существует ли формула (I) для данного веса при любом n . Между тем оказалось, что при $p(x) = 1$ и $n = 8$ уравнение для нахождения узлов x_i имеет мнимые корни, так что формула (I) при $n = 8$ и $p(x) = 1$ невозможна. Но при $n = 9$ она снова существует и была построена. В 1937 г. С. Н. Бернштейн [52] окончательно решил вопрос о формуле (I) при $p(x) = 1$, доказав, что при $n \geq 10$ эту формулу построить нельзя.

Формулу (II) Чебышев фактически построил для весов

$$q(x) = x, \quad q(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $m = 1, 2$. После Чебышева вопросом о существовании формул вида (II), верных для любого многочлена степени $\leq 2m$, занимался А. А. Марков [53]. Подробности по этому поводу, а также новые результаты читатель найдет в первой статье сборника по проблеме мо-

ментов [26]. Сюда же относится ряд весьма интересных работ С. Н. Бернштейна [54], в которых исследуются вопросы о существовании не только формул чебышевского типа, но и удобных для применения формул других типов.

ЛИТЕРАТУРА *

1. А. М. Ляпунов. Пафнутий Львович Чебышев. Сообщ. Харьк. мат. об-ва, 2-я серия, т. IV, 1895; „Избранные математические труды П. Л. Чебышева“, Гостехиздат, 1946.
2. К. А. Поссе. П. Л. Чебышев. С. А. Венгеров. Критико-библиографический словарь русских писателей и ученых, т. VI, СПб., 1897—1904; Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. I, 1944.
3. И. И. Иванов. О некоторых вопросах, находящихся в связи со счетом простых чисел. СПб., 1901.
4. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig, 1909.
5. А. Е. Ингам. Распределение простых чисел. ОНТИ, 1936.
6. И. М. Виноградов и Б. Н. Делоне. Работы П. Л. Чебышева по теории чисел. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. I. Изд. АН СССР, 1945.
7. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд. АН СССР, 1947.
8. N. Wiener. The Fourier Integral and certain of its Applications. Cambr. Univ. Press, 1933.
9. A. Selberg. An elementary proof of the prime number theorem. Ann. Math. 50, 1949.
10. P. Erdős. On a new method in elementary proof of the prime number theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35, 1949.
11. N. H. Abel. Oeuvres completes, I.
12. Е. И. Золотарев. Полн. собр. соч., вып. 1. Изд. АН СССР, 1931.
13. Е. И. Золотарев. Полн. собр. соч., вып. 2. Изд. АН СССР, 1932.
14. И. Пташицкий. Об интегрировании в конечном виде эллиптических дифференциалов. СПб., 1888.
15. И. Долбня. Исследование по теории абелевых интегралов. СПб., 1896.
16. В. В. Голубев. Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. I, изд. АН СССР, 1945.
17. Г. Гарди. Интегрирование элементарных функций. Гостехиздат, 1935.
18. В. Немыцкий, М. Слудская и А. Черкасов. Курс математического анализа. ОНТИ, 1940.
19. А. А. Марков. Исчисление вероятностей. Госуд. изд-во, 1924.
20. А. А. Марков. Избранные труды. М.—Л., 1948.

* Работы П. Л. Чебышева не включены.

21. А. А. Марков. О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. СПб., 1884.
22. К. А. Поссе. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. СПб., 1884.
23. Т. Стильтес. Исследования о непрерывных дробях. Харьков, 1936.
24. Shohata. Tamarkin. The problem of moments. New York, 1943.
25. М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, вып. 44, 1951.
26. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, 1938.
27. А. А. Марков. Закон больших чисел и метод наименьших квадратов. Изв. физ.-мат. об-ва Казанского ун-та, 1898.
28. А. М. Ляпунов. Sur une proposition de la théorie des probabilités. Зап. Имп. АН, 1900.
29. А. М. Ляпунов. Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités. Зап. АН СССР, 1901.
30. С. Н. Бернштейн. О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. I. Изд. АН СССР, 1945.
31. С. Н. Бернштейн. Теория вероятностей. М.—Л., 1946.
32. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.—Л., 1949.
33. А. Я. Хинчин. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.—Л., 1938.
34. Н. Я. Сонин. О точности определения предельных величин интегралов. Зап. Имп. АН, 1892.
35. С. Н. Бернштейн. Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева. Изв. АН СССР, серия матем., 9, 1945.
36. В. Л. Гончаров. Теория наилучшего приближения функций. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. I. Изд. АН СССР, 1945.
37. W. Sauer. Ein Interpolationsproblem für Funktionen mit positiven Reellteil. Math. Zschr. 38.
38. Н. И. Ахиезер. Об одной задаче Е. И. Золотарева. Изв. АН СССР, Отд. физ.-мат. наук, 1929.
39. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М.—Л., 1947.
40. С. Н. Бернштейн. Собр. соч., т. I. Изд. АН СССР, 1952.
41. Vallée-Poussin. Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, 1919.
42. С. Н. Бернштейн. Lecons sur les propriétés extémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.
43. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. М.—Л., 1934.

44. С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.—Л., 1937.
 45. Е. Ремез. Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближеного представлення функцій. Київ, 1935.
 46. Н. Я. Сонин. О приближенном вычислении определенных интегралов. Варшавские университет. изв., 1887.
 47. Н. Я. Сонин. О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам. Зап. Импер. АН, т. VI, 1898.
 48. Н. И. Ахиезер. Общая теория полиномов П. Л. Чебышева. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. I. Изд. АН СССР, 1945.
 49. Я. Л. Геронимус. Теория ортогональных многочленов. М.—Л., 1950.
 50. G. Szegő. Orthogonal polynomials. New York, 1939.
 51. А. А. Марков. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. Зап. Импер. АН, 1898.
 52. С. Н. Бернштейн. О формулах квадратур Котеса и Чебышева. ДАН СССР 14, 1937.
 53. А. А. Марков. Новые приложения непрерывных дробей. Зап. АН, 1896.
 54. С. Н. Бернштейн. Собр. соч., т. II. Изд. АН СССР, 1954.
-

МОДЕЛИ МЕХАНИЗМОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

(Статья И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского)

В Академии Наук СССР и в Ленинградском университете хранятся модели механизмов, созданные П. Л. Чебышевым. В настоящей статье приведены схемы и фотографии этих механизмов с краткими описаниями их. Кроме того, для каждого механизма указаны соотношения между размерами его звеньев.

Более подробное описание и анализ механизмов П. Л. Чебышева имеются в работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского*, где для наиболее интересных в практическом отношении механизмов даны расчетные таблицы и графики, при помощи которых можно быстро определить необходимые параметры механизмов.

1. Механизм четырехзвенной противовращательной рукоятки

На фиг. 1 приведена копия фотоснимка, сохранившегося в архиве Чебышева, модели механизма четырехзвенной противовращательной рукоятки, построенной Чебышевым (сама модель не сохранилась). Кинематическая схема механизма изображена на фиг. 2.

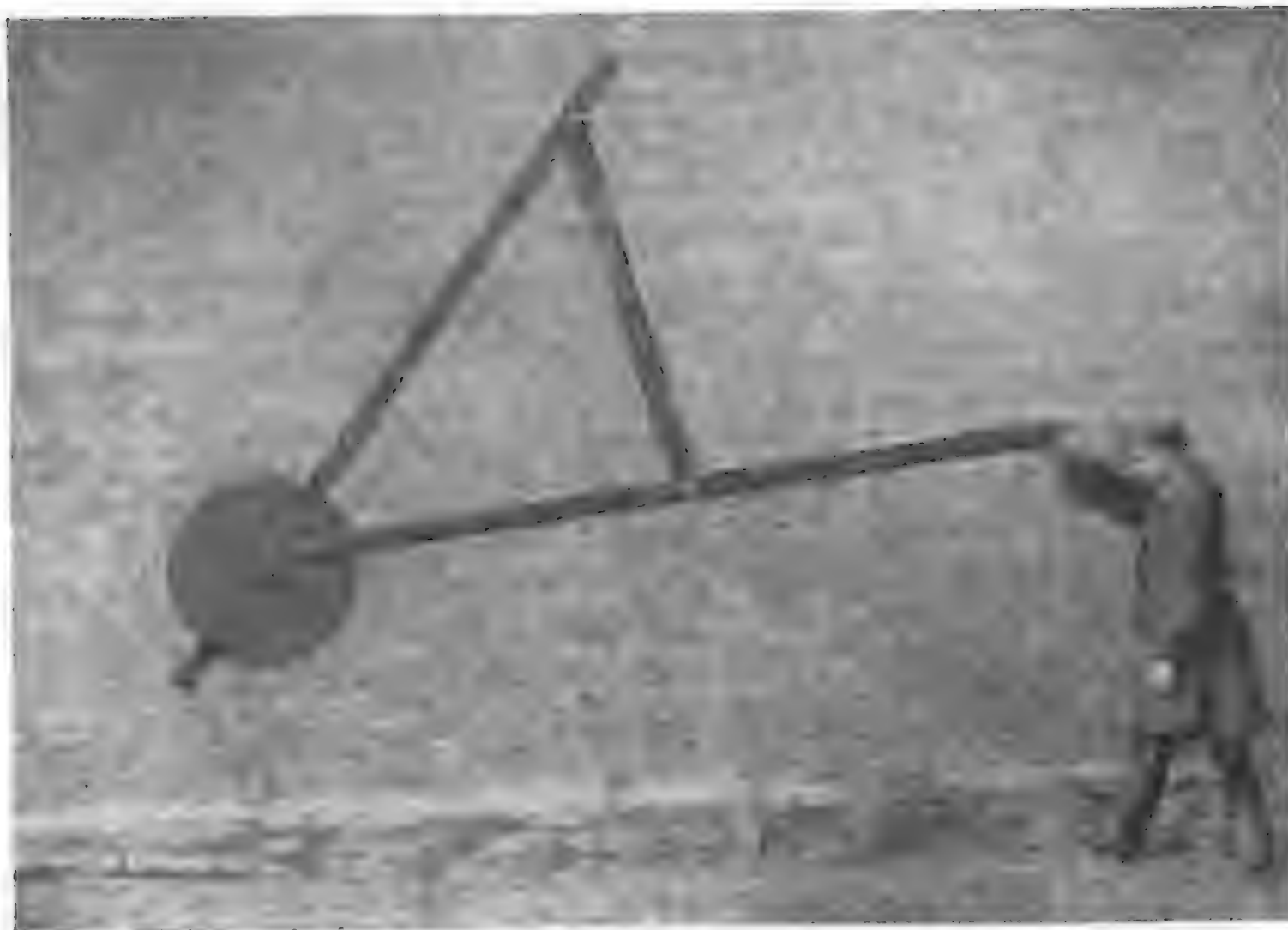
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1,$$

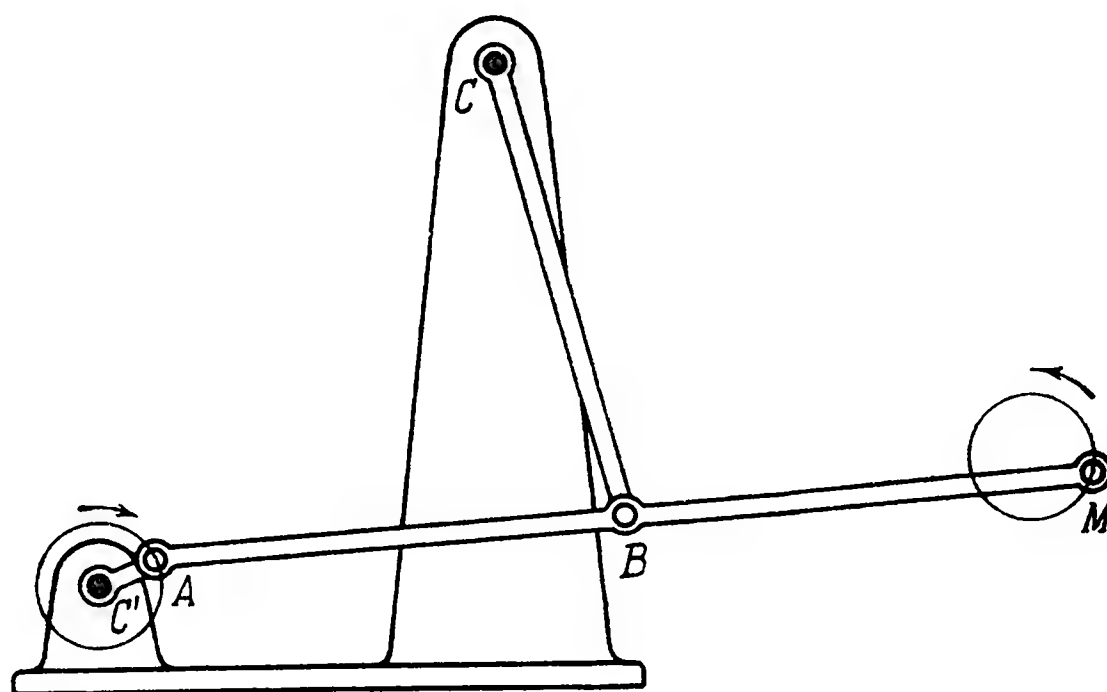
$$AC' = 0,136,$$

$$CC' = 1,409.$$

* И. И. Артоболевский и Н. И. Левитский. Механизмы П. Л. Чебышева. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, изд. АН СССР, М.—Л., 1945, вып. II, стр. 7—109.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Точка M описывает траекторию, мало отличающуюся от окружности радиуса R , равного

$$R \approx 0,136.$$

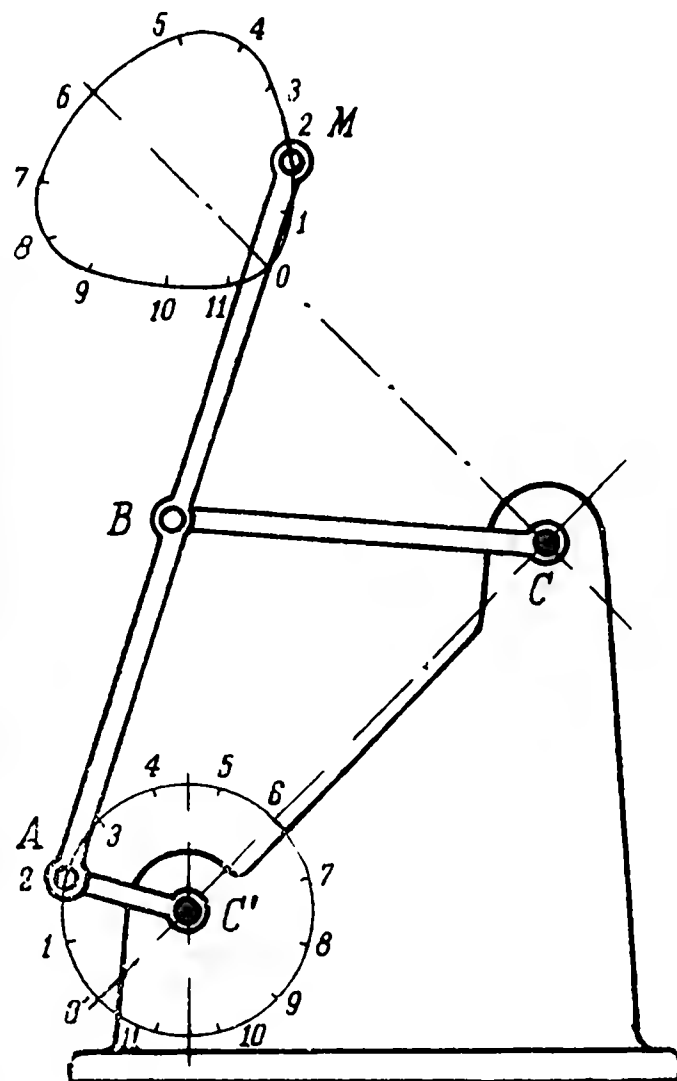
Направление движения точки M по ее траектории — обратное по отношению к направлению движения точки A кривошипа AC' , а потому данный механизм может служить в качестве противовращательной рукоятки.

2. Механизм самокатного кресла

На фиг. 3 приведена копия фотоснимка самокатного кресла, снабженного механизмом Чебышева, а на фиг. 4 — кинематическая схема



Фиг. 3.



Фиг. 4.

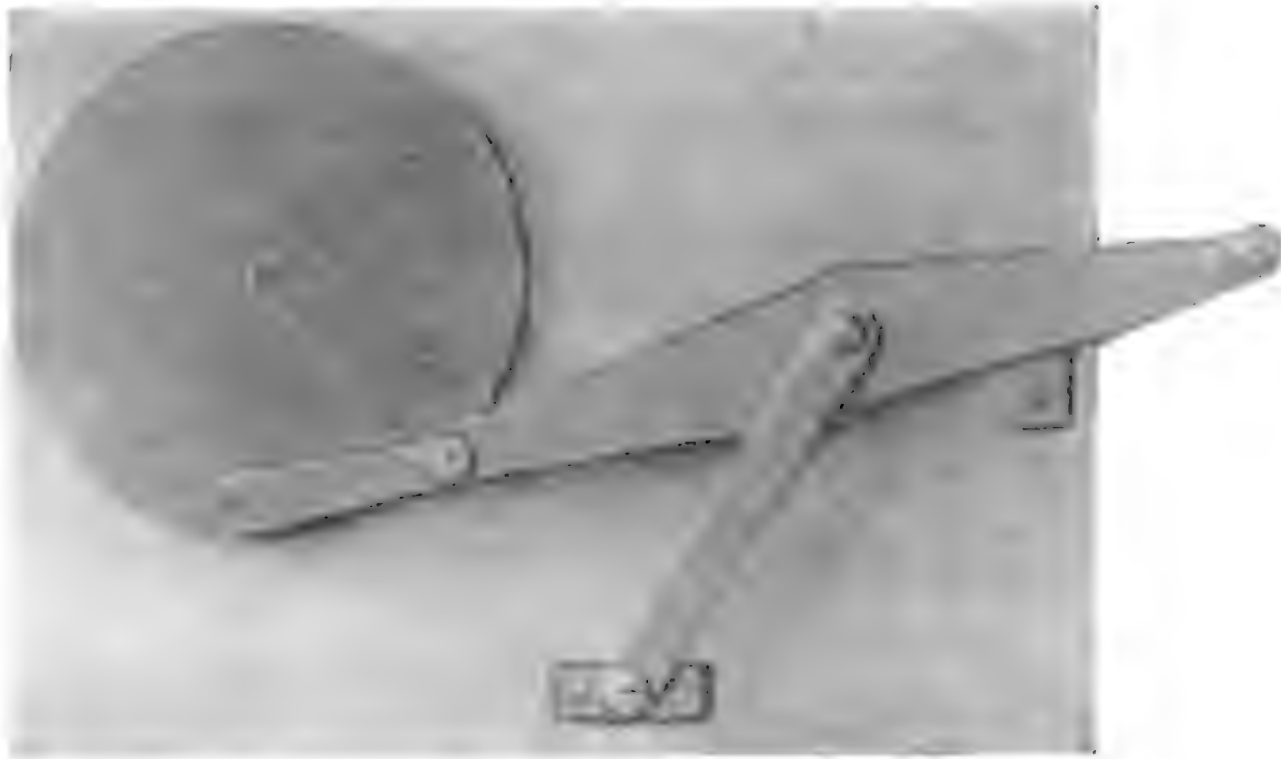
этого механизма. Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1, \\ AC' = 0,325, \quad CC' = 1,385.$$

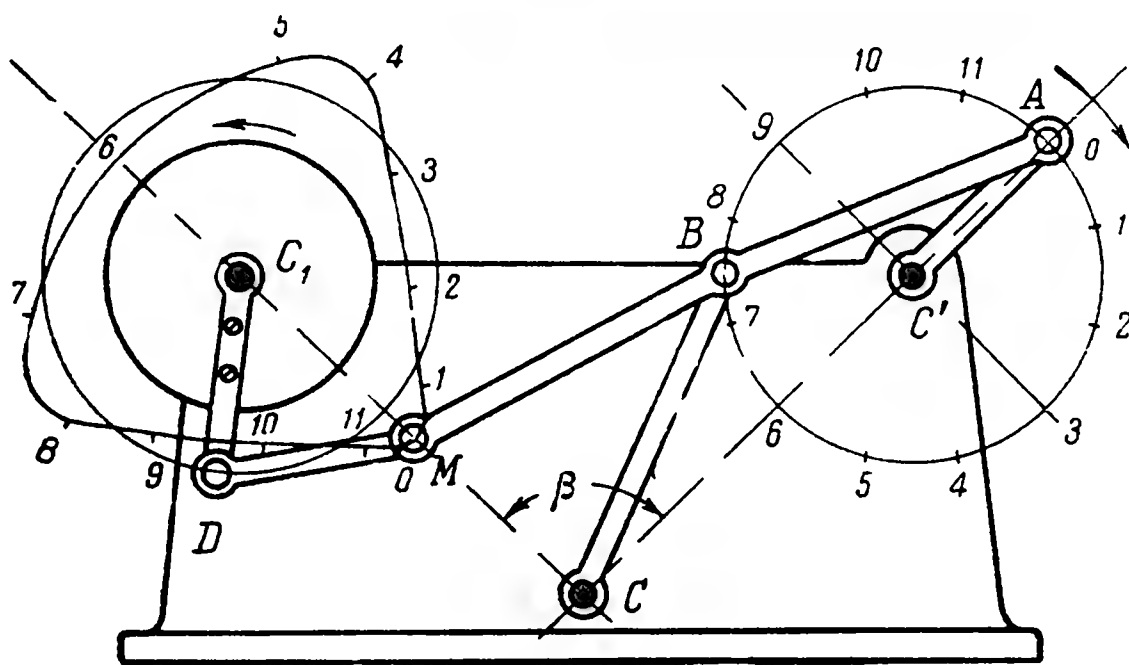
Если ведущим звеном сделать шатун AB и перемещать точку M по ее траектории, то кривошип AC' будет делать полный оборот, что и было использовано Чебышевым при конструировании им своего самокатного кресла, в котором каждое из двух колес приводится во вращение при помощи механизма, кинематическая схема которого дана на фиг. 4.

3. Механизм шестизвенной противовращательной рукоятки

На фиг. 5 приведен фотоснимок модели механизма шестизвенной противовращательной рукоятки, а на фиг. 6 — кинематическая схема



Фиг. 5.



Фиг. 6.

этого механизма. Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1,$$

$$AC' = 0,54, \quad CC' = 1,33, \quad MD = C_1D = 0,57, \quad C_1C = 1,39,$$

$$\beta = 90^\circ.$$

При вращении кривошипа AC' ведомое звено C_1D , снабженное маховиком, совершает полный оборот за один оборот кривошипа. Так как вращение ведомого звена C_1D происходит в направлении, обратном вращению кривошипа AC' , то данный механизм может служить в качестве противовращательной рукоятки.

4. „Парадоксальный“ механизм

На фиг. 7 приведен фотоснимок модели „парадоксального“ механизма, а на фиг. 8 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB = BC = BM &= 1, \\ AC' &= 0,557, \quad CC' = 1,324, \quad C_1C = 1,387, \\ MD &= 0,584, \quad C_1D = 0,123, \\ \beta &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Размеры звеньев C_1D и MD выбраны так, что сумма длин их равна радиусу окружности, описанной вокруг траектории точки M , а их разность равна радиусу окружности, вписанной в эту траекторию, т. е.

$$C_1D + MD = R_0 \quad \text{и} \quad MD - C_1D = R_1.$$

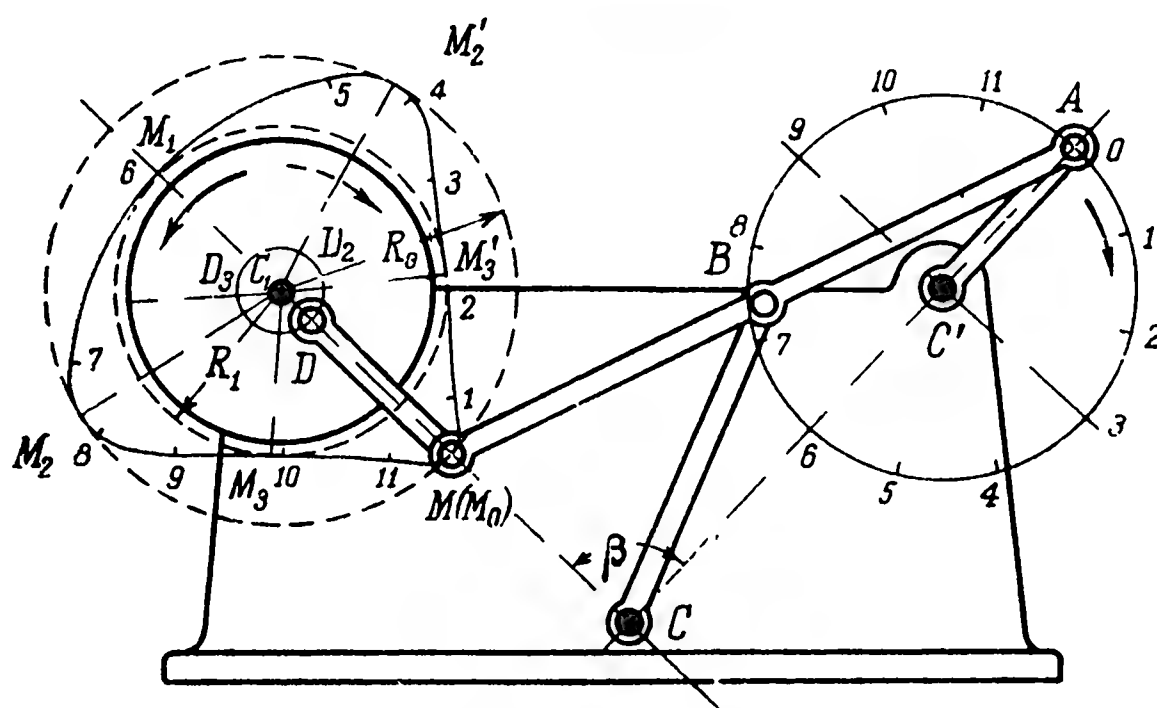
Окружность радиуса R_0 касается траектории точки M в трех точках: M_0 , M_2 , M'_2 . Окружность радиуса R_1 также касается этой траектории в трех точках: M_1 , M_3 и M'_3 . Когда точка M приходит в положения M_0 , M_1 , M_2 , M'_2 , M_3 и M'_3 , то звенья MD и C_1D вытягиваются в одну линию, т. е. ведомое звено C_1D находится в предельных положениях. За один оборот кривошипа AC' предельных положений будет *шесть*: три *внешних* (длины звеньев C_1D и MD складываются) и три *внутренних* (длины звеньев C_1D и MD вычитаются). Так как из каждого предельного положения звено C_1D может выйти, вращаясь как в одну, так и в другую сторону, то для определенности движения механизма ведомое звено C_1D снабжено маховиком.

Парадоксальность механизма заключается в том, что при постоянном вращении ведомого звена C_1D в направлении, противоположном

направлению вращения кривошипа AC' , оно совершает *четыре* оборота за *один* оборот кривошипа. При вращении ведомого звена C_1D в направлении, совпадающем с направлением вращения кривошипа AC' , оно совершает *два* оборота за *один* оборот кривошипа.



Фиг. 7.



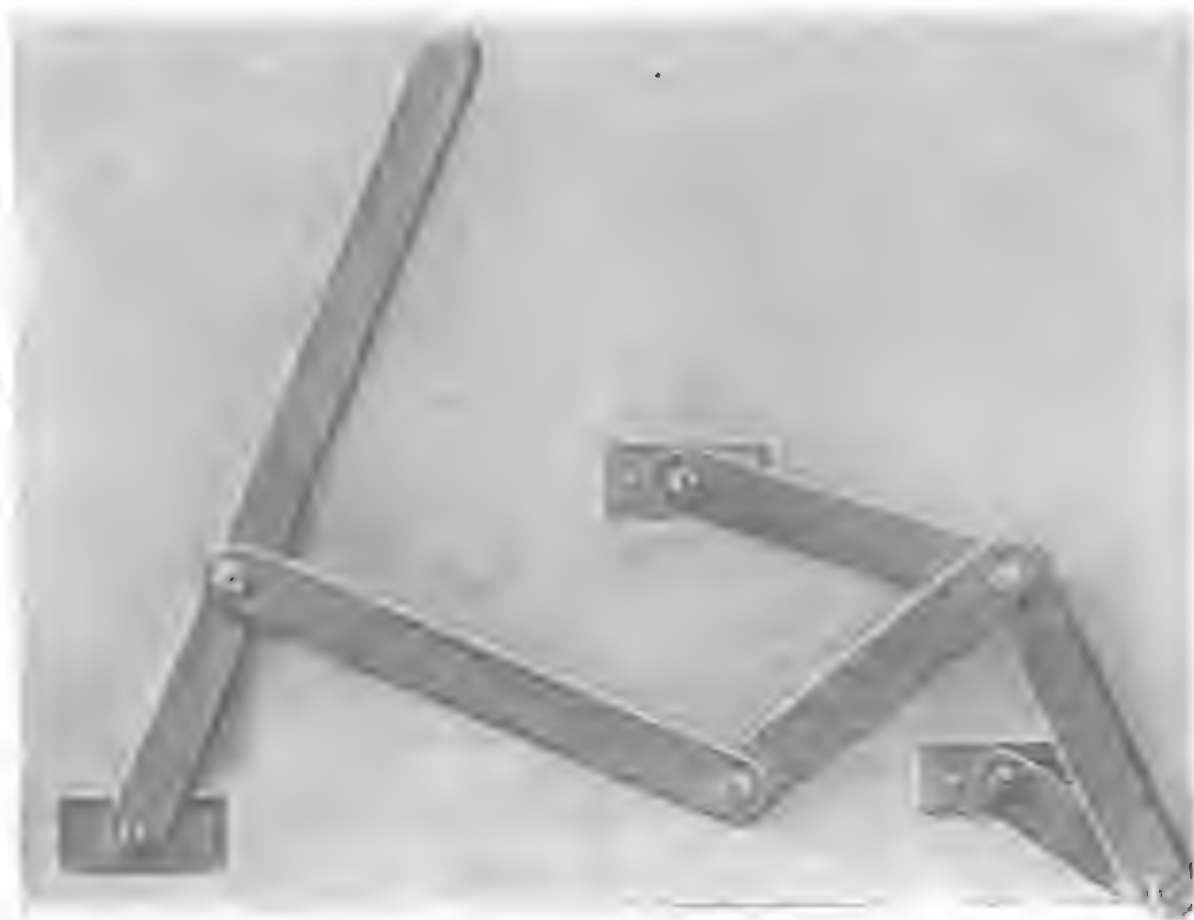
Фиг. 8.

5. Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа

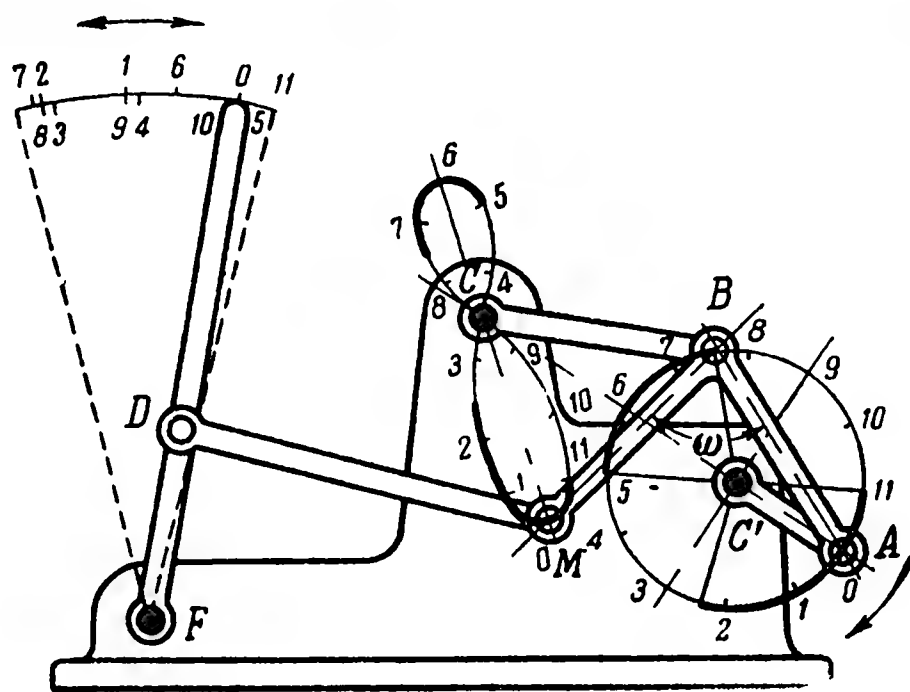
На фиг. 9 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 10 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1, \\ AC' &= 0,54, \quad CC' = 1,29, \quad \omega = 80^\circ, \\ MD &= 1,6, \quad DF = 0,81, \quad CF = 1,92, \quad C'F = 2,57. \end{aligned}$$



Фиг. 9.

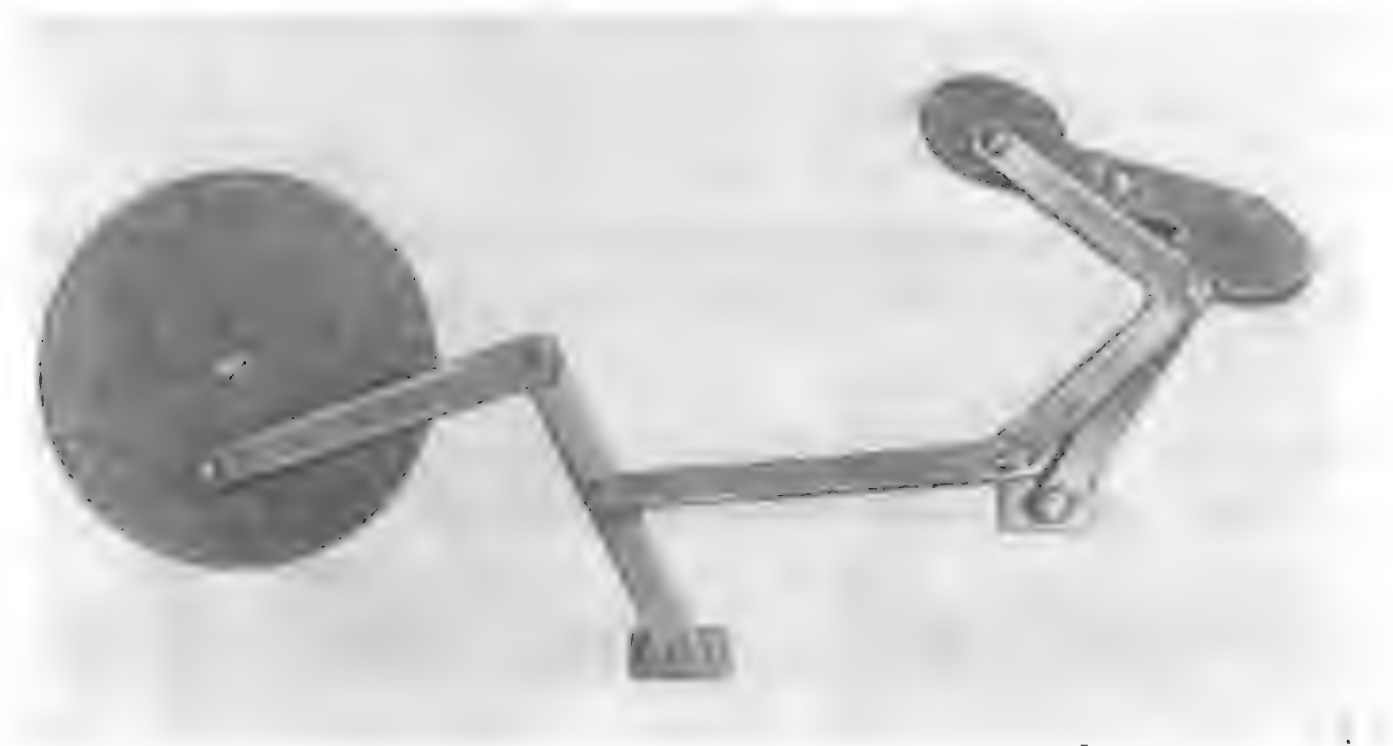


Фиг. 10.

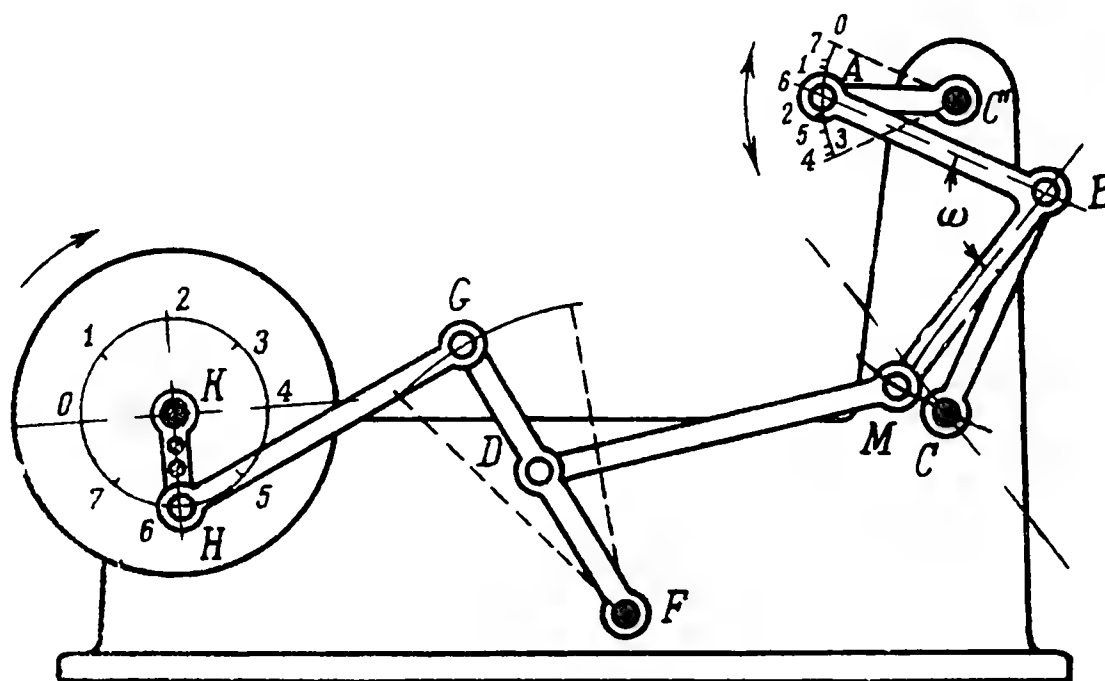
Ведомое звено DF совершает два полных качания за один оборот кривошипа: одно *медленное* и другое *быстрое*. На фиг. 10 участки

траектории точки M , проходимые ею при движении ведомого звена DF справа налево, показаны жирными линиями; так же показаны и соответствующие участки, проходимые точкой A кривошипа.

6. Механизм для преобразования качательного движения во вращательное



Фиг. 11.



Фиг. 12.

На фиг. 11 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 12 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1, \\ AC' &= 0,545, \quad CC' = 1,325, \quad \omega = 80^\circ, \\ MD &= 1,61, \quad FD = 0,71, \quad GF = 1,33, \quad GH = 1,36, \\ KH &= 0,39, \quad CF = 1,6, \quad C'F = 2,6, \quad KF = 2,11, \\ CK &= 3,29. \end{aligned}$$

Соотношения между размерами звеньев выбраны так, что звено KH может делать *полный оборот*, в то время как звено AC' совершает одно *полное качание* на некоторый угол. Прямой и обратный ход точка A совершает в приблизительно равные промежутки времени. Если звено AC' принять за ведущее (механизм „выпрямителя движения“), то для определенности направления вращения при переходе через предельные положения ведомое звено KH должно быть снабжено маховиком, что и выполнено в модели.

7. Механизм „велосипеда“

На фиг. 13 приведена копия фотоснимка модели механизма, известного под названием „велосипеда“, а на фиг. 14 — кинематическая схема механизма, лежащего в основе этого приспособления.

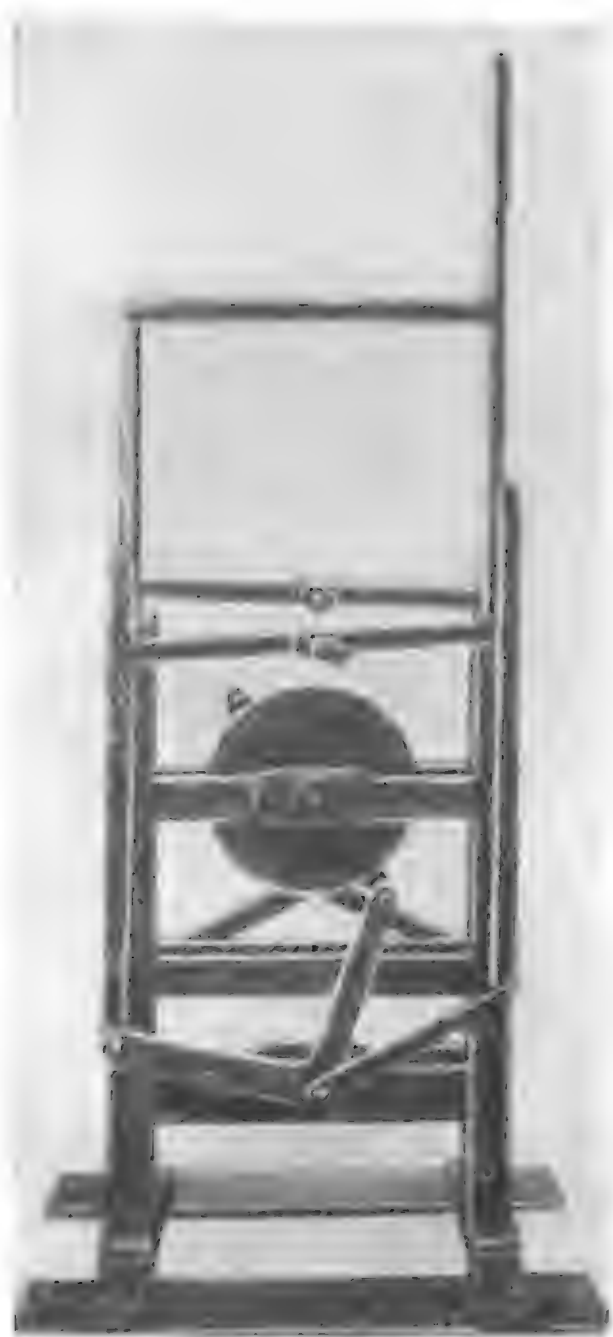
Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1, \\ AC' &= 0,55, \quad CC' = 1,38, \quad \omega = 267^\circ, \\ MK &= KF = 1,84, \quad C'F = 1,23, \quad FC = 1,77. \end{aligned}$$

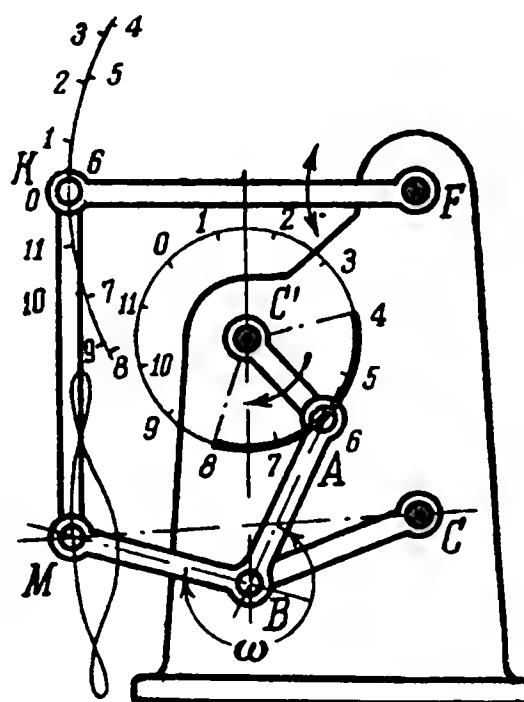
При движении звена KF сверху вниз, от одного крайнего положения к другому, кривошип AC' совершает более полуоборота. Участок траектории точки A кривошипа AC' , соответствующий обратному ходу звена KF , обозначен жирной линией.

Присоединяя к оси C' второй подобный механизм с кривошипом, смещенным относительно кривошипа AC' на угол в 180° (на фиг. 14 не показан), получаем возможность, нажимая попеременно на ведущие звенья обоих механизмов, привести во вращение ведомое звено AC' (механизм „выпрямителя движения“).

По характеру модели можно предположить, что данный механизм предназначался не для передвижения велосипеда, а для использования в качестве *ножного привода*.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

8. Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом

На фиг. 15 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 16 — его кинематическая схема.

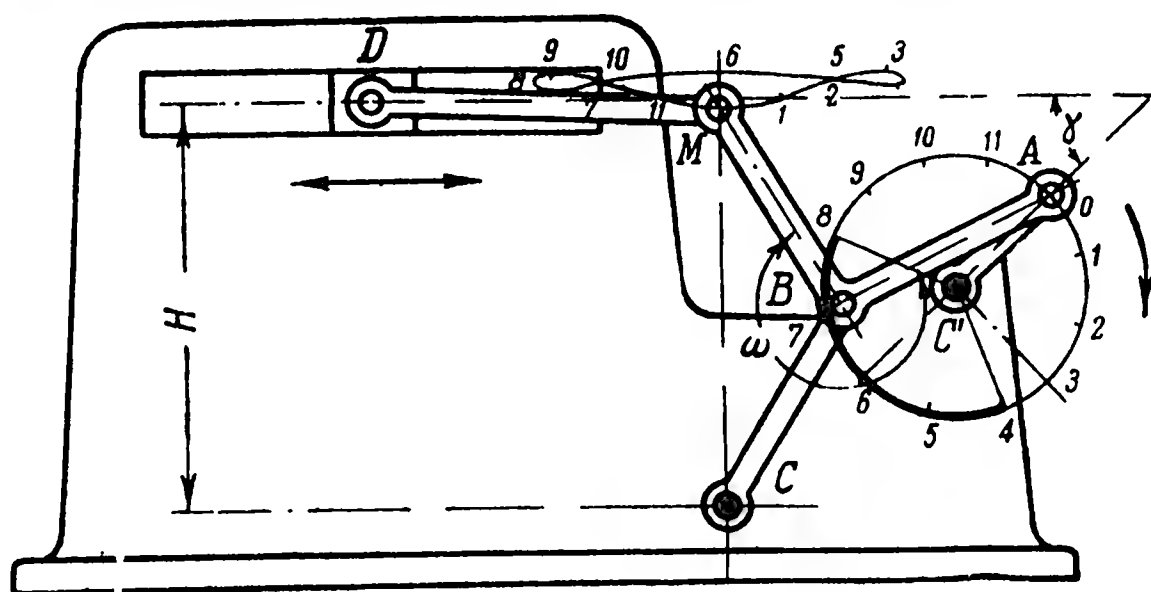
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1, \\ AC' &= 0,55, \quad CC' = 1,38, \\ \omega &= 267^\circ, \quad \gamma = 43,5^\circ, \\ MD &= 1,5, \quad H = 1,79. \end{aligned}$$

Ведомое звено этого механизма (ползун D),двигающееся поступательно, имеет ускоренный обратный ход. Участок траектории точки A , соответствующий обратному ходу ползуна D , показан жирной линией.



Фиг. 15.



Фиг. 16.

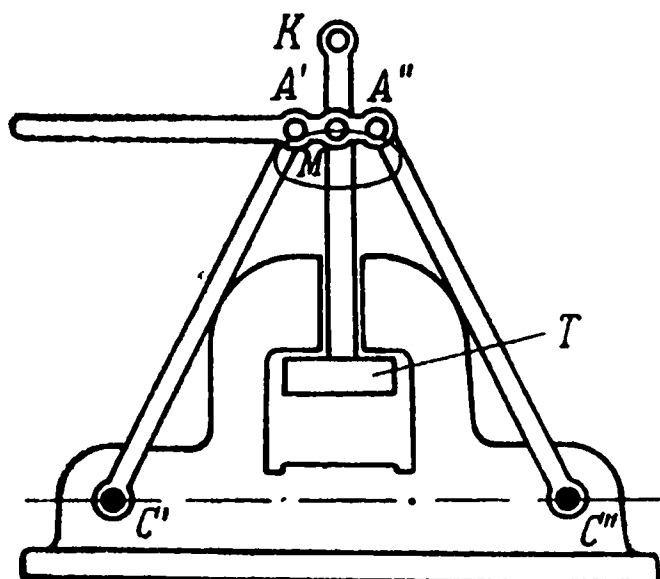
9. Механизм пресса

Механизм показан в трех положениях, соответствующих наивысшему подъему ползуна (фиг. 17), среднему его положению (фиг. 18) и наинизшему (фиг. 19).

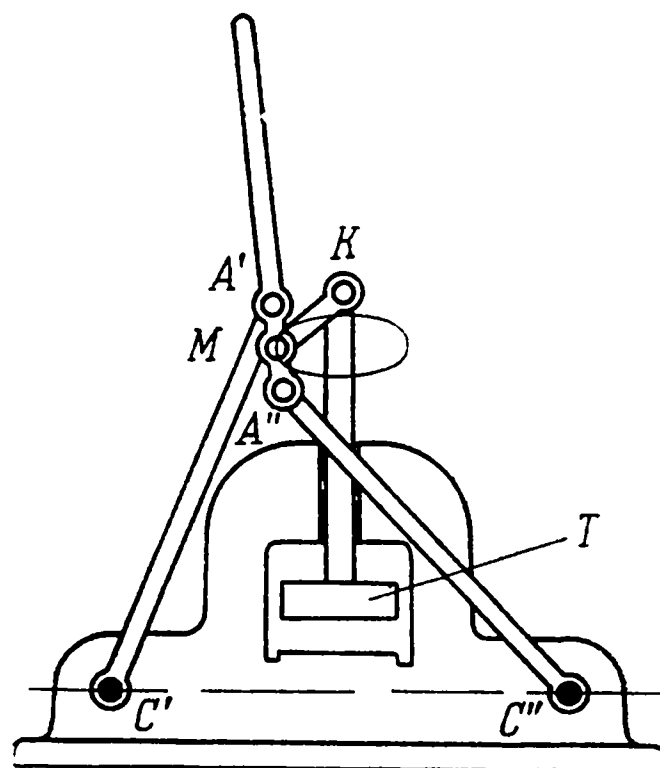
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1, \quad A'A'' = 0,198, \\ C'C'' = 1,105, \quad MK = 0,211.$$

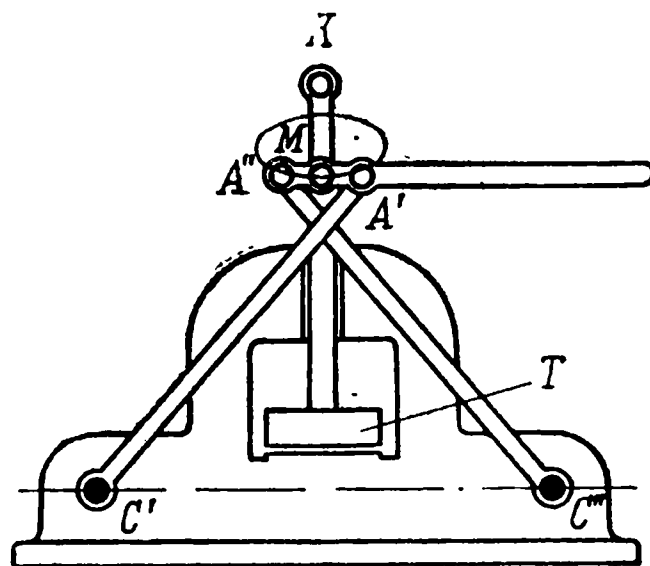
Ведущим звеном является шатун $A'A''$. Таким образом, сложное движение шатуна преобразуется в поступательное движение ползуна T .



Фиг. 17.



Фиг. 18.



Фиг. 19.

10. Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода

На фиг. 20 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 21 — его кинематическая схема.

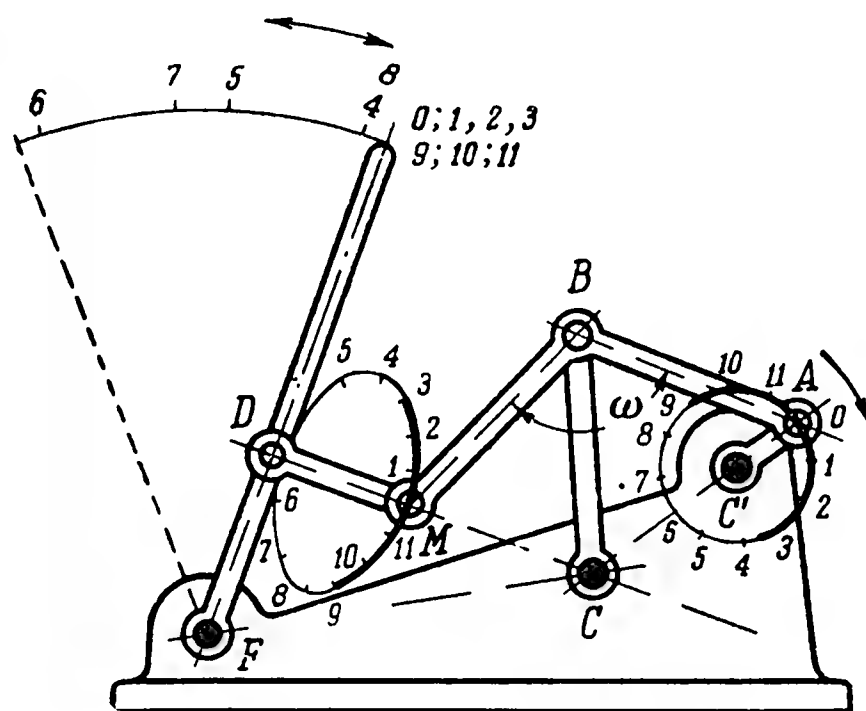
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB = BC = BM = 1, \quad AC' = 0,305, \quad CC' = 0,76, \\ \omega = 114^\circ, \\ MD = 0,66, \quad FD = 0,8, \quad CF = 1,66, \quad C'F = 2,36. \end{aligned}$$

Длина звена MD равна радиусу окружности, к которой приближена траектория точки M на некотором участке, а положение центра F выбрано таким образом, что в одном из крайних положений звена FD точка D совпадает с центром этой окружности. Вследствие этого



Фиг. 20.



Фиг. 21.

ведомое звено FD имеет в одном из крайних положений остановку, продолжительность которой равна времени прохождения точкой M участка траектории, приближенного к окружности (обозначен на схеме *жирной линией*).

При данных соотношениях длин звеньев продолжительность остановки приблизительно равна половине оборота кривошипа или времени полного качания звена FD .

11. Механизм „сортировальки“

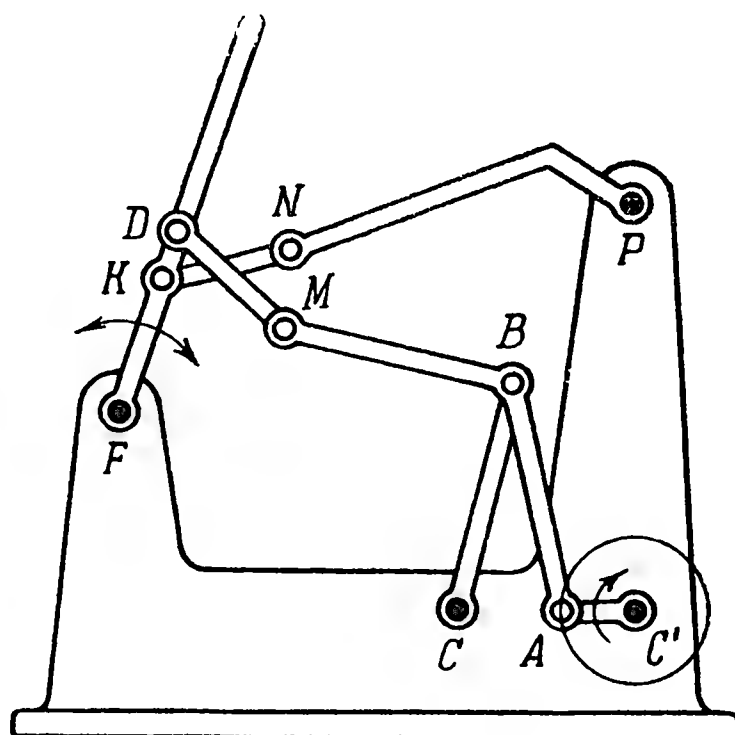
На фиг. 22 приведена копия фотоснимка приспособления, известного под названием „сортировалька“, а на фиг. 23 — кинематическая схема механизма, лежащего в основе этого приспособления. Относительные размеры звеньев основного механизма те же, что и предыдущего (механизм 10).

Принцип работы приспособления заключается в следующем. При крайнем правом положении коромысла DF зерно из бункера поступает

в лоток, укрепленный в верхней части коромысла. Так как остановка коромысла DF в этом положении продолжительна и соответствует полуобороту кривошипа AC' (см. механизм 10), то зерно успевает полностью заполнить лоток. За следующую половину оборота



Фиг. 22.



Фиг. 23.

кривошипа AC коромысло DF с лотком, наполненным зерном, быстро совершает полное качание. При этом зерна, отделяясь от лотка, падают ближе или дальше, в зависимости от величины их массы. Звено NP закрывает выходное отверстие бункера, открывая его лишь в момент, соответствующий остановке коромысла DF .

12. Механизм с остановкой ведомого звена на полпути

На фиг. 24 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 25 — его кинематическая схема.

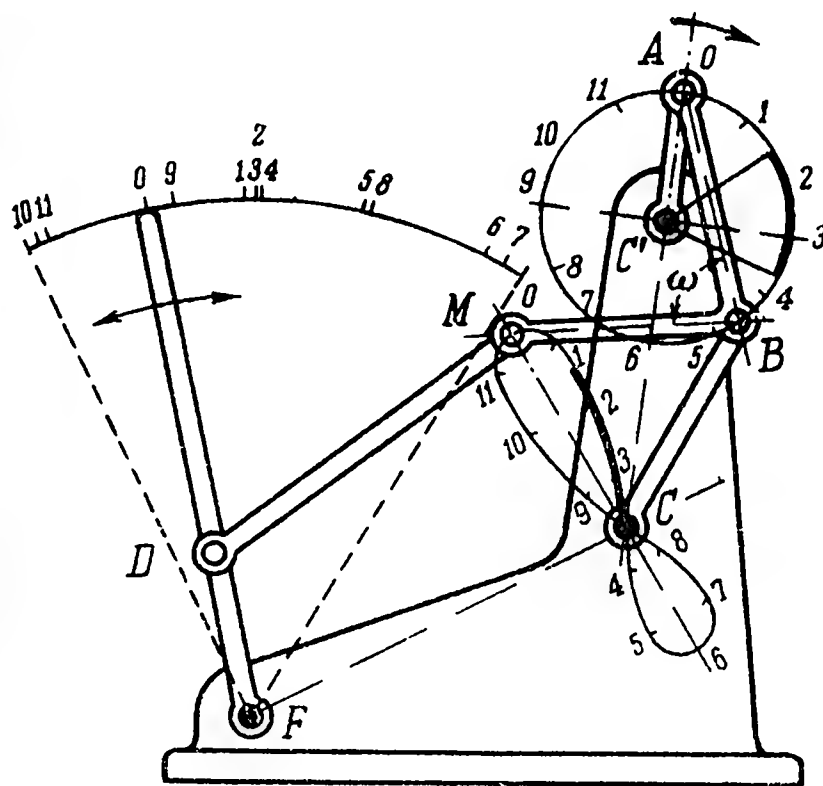
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1, \\ AC' &= 0,54, \quad CC' = 1,3, \\ \omega &= 80^\circ, \\ MD &= 1,603, \quad FD = 0,695, \\ CF &= 1,8, \quad C'F = 2,78. \end{aligned}$$

Траектория точки M на участке, обозначенном жирной линией, мало отличается от дуги окружности. Длина звена MD принята равной радиусу этой окружности, а положение центра F выбрано так, что



Фиг. 24.



Фиг. 25.

в одном из средних положений коромысла DF точка D приходит в центр указанной окружности. Вследствие этого при непрерывном вращении кривошипа AC' коромысло DF совершает *колебательное движение с остановкой в середине рабочего хода*.

Обратный ход коромысла — ускоренный и без остановки.

13. Шестизвенный механизм с остановками в крайних положениях

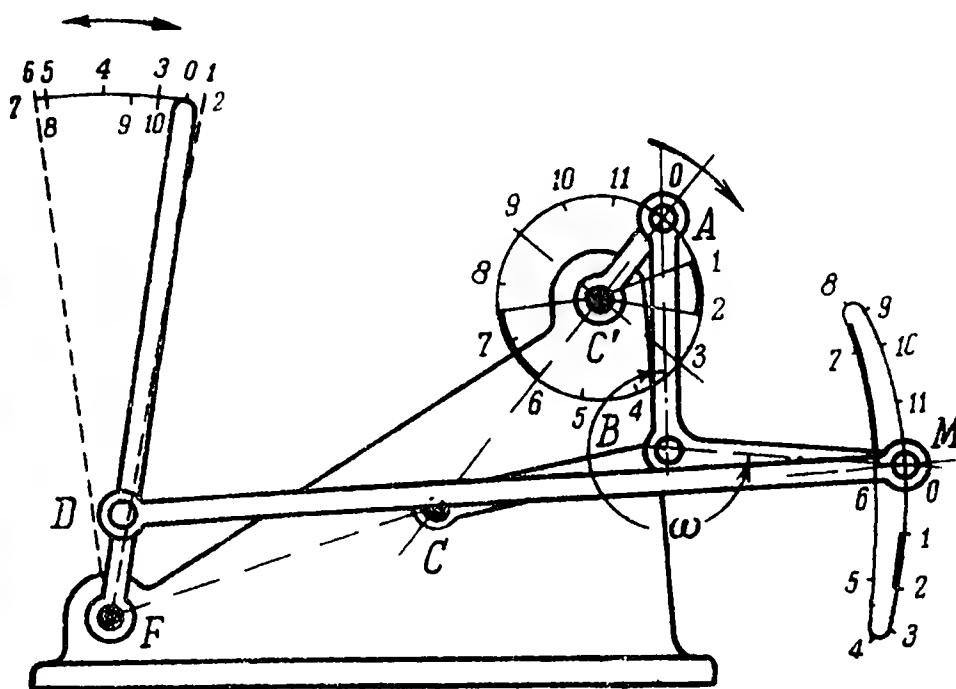
На фиг. 26 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 27 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB=BC=BM=1, \quad AC'=0,43, \quad CC'=1,15, \\ \omega=265^\circ, \\ MD=3,34, \quad FD=0,41, \quad CF=1,47, \quad C'F=2,51. \end{aligned}$$



Фиг. 26.



Фиг. 27.

Траектория точки M имеет два участка приблизительно равной кривизны (на схеме эти участки обозначены жирной линией). Длина звена MD принята равной величине радиуса окружностей, с которыми совпадают указанные участки, а положение центра F выбрано так, что в крайних положениях точка D приходит в центры этих окружностей. Вследствие этого при непрерывном вращении кривошипа AC' звено DF совершает *колебательное движение с остановками* в своих крайних положениях.

14. Многозвенный механизм с остановками в крайних положениях

На фиг. 28 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 29 — кинематическая схема его.

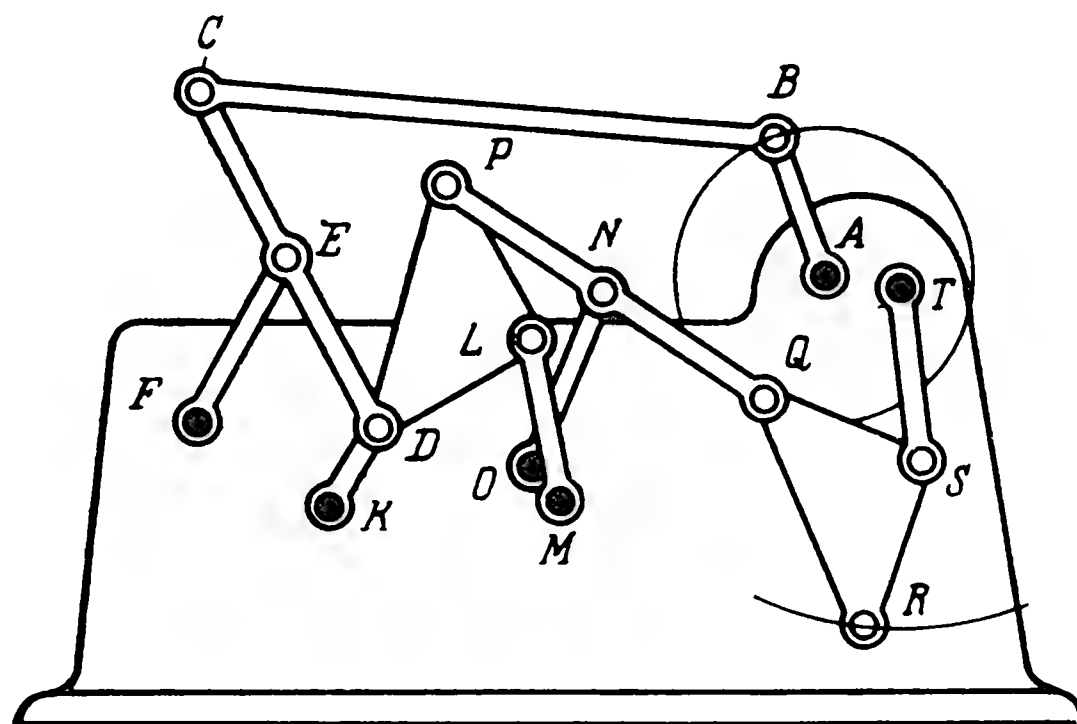
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB=1, \quad BC=4,01, \quad TM=2,8, \quad AF=4,44, \\ CE=ED=EF=PN=NQ=NO=1,31, \\ DL=LM=LP=QS=SR=ST=1,2, \end{aligned}$$

$$PD = QR = 1,74, \quad DK = 0,68, \quad AT = 0,5, \\ MO = 0,28, \quad FK = 1,08, \quad KM = 1,56, \\ AM = 2,43, \quad AK = 3,67, \quad AO = 2,4.$$



Фиг. 28.



Фиг. 29.

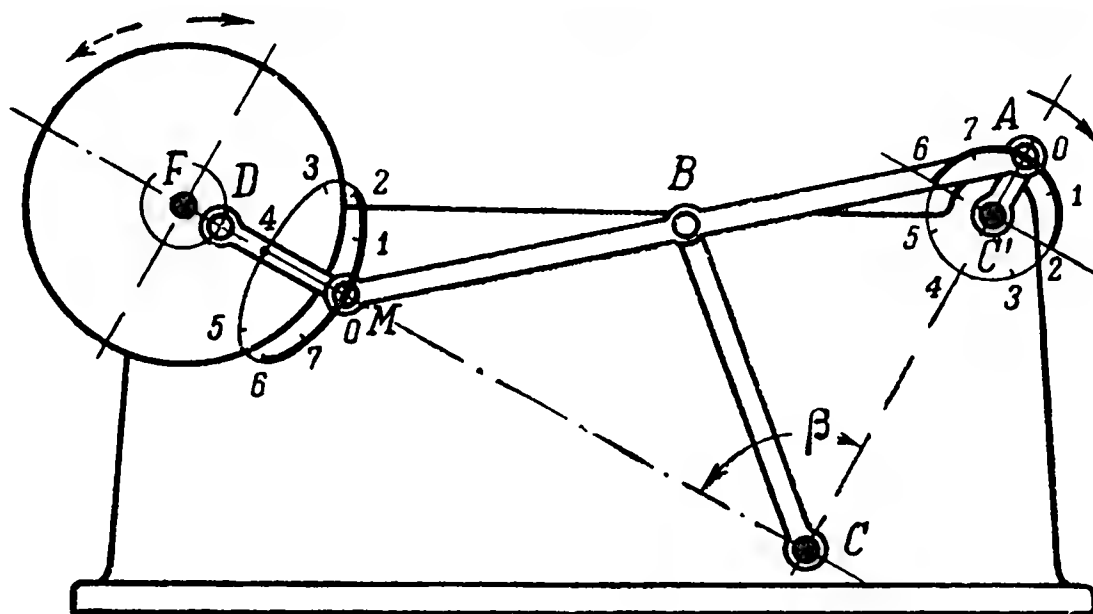
При вращении кривошипа AB точка R ведомого звена движется приближенно по дуге окружности с остановками в крайних положениях.

15. Механизм противовращательной рукоятки с остановкой ведомого звена

На фиг. 30 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 31 — его кинематическая схема.



Фиг. 30.



Фиг. 31.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB = BC = BM = 1, \quad AC' = 0,19, \quad CC' = 1,11, \\ \beta = 90^\circ, \\ MD = 0,403, \quad FD = 0,12, \quad CF = 2,05. \end{aligned}$$

Траектория точки M приближена к окружности на участке, соответствующем углу поворота кривошипа AC' на 180° (на схеме этот участок обозначен жирной линией). Длина звена MD равна радиусу

окружности, к которой приближена траектория точки M , а положение центра F и длина звена FD выбраны в одном из положений механизма так, что точка D приходит в центр этой окружности, при этом оси звеньев MD и FD вытягиваются в одну линию, т. е. находятся в *предельном* положении. Для определенности движения при переходе через предельные положения ведомое звено FD снабжено маховиком.

При вращении ведомого звена FD в направлении, совпадающем с направлением движения кривошипа AC' , оно движется с *остановкой*, продолжительность которой равна приблизительно времени половины оборота кривошипа. При вращении ведомого звена FD в направлении, противоположном направлению движения кривошипа AC' , механизм представляет собой обычную противовращательную рукоятку.

16. „Переступающий механизм“ („Стопоходящая машина“)

На фиг. 32 приведен фотоснимок этого механизма, а на фиг. 33—его кинематическая схема.

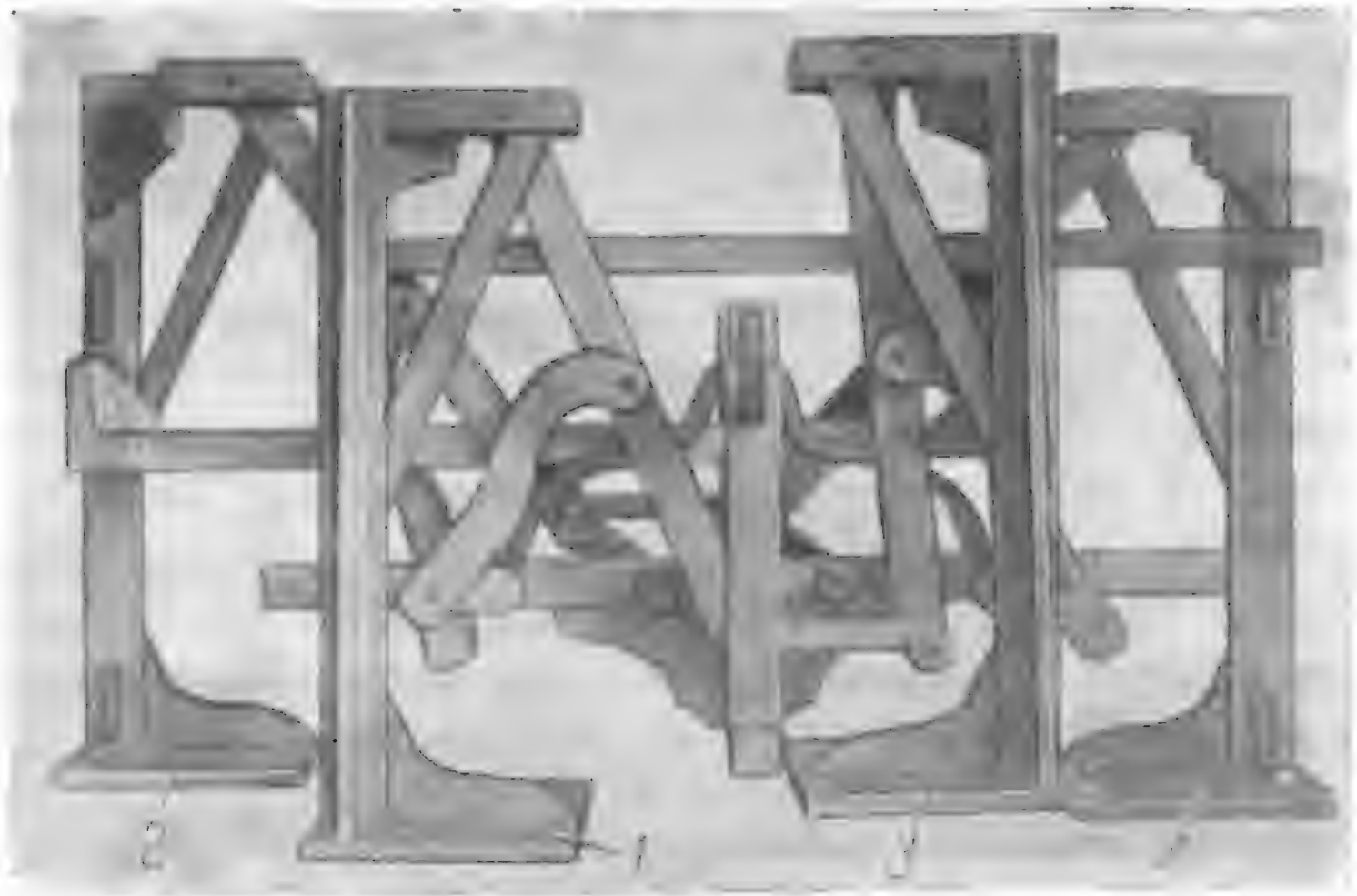
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$A_1B_1 = B_1C = B_1M_1 = A_2B_2 = B_2C = B_2M_2 = A_3B_3 = B_3C_1 = B_3M_3 = \\ = A_4B_4 = B_4C_1 = B_4M_4 = 1,$$

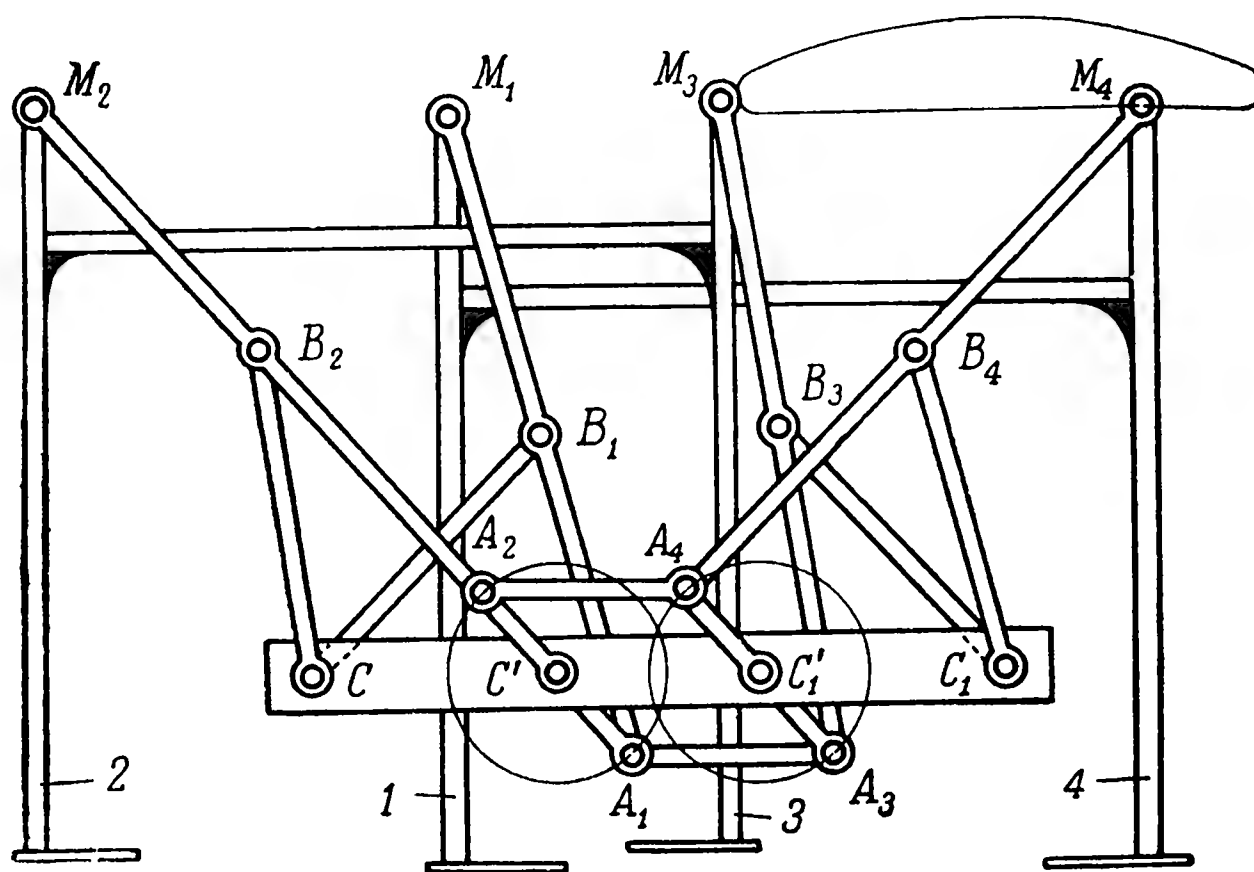
$$A_1C' = A_2C' = A_3C'_1 = A_4C'_1 = 0,355,$$

$$CC' = C_1C'_1 = 0,785, \quad A_2A_4 = A_1A_3 = C'C'_1 = 0,634.$$

Механизм состоит из четырех лямбдообразных прямил, соединенных так, что кривошипы их образуют шарнирный параллелограмм $A_1A_2A_3A_4$ (звено A_1C' жестко соединено со звеном A_2C' , а звено $A_3C'_1$ —со звеном $A_4C'_1$). Точки M_1 и M_4 принадлежат звену, с которым жестко скреплены ноги 1 и 4 механизма, точки M_2 и M_3 принадлежат другому звену, с которым жестко скреплены ноги 2 и 3. На фиг. 33 показана траектория точки M_4 в ее движении относительно корпуса, т. е. звена $CC'C'_1C_1$. Траектория близка к кривой, которую описывает конец ноги идущего человека или животного по отношению к его корпусу, а именно прямолинейная часть траектории точки M соответствует положению конца ноги на земле, остальная же часть траектории — движению конца ноги над землей.



Фиг. 32.



Фиг. 33.

Если из положения, указанного на фиг. 33, перемещать корпус $CC'C_1C_1$ прямолинейно в ту или другую сторону, то, пока точки M_4 и M_1 остаются на прямолинейных участках своих относительных траекторий, ноги 1 и 4 неподвижны, а ноги 2 и 3 перемещаются по направлению движения корпуса. В тот момент, когда точки M_1 и M_4 должны покинуть прямолинейный участок, точки M_2 и M_3 приходят в начало своего прямолинейного участка, так как при выбранных размерах звеньев угол поворота кривошипа, соответствующий перемещению точки M по прямолинейному участку, равен 180° . При дальнейшем движении корпуса ноги 2 и 3 будут некоторое время оставаться неподвижными, а ноги 1 и 4 начнут перемещаться по направлению движения корпуса, и, таким образом, при непрерывном перемещении корпуса ноги механизма переступают подобно ногам животного.

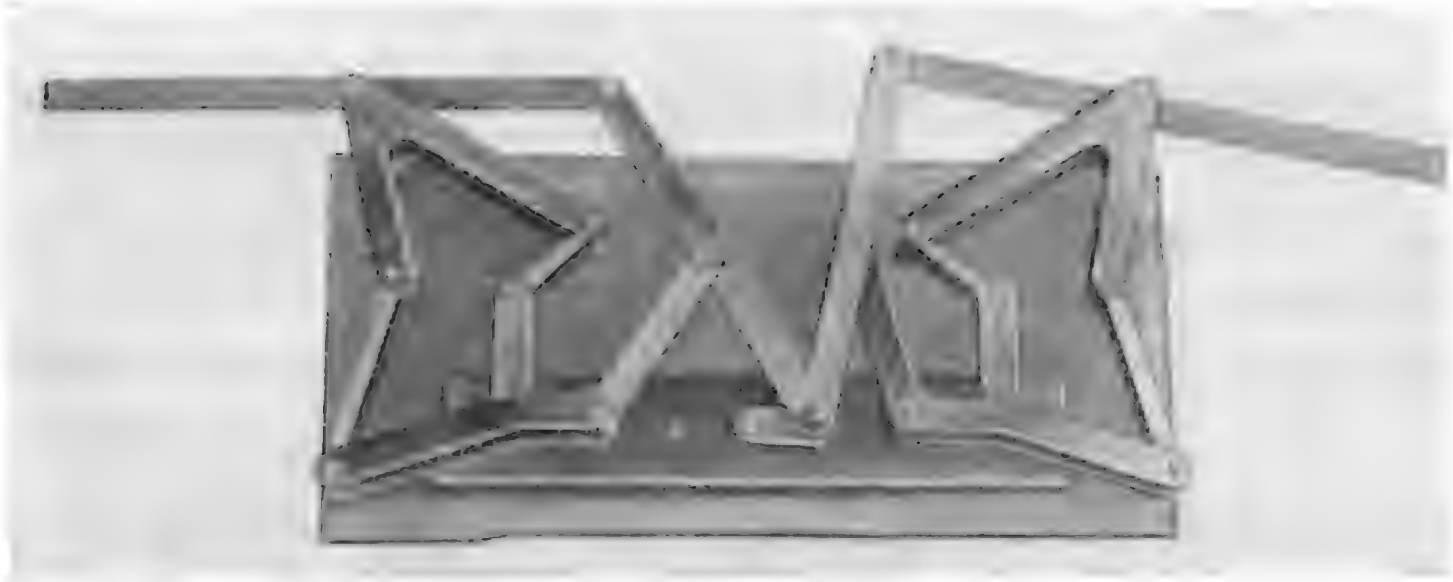
17. Гребной механизм

На фиг. 34 приведен фотоснимок модели гребного механизма, а на фиг. 35 — кинематическая схема этого механизма.

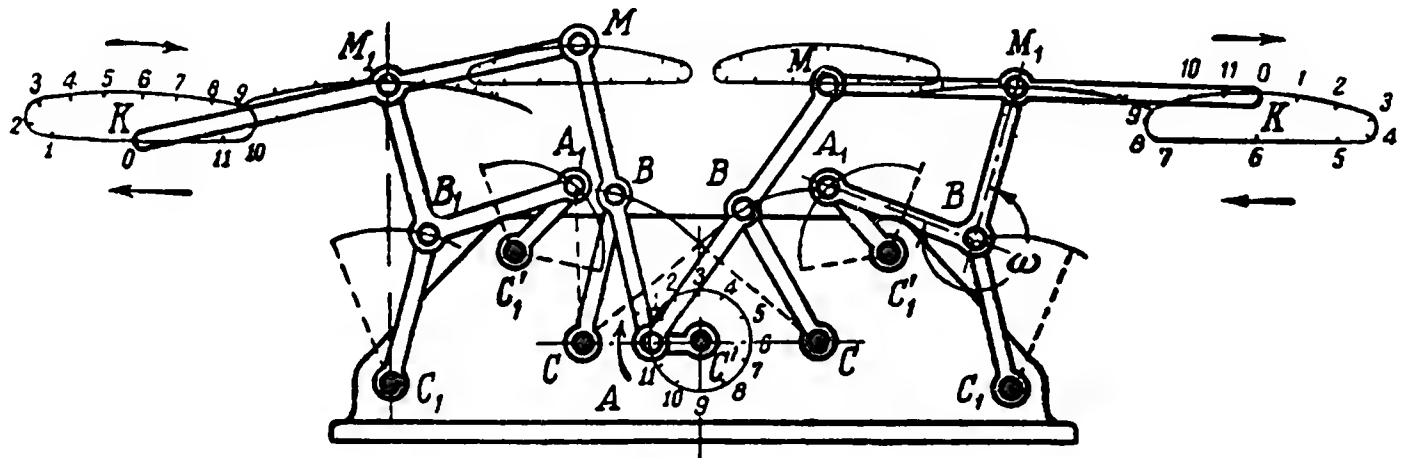
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = A_1B_1 = B_1C_1 = B_1M_1 = 1, \\ AC' &= 0,297, \quad CC' = 0,765, \quad A_1C'_1 = 0,528, \quad C_1C'_1 = 1,21, \\ \omega &= 270^\circ, \\ MM_1 &= 1,275, \quad CC'_1 = 0,74, \quad C'C'_1 = 1,335, \quad CC_1 = 1,3, \\ MK &= 1,6. \end{aligned}$$

При вращении кривошипа AC' весло, соединенное жестко со звеном MM_1K , имеет движение, близкое к поступательному, по траекториям, указанным для точек M и K . Движению весла под водой соответствуют прямолинейные участки траектории точек M и K . Вход и выход из воды совершается почти отвесно и с *небольшой* скоростью. На фиг. 36 приведена копия фотоснимка, показывающего устройство лодки с гребным механизмом.



Фиг. 34.



Фиг. 35.



Фиг. 36.

18. Механизм, направляющий по дуге окружности

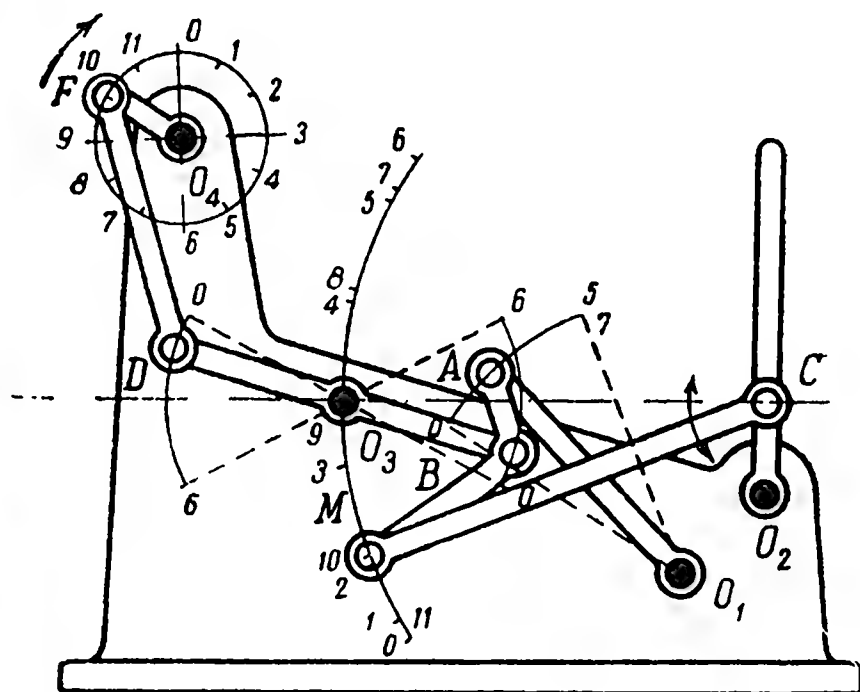
На фиг. 37 приведен фотоснимок этого механизма, а на фиг. 38 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} O_3B &= O_3D = 1, \\ O_1A &= 1,55, \quad AB = 0,418, \quad O_1O_3 = 2,18, \quad BM = 0,983, \\ AM &= 1,23, \quad CM = 2,46, \quad CO_2 = 0,526, \quad O_1O_2 = 0,608, \\ O_3O_2 &= 2,51, \quad FD = 1,51, \quad O_4F = 0,92, \quad O_4O_3 = 1,795, \\ O_4O_1 &= 3,82. \end{aligned}$$



Фиг. 37.



Фиг. 38.

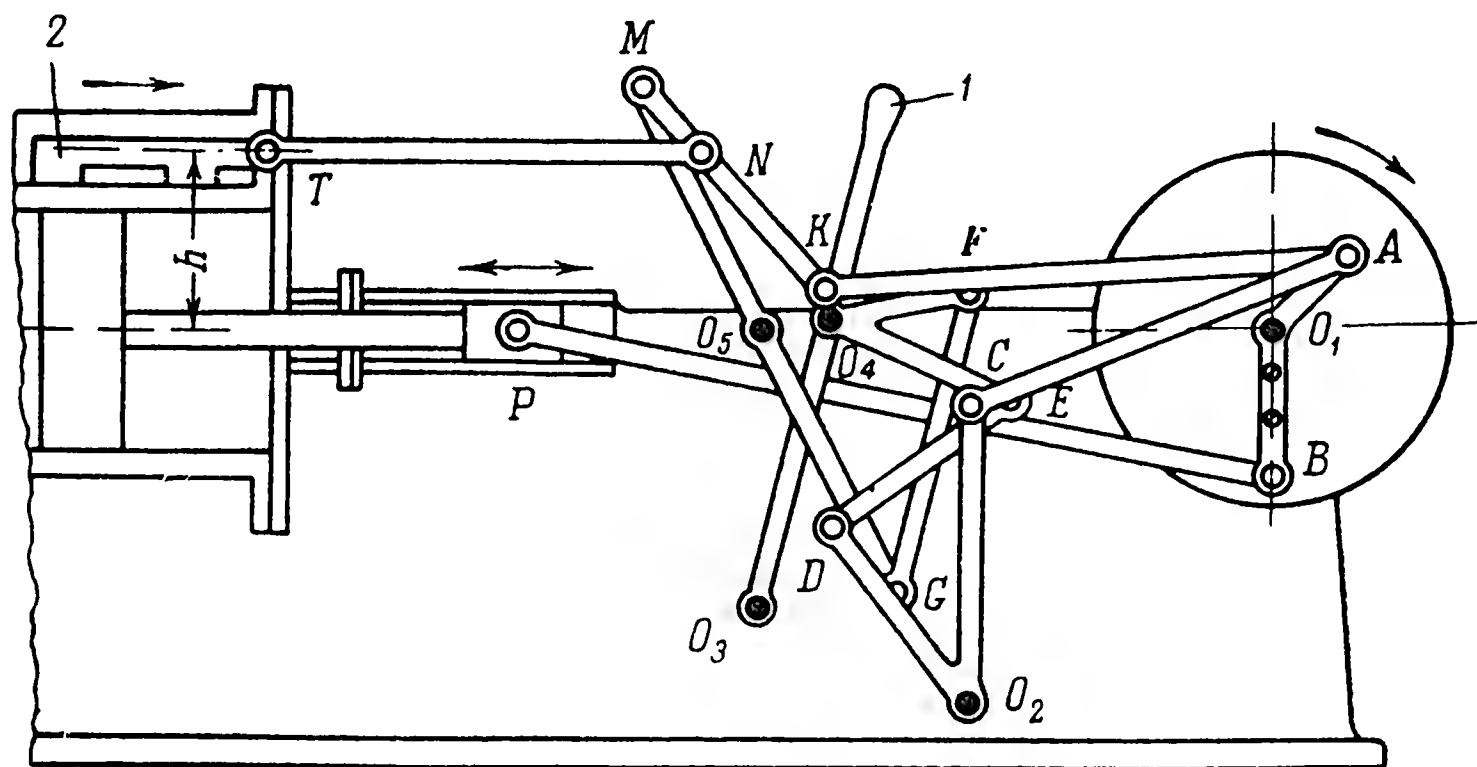
При указанных размерах звеньев точка M описывает траекторию, мало отличающуюся от дуги окружности. Радиус этой окружности равен длине звена MC , а центр вращения совпадает с положением точки C . Вследствие этого звено O_2C неподвижно во все время движения кривошипа O_4F .

19. Механизм кулисы паровой машины

На фиг. 39 приведен фотоснимок чернового проекта модели этого механизма, а на фиг. 40 — его кинематическая схема.



Фиг. 39.



Фиг. 40.

Размеры звеньев, определенные по этому черновому проекту, имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} O_1B &= 1, \quad PB = 5,38, \quad O_1A = 0,755, \quad AC = 2,82, \\ EO_2 &= 2,08, \quad O_2D = 1,58, \quad DC = 1,29, \quad DE = 1,54, \\ O_4E &= 1,36, \quad O_4F = 1,03, \quad EF = 0,78, \quad FG = 2,19, \\ GO_5 &= 2,08, \quad MO_5 = MK = 1,89, \quad MN = 0,62, \quad AK = 3,7; \\ NT &= 3,09, \quad h = 1,27, \quad O_1O_2 = 3,38, \quad O_1O_5 = 3,56, \\ O_1O_3 &= 3,95, \quad O_5O_3 = 1,94, \quad O_5O_2 = 3,04, \quad O_3O_4 = 2,09. \end{aligned}$$

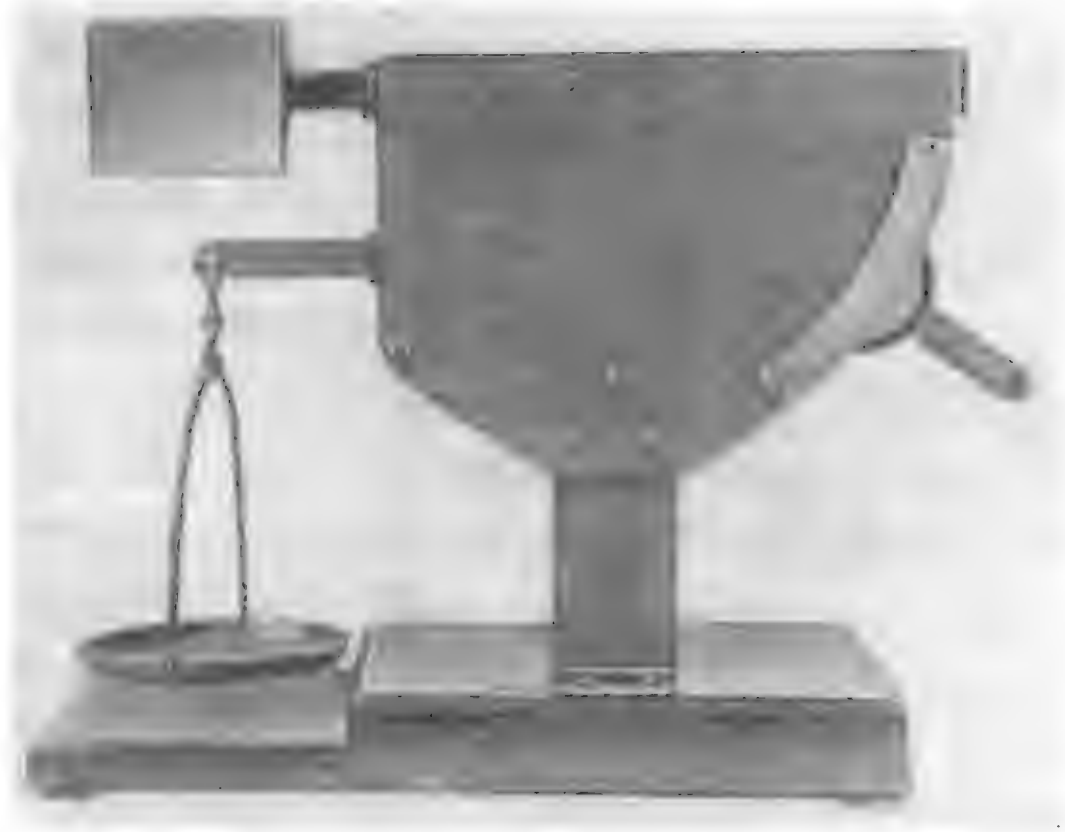


Фиг. 41.

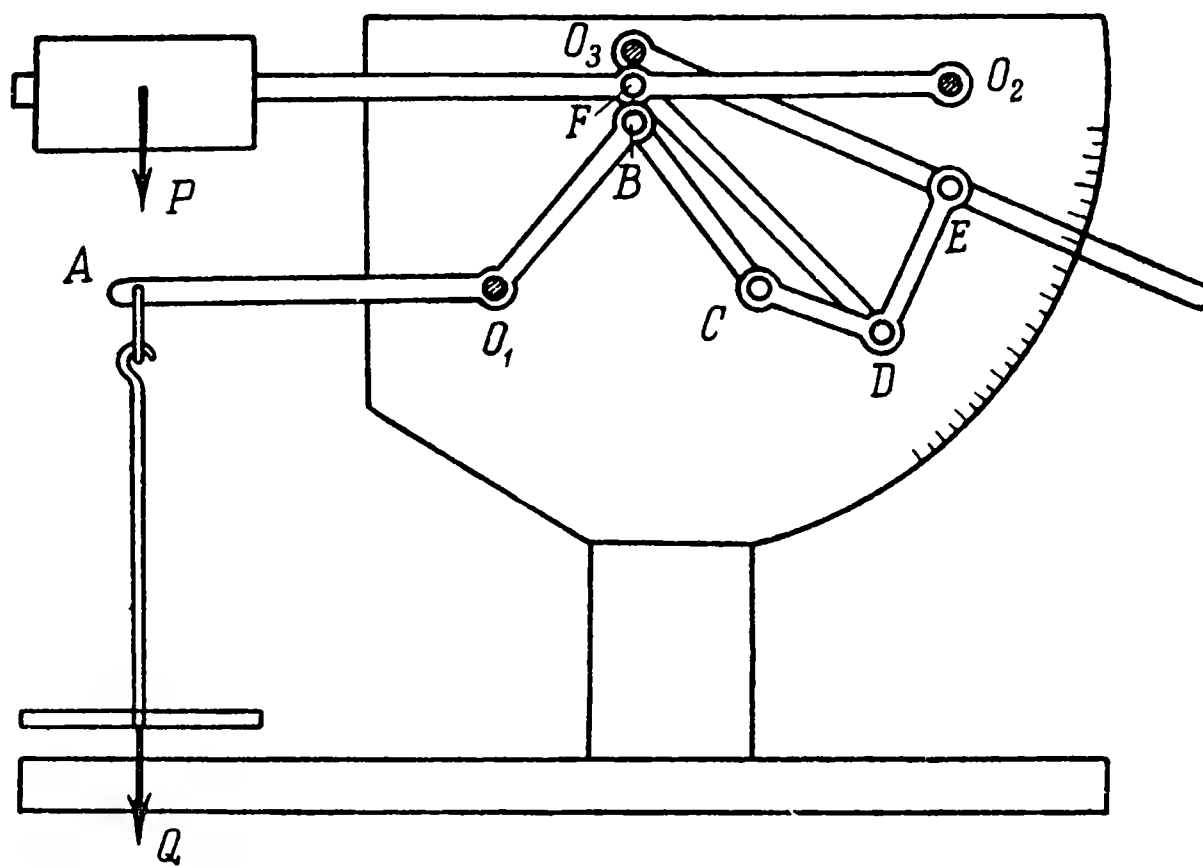
Центр O_4 укреплен на рычаге 1 (фиг. 40), который можно установить в различных положениях. При этом изменяется траектория точки N и, следовательно, характер движения золотника 2. На схеме рычаг 1 показан в крайнем левом положении, при котором длина хода золотника 2 наибольшая. На фиг. 41 приведена копия фотоснимка другой модели этого же механизма.

20. Механизм весов

На фиг. 42 приведен фотоснимок модели весов, а на фиг. 43 — ее кинематическая схема.



Фиг. 42.



Фиг. 43.

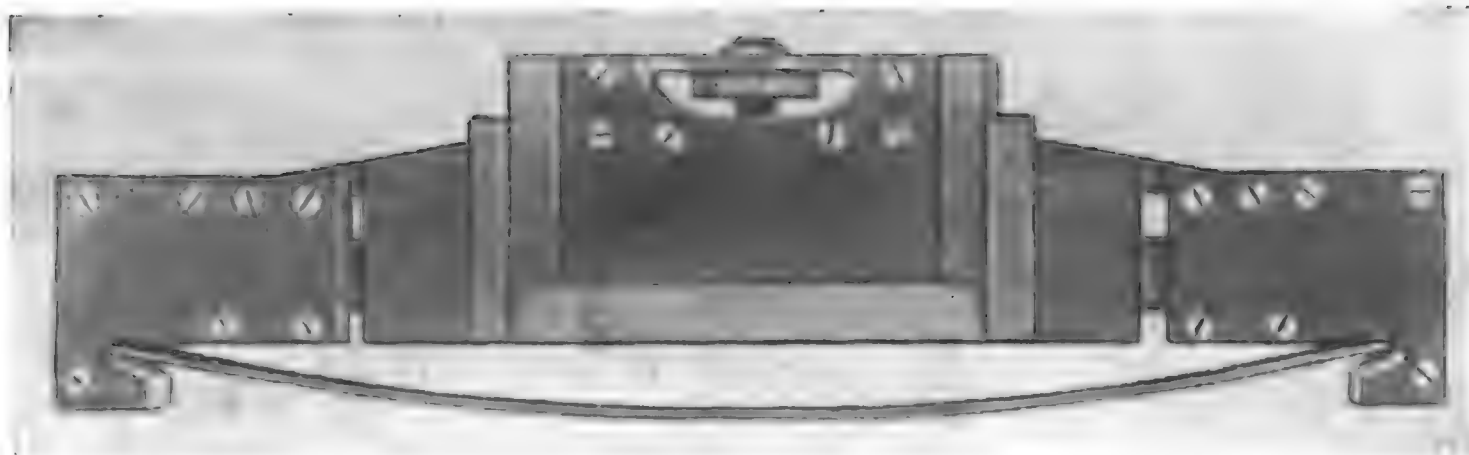
Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 O_1A &= 1, \\
 O_1B &= 0,692, \quad AB = 1,5, \quad BC = 0,693, \quad CE = 0,626, \\
 CD &= 0,353, \quad DE = 0,442, \quad O_3E = 0,941, \quad O_1O_3 = 0,692, \\
 DF &= 0,98, \quad O_2F = 0,892, \quad O_2O_3 = 0,892, \quad O_1O_2 = 1,42.
 \end{aligned}$$

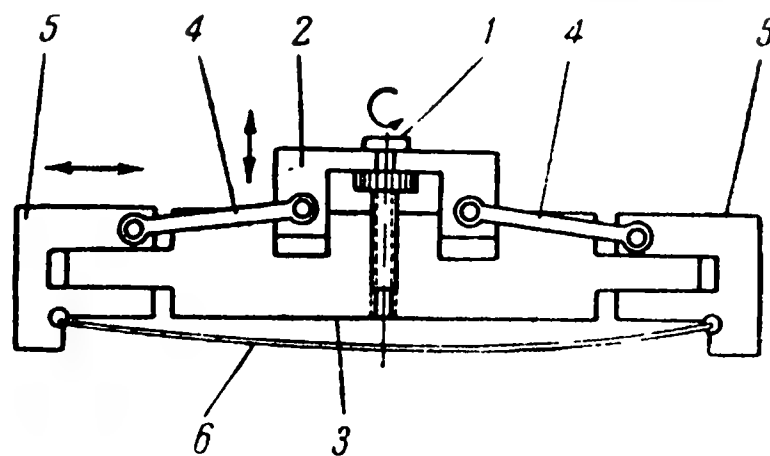
На звено O_1A действует сила тяжести взвешиваемого груза Q , а на звено O_2F — сила тяжести противовеса P . Так как механизм имеет степень подвижности, равную двум, то для определения положений всех звеньев механизма следует задаваться двумя независимыми условиями. В данном случае такими условиями являются: 1) условие равновесия системы под действием сил P и Q и 2) условие горизонтальности звена O_2F в положении равновесия. Оба условия удовлетворяются при некотором положении звена O_3E , причем это положение, очевидно, изменяется с изменением величины взвешиваемого груза.

Рычаг O_3E снабжен установочным приспособлением и нониусом, а на корпусе весов укреплена шкала. Противовес P выполнен сменным. Каждой величине противовеса должна соответствовать особая градуировка шкалы.

21. Измеритель кривизны



Фиг. 44.



Фиг. 45.

На фиг. 44 приведен фотоснимок модели этого устройства, а на фиг. 45 — его схема.

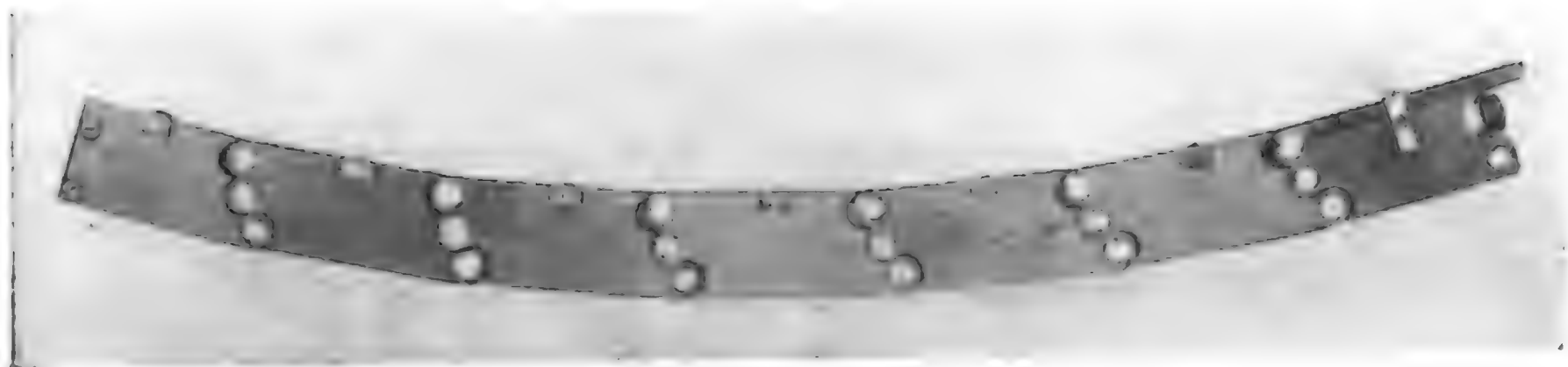
При вращении винта 1 ползун 2 перемещается в направляющих корпуса 3, а ползуны 5 сближаются или удаляются друг от друга, что вызывает больший или меньший прогиб упругой пластинки 6.

Так как при малых величинах прогиба упругая линия пластинки в данных условиях мало отличается от дуги окружности, то это приспособление может быть использовано как для измерения кривизны, так и для черчения дуг окружностей больших радиусов.

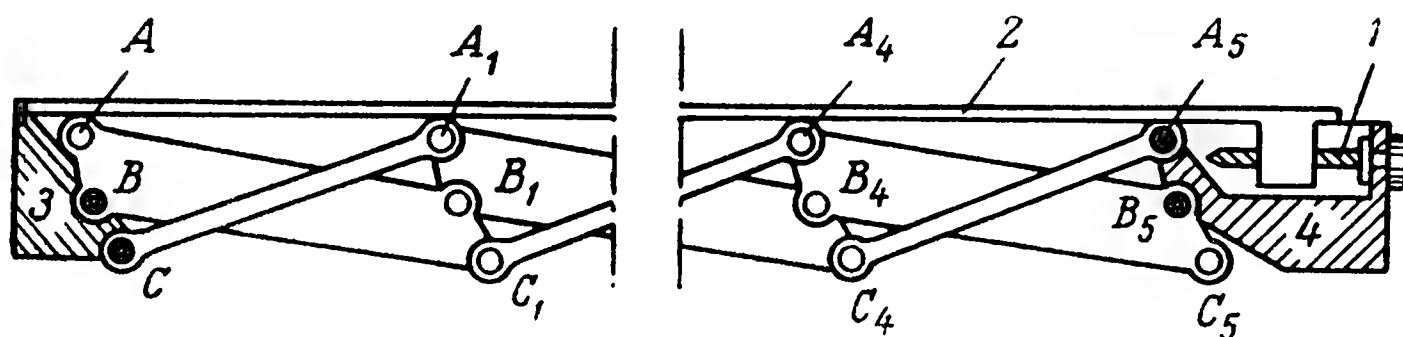
Величина прогиба, а следовательно, и величина радиуса кривизны, измеряемой кривой, определяются по перемещению ползуна 2. С этой целью ползун 2 снабжен нониусом, а корпус 3 имеет шкалу.

22. Линейка для измерения кривизны

На фиг. 46 приведен фотоснимок линейки для измерения кривизны, а на фиг. 47 — кинематическая схема этого устройства.



Фиг. 46.



Фиг. 47.

Размеры звеньев в этой модели имеют следующие значения:

$$AB = A_1B_1 = \dots = A_5B_5 = 18 \text{ мм}$$

$$BC = B_1C_1 = \dots = B_5C_5 = 18 \text{ „}$$

$$AB_1 = A_1B_2 = \dots = A_4B_5 = 104,5 \text{ мм}$$

$$BC_1 = B_1C_2 = \dots = B_4C_5 = 110 \quad "$$

$$CA_1 = C_1A_2 = \dots = C_4A_5 = 94 \quad "$$

При вращении винта 1 гибкая линейка 2, скрепленная со звеном 3 и шарнирами $A, A_1, A_2, \dots, A_5$, перемещается относительно звена 4, изгибаясь по дуге окружности.

Зависимость между радиусом этой дуги и перемещением линейки относительно звена 4 выражается формулой, данной Чебышевым,

$$R = \frac{19817}{J} \cdot \frac{586 + J}{762 + J},$$

где R — радиус окружности (в мм), а J — перемещение (в мм) линейки 2 относительно звена 4.

Более подробное описание этой линейки имеется в книге В. Г. Бооля *.

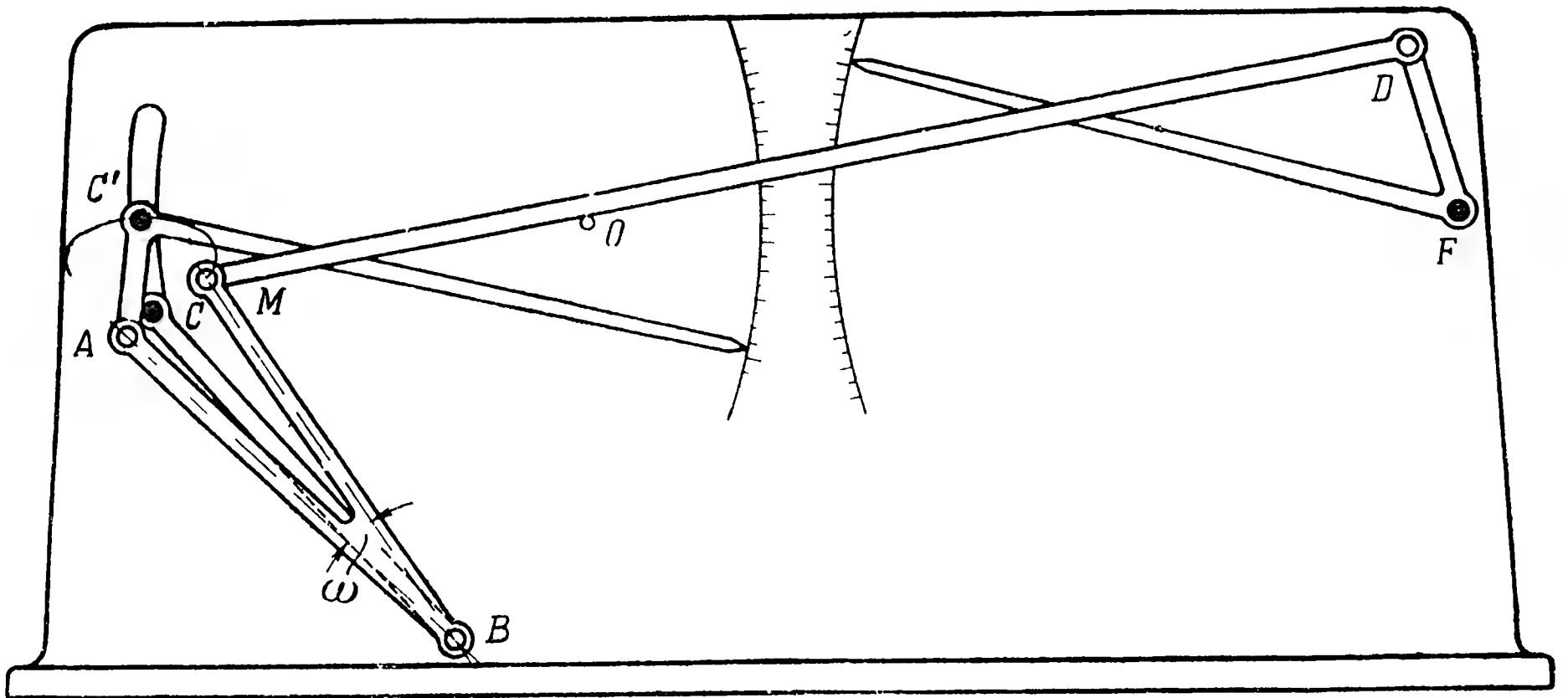
23. Механизм с изменяемым ходом

На фиг. 48 приведен фотоснимок чернового проекта модели этого механизма, выполненный собственноручно Чебышевым, а на фиг. 49 — кинематическая схема.



Фиг. 48.

* В. Г. Бооль. Инструменты и аппараты для геометрического черчения М., 1893.



Фиг. 49.

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB = BC = BM = OC' &= 1, \\ AC' &= 0,246, \quad CC' = \text{variable}, \quad AM = 0,246, \\ \omega &= 14^\circ, \\ MD &= 2,82, \quad FD = 0,376, \quad C'F = 2,84. \end{aligned}$$

Неподвижный центр C можно переставлять по дуге окружности, описанной из центра O , т. е. величина $CC' = d$ сделана переменной, что дает возможность получать различные по виду траектории точки M . При этом будет меняться также и соотношение между углами поворота звеньев AC' и DF . Так как звенья AC' и DF соединены жестко с указателями, движущимися по градуированным шкалам, то эти углы поворота и изменение их соотношений могут быть показаны весьма наглядно.

24. Арифмометр (счетная машина с непрерывным движением)

На фиг. 50 приведен фотоснимок арифмометра. Более совершенная модель этого арифмометра хранится в Conservatoire des Arts et Métiers в Париже.



Фиг. 50.

Конструкция арифмометра подробно описана Чебышевым в статье „Счетная машина с непрерывным движением“ *.

25. Центробежный регулятор

На фиг. 51 и 52 приведены копии фотоснимков центробежных регуляторов, изготовленных по указанию Чебышева.



Фиг. 51.



Фиг. 52.

В мемуаре „О центробежном уравниателе“ Чебышев излагает метод определения основных размеров этих регуляторов при условии получения наилучшего изохронизма **. Модели, изображенные на фиг. 51 и 52, и были построены по размерам, определенным при помощи указанного метода.

* Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, изд. АН СССР, М.—Л., 1948, т. IV, стр. 158—160.— *Ред.*

** Стр. 689—709 настоящего издания.— *Ред.*

ПЕРЕЧЕНЬ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЗМОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

№ п.п.	Наименование	№ фиг.	Стр.
1	Механизм четырехзвенной противовращательной рукоятки .	1, 2	889
2	Механизм самокатного кресла	3, 4	890
3	Механизм шестизвенной противовращательной рукоятки . .	5, 6	891
4	„Парадоксальный“ механизм	7, 8	893
5	Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа	9, 10	894
6	Механизм для преобразования качательного движения во вращательное	11, 12	895
7	Механизм „велосипеда“	13, 14	897
8	Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом	15, 16	898
9	Механизм пресса	17, 18, 19	899
10	Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода	20, 21	900
11	Механизм „сортировальки“	22, 23	901
12	Механизм с остановкой ведомого звена на полпути	24, 25	902
13	Шестизвенный механизм с остановками в крайних положениях	26, 27	903
14	Многозвенный механизм с остановками в крайних положениях	28, 29	904
15	Механизм противовращательной рукоятки с остановкой ведомого звена	30, 31	905
16	„Переступающий механизм“ („Стопоходящая машина“) . .	32, 33	907
17	Гребной механизм	34, 35, 36	909
18	Механизм, направляющий по дуге окружности	37, 38	910
19	Механизм кулисы паровой машины	39, 40, 41	911, 912
20	Механизм весов	42, 43	913
21	Измеритель кривизны	44, 45	914
22	Линейка для измерения кривизны	46, 47	915
23	Механизм с изменяемым ходом	48, 49	916, 917
24	Арифмометр (счетная машина с непрерывным движением) .	50	917
25	Центробежный регулятор	51, 52	918

КОММЕНТАРИИ К СТАТЬЯМ ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

(Составители *И. И. Артоболовский и Н. И. Левитский*)

К статье „О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта“

Под именем параллелограмов во времена Чебышева были известны прямолинейно-направляющие механизмы Уатта, т. е. шарнирные механизмы для воспроизведения движения по прямой линии, применявшиеся в некоторых конструкциях паровых машин.

Различают коленчатый *полный* параллелограм Уатта и *сокращенный*.

Сокращенный параллелограм Уатта представляет собою шарнирный четырехзвенник $ADFG$ (фиг. 1), в котором точка M описывает траекторию, мало отличающуюся на некотором участке от прямой линии.

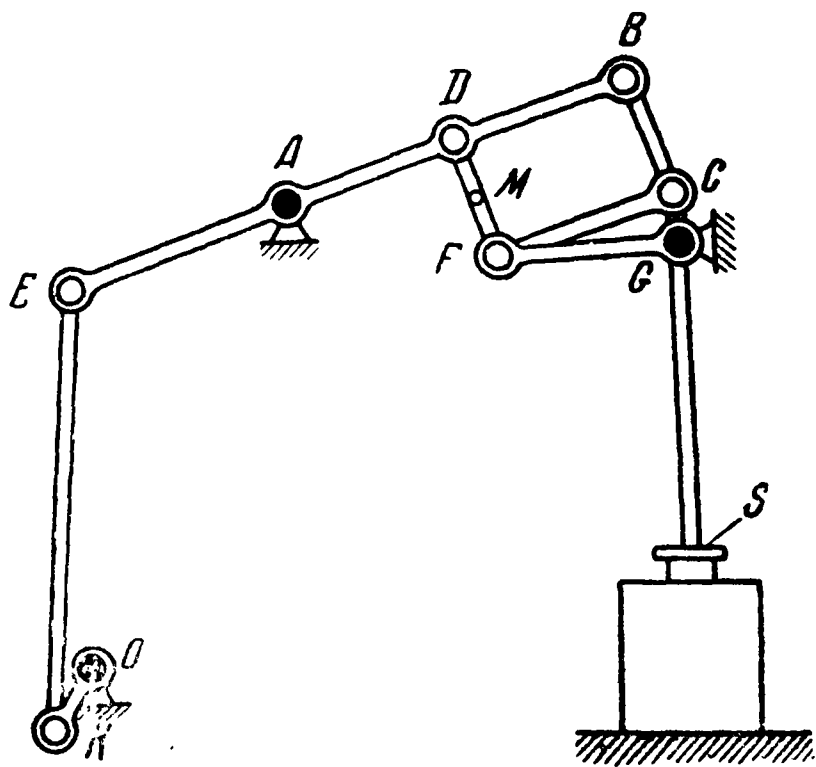
Полный параллелограм Уатта образуется из сокращенного путем присоединения пантографа, а именно, к основному механизму $ADFG$ присоединены два звена FC и BC так, что образуется параллелограм $DBCF$ (отсюда и произошло название механизма).

Если принять

$$FC = DB = AD = FG \text{ и } DF = BC,$$

то траектория точки C будет подобна траектории точки M , т. е. точка C будет также на некотором участке своей траектории двигаться приближенно-прямолинейно.

Параллелограм Уатта применялся в балансирах паровых машинах для преобразования возвратно-поступательного движения поршня в непрерывное вращение кривошипа OK . Звено AB в машине называлось *коромыслом* или *балансиром*, а звено FG — *отводным радиусом* или *контрбалансиром*.



Фиг. 1.

Применяя метод разложения в ряды, Чебышев указывает водоизмененную схему полного параллелограмма Уатта и соотношения между размерами звеньев, при которых для траектории точки C уменьшается максимальное отклонение от прямолинейности.

Вывод этих соотношений имеется в работе З. Ш. Блоха ([2], стр. 161).

Следует отметить, что в механизме Чебышева в отличие от полного параллелограмма Уатта имеется лишь одна точка, траектория которой приближена к прямой линии, так как для повышения точности хода точки C Чебышев отступил от соотношений, необходимых для образования пантографа.

К статье „Об одном механизме“

Симметричный прямолинейно-направляющий механизм, описанный в этой статье, может быть преобразован по теореме Робертса — Чебышева в другой четырехзвенный механизм, известный под названием „лямбдообразного“ ([4], стр. 187). Поэтому соотношения между размерами звеньев, указанные Чебышевым в рассматриваемой статье без вывода, могут быть получены из формул для лямбдообразного механизма (стр. 808 настоящего издания), подробный вывод которых дан Чебышевым на основании теории наилучшего приближения функций. О необходимости и достаточности условий теоремы Робертса — Чебышева см. [5].

Формулы для длины прямолинейного участка и величины максимального отклонения от прямолинейности также могут быть получены на основании зависимостей, данных Чебышевым в последующих его статьях, как это показал З. Ш. Блох ([2], стр. 141).

Таблицы и графики, облегчающие пользование этими формулами, имеются в работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского ([1], стр. 96).

К статье „О параллелограмах“

Формулы для определения параметров шестизвенного механизма, дающего приближение всей шатунной кривой к прямой линии, и соответствующий числовой пример даны в настоящем издании в редакции А. А. Маркова и Н. Я. Сониной, которые исправили неточность, имевшую место в первом издании этой статьи.

Как показал З. Ш. Блох ([2], стр. 165), соотношения между размерами звеньев прямолинейно-направляющих механизмов, упоминаемых в этой статье, получены Чебышевым из разложения в ряды координат точки, совершающей приближенно-прямолинейное движение. Кроме того, З. Ш. Блох установил ([2], стр. 105), что в формулы, определяющие размеры одного из этих механизмов, вкралась опечатка*. В настоящем издании формулы для этого механизма даны с исправлениями З. Ш. Блоха.

* А именно, в формулу для размера AB , приведенную на стр. 669 настоящего издания.— *Ред.*

К статье „О центробежном уравнителе“

Упоминаемый в постановке задачи полином 5-й степени (стр. 695 настоящего издания), который наименее уклоняется от нуля, постоянно возрастаая или убывая, может быть получен на основании общего решения, данного Чебышевым в работе „О функциях, наименее уклоняющихся от нуля“* Некоторые частные значения этих полиномов имеются в работе Н. И. Левитского ([6], стр. 44).

Практическое решение задачи об определении размеров регулятора основывается, однако, на разложении в ряды. Указанные Чебышевым значения величин A , B , m , ϕ и φ (стр. 693 настоящего издания) могут быть найдены из системы уравнений, которые получаются, если приравнять нулю коэффициенты при α^0 , α , α^2 , α^3 и α^4 ([3], стр. 166—168).

К статье „О зубчатых колесах“

Метод, которым пользуется в этой работе Чебышев, основан на замене действительного выражения отклонения от заданной зависимости его приближенным выражением, причем искомые параметры определяются из условий наименьшего отклонения от нуля этой разности на конечном отрезке изменения аргумента. Сравнение этого метода с методом, основанным на приравнивании нулю коэффициентов в ряде Тейлора, показывает, что в тех случаях, когда нужно получить приближение к заданной зависимости на конечном отрезке изменения аргумента, предпочтительнее пользоваться методом, предложенным Чебышевым в работе „О зубчатых колесах“ ([6], стр. 61).

Вывод значений коэффициентов тех полиномов, которые использует Чебышев при решении задачи о зубчатых колесах, имеется в работе З. Ш. Блоха ([2], стр. 170).

К статье „О параллелограммах, состоящих из трех каких-либо элементов“

Как указывает Чебышев в этой работе, число возможных решений при заданном шатунном треугольнике равно 18. В работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского ([1], стр. 102) имеется числовой пример, в котором показаны 18 различных прямолинейно-направляющих механизмов, получаемых по формулам Чебышева.

К статье „О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси“

В этой работе Чебышев дал подробный вывод всех необходимых зависимостей для механизмов, в которых симметричная шатунная кривая приближена к окружности или к прямой линии. Все полученные ранее Чебышевым формулы могут быть выведены на основании содержащихся здесь зависимостей ([2], стр. 129). Кроме того,

* Стр. 579—608 настоящего издания. — *Ред.*

указанная Чебышевым постановка задачи, соответствующая взвешенному приближению, дала возможность в дальнейшем дать широкое определение общей постановки задачи о синтезе механизмов с применением теории наилучшего приближения функций ([6], стр. 48).

Издания, на которые даны ссылки в Комментариях

1. И. И. Артоболовский и Н. И. Левитский, Механизмы П. Л. Чебышева. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II. Изд. АН СССР, М.—Л., 1945.
 2. З. Ш. Блох. Основные результаты работ П. Л. Чебышева по метрическому синтезу плоских механизмов. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II. Изд. АН СССР, М.—Л., 1945.
 3. З. Ш. Блох. Приближенный синтез плоских механизмов. Машгиз, 1948.
 4. В. В. Добровольский. Вопросы структуры механизмов в работах П. Л. Чебышева. Сб. „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II. Изд. АН СССР, М.—Л., 1945.
 5. Н. В. Еремеев. Об условиях теоремы Робертса — Чебышева. Прикладная математика и механика, т. XIII, вып. 1, 1948.
 6. Н. И. Левитский. Синтез механизмов по Чебышеву. Изд. АН СССР, 1946.
-

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины . . .	9
О простых числах	33
Об одном арифметическом вопросе	55
Доказательство одной теоремы Чебышева	105

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Опыт элементарного анализа теории вероятностей	111
Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей	190
О средних величинах	202
О двух теоремах относительно вероятностей	211

АНАЛИЗ

Об интегрировании иррациональных дифференциалов	227
Об интегрировании иррациональных дифференциалов	252
О непрерывных дробях	256
Об интерполировании по способу наименьших квадратов	287
Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблю- дениями	316
Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей	412
О разложении функций в ряды при помощи непрерывных дробей	417
Об интерполировании	439

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Теория механизмов, известных под названием параллелограмов	611
О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта	649
Об одном механизме	655
О параллелограмах	663
О центробежном уравниателе	689
О зубчатых колесах	710
О параллелограмах, состоящих из трех каких-либо элементов	748
О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси	785

ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. И. Ахиезер. П. Л. Чебышев и его научное наследие	843
И. И. Артоболовский и Н. И. Левитский. Модели механизмов П. Л. Чебышева	888
Комментарии к статьям по теории механизмов	920

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

✽

Редактор издательства *А. В. Гермогенов*
Технический редактор *Н. П. Аузан*

✽

РИСО АН СССР № 10-77Р. Т-06296. Издаг. № 739.
Тип. заказ № 958. Подп. к печ. 15/XI 1954 г.
Формат бум. $70 \times 92^{1/16}$. Бум. л. 29 + 1 вклейка.
Печ. л. 67,86 + 1 вклейка.
Уч.-издат. 50,9 + 1 вкл. (0,1 уч.-издат. л.). Тираж 4000.

Цена по прейскуранту 1952 г. 37 р. 70 к.

Набрано в Первой Образцовой типографии
имени А. А. Жданова. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Отпечатано во 2-й типографии Издательства
Академии Наук СССР.
Москва, Шубинский пер., д. 10

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
204	8 св.	r_{μ}	r_{ν}
512	8 св.	$\epsilon_3 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_2+h}}$	$\epsilon_3 \sqrt{\frac{x+h}{\alpha_3+h}}$
595	9 сн.	$)^{-\rho\rho}$	$)^{-\rho_0}$

П. Л. Чебышев.

